Э.Б. ЛИ, Л. МАРКУС

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Э. Б. ЛИ, Л. МАРКУС

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Перевод с английского Л. Л. ЛЕОНТЬЕВОЙ

Под редакцией Я. Н. РОЙТЕНБЕРГА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

6ф6.5
Л 55
УДК 62-52

Основы теории оптимального управления, Ли Э. Б., Маркус Л., перев. с англ., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1972, 576 стр.

Фундаментальный труд по математической теории оптимального управления, в котором изложение проводится последовательно с позиций качественной теории дифференциальных уравнений.

Дается постановка задачи оптимального управления детерминированными системами, излагается теория оптимального управления линейными системами. Рассматриваются теория оптимальных линейных управляемых систем с интегральным выпуклым критерием качества, принцип максимума Л. С. Понтрягина, вопросы существования оптимальных управлений для нелинейных систем, достаточные условия оптимальности. Исследуются вопросы управляемости, наблюдаемости и устойчивости управляемых систем. Изучается синтез нелинейных управляемых систем.

Книга рассчитана на инженеров и научных работников, занятых исследованием и проектированием автоматических систем, а также на математиков.

Илл. 35. Библ. назв. 267.

FOUNDATIONS OF OPTIMAL CONTROL THEORY

E. B. Lee
L. Markus

Center for Control Sciences
Institute of Technology
University of Minnesota

John Wiley & Sons, Inc.,
New York, London, Sydney

3-3-14
176—72

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Математической основой теории оптимального управления являются такие области математики, как теория дифференциальных уравнений и вариационное исчисление, истоки развития которых связаны с именем величайшего математика восемнадцатого столетия, петербургского академика Л. Эйлера.

В Советском Союзе после Великой Отечественной войны развитие современных методов в соответствующих разделах классической математики и механики было вызвано к жизни потребностями таких новых областей науки и техники, как освоение космического пространства, сверхзвуковая авиация и автоматизация управления производственными процессами с применением вычислительных машин. Блестящее открытие академика Л. С. Понтрягина и его сотрудников — принцип максимума — дает строгое математическое обоснование теории оптимального управления, отвечающей запросам новой техники. В настоящее время советские ученые принимают активное участие в разработке и применении современных методов оптимального управления.

Со времени опубликования первого издания книги в 1967 г. исследования в области управления детерминированными системами (стохастическое управление в книге не рассматривалось) далеко продвинулись вперед. Основные направления новейших исследований указаны в приложениях А и Б. В частности, важные результаты получены в теории управления системами с запаздыванием, системами, описываемыми функциональными уравнениями, а также уравнениями в частных производных. Получили развитие также приложения теории дифференциальных игр.

Все эти теоретические изыскания находят все более широкое применение в инженерной практике. С помощью быстродействующих вычислительных машин производится непосредственное автоматическое управление химическими и механическими процессами.

Не менее важной представляется роль теории управления в планировании и проектировании различных производственных предприятий.

Авторы выражают благодарность издательству «Наука» Академии наук СССР за предоставленную им возможность принять участие в подготовке русского издания. Мы благодарим также профессора Я. Н. Ройтенберга и его сотрудников за тщательный перевод и подготовку русского издания книги, в которую внесен ряд исправлений по сравнению с американским изданием. Однако каждый из авторов сознает, что вся ответственность за возможные неточности лежит на нем и его соавторе.

Миннеаполис, Миннесота,
1971.

Э. Б. Ли, Л. Маркус

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая теория оптимального управления зародилась около двадцати лет назад в качестве специального отдела теории дифференциальных уравнений. После того как были установлены принцип максимума и метод динамического программирования, появилась тенденция рассматривать теорию оптимального управления в рамках вариационного исчисления. Однако многие из основных понятий теории управления базируются на качественной теории дифференциальных уравнений, и наше изложение исходит именно из такого подхода.

За последние три или четыре года теория управления для детерминированных процессов со многими степенями свободы достигла вполне удовлетворительной стадии завершенности. Фундаментальные задачи теории управления, рассматриваемые с точки зрения теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, получили как точную математическую формулировку, так и строгое решение.

Именно в силу полноты и разработанности этой теории авторы настоящей книги полагают, что подробное изложение ее современного состояния послужит хорошей основой для дальнейших исследований в этой области. Такова и была цель написания «Основ теории оптимального управления». В нашу задачу входило систематическое изложение теории управления, достаточно полное и подробное, однако не выходящее за пределы рассмотрения детерминированных (не стохастических) систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Книга выдержана в основном в строгом математическом стиле определений, теорем и доказательств. Каждое аналитическое или геометрическое заключение базируется на предварительно обоснованных предположениях. В некоторых случаях, однако, ограниче-

ния, накладываемые на системы, например, непрерывность или ограниченность, перечисляются в начале раздела, а затем уже считаются само собой разумеющимися, что следует иметь в виду при изучении. Почти после каждого раздела следуют упражнения. Некоторые из них являются простыми задачами, иллюстрирующими материал, другие содержат уточнения и продолжения изложенного; иногда в упражнении дается какая-либо деталь доказательства (или вычислений) одной из теорем текста.

Для чтения настоящей книги необходимо знание курса теории дифференциальных уравнений и математического анализа. Естественно, что для читателя, владеющего основами теории функций и методами теории управления линейных систем, изучение книги будет значительно облегчено.

Ряд замечаний и полезных советов были высказаны доктором Шаком, доктором Гарвеем и мистером Стоуном. Некоторые разделы текста обсуждались с доктором Вильсоном и мистером Голлвитцером. Однако каждый из авторов еще раз подтверждает, что вся ответственность за возможные ошибки и неточности лежит исключительно на нем и его соавторе.

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ И ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе изложена общая теория оптимального управления для линейных и нелинейных систем и описывается применение ее основных принципов в задачах синтеза оптимальных регуляторов. Последовательное математическое развитие этих идей дается в последующих главах. Мы будем рассматривать только непрерывные детерминированные системы, хотя многие из полученных результатов применимы и для стохастических систем управления.

1.1. Примеры задач оптимального управления

Конструирование оптимальных систем управления обычно приводит к появлению нелинейных зависимостей, и поэтому существенно отличается от исследования элементарных линейных систем с обратной связью. Исследуя некоторые примеры, мы введем основные понятия и опишем методы теории оптимального управления.

Пример 1. **Управление угловой скоростью ротора.** Рассмотрим диск или ротор R, свободно вращающийся вокруг неподвижной оси, проходящей через центр тяжести диска и перпендикулярной к его плоскости. Пусть $\omega(t)$ — угловая скорость ротора в момент времени t, причем в начальный момент времени $\omega(0)=\omega_0$ и пусть требуется остановить ротор. Таким образом, задача состоит в том, чтобы осуществить управление величиной $\omega(t)$ (выходной величиной системы), приводя ее от $\omega=\omega_0$ до $\omega=0$ с помощью приложения некоторого внешнего момента $L(t)$ к оси вращения.

Уравнение движения ротора имеет вид

$$I\frac{d\omega}{dt}=L(t),$$

где I — момент инерции ротора относительно оси вращения (I — постоянная положительная величина), а $L(t)$ — момент внешних сил — есть входная величина, или управление. Математически задача состоит в выборе такого $L(t)$, совместимого с механическим смыслом задачи, чтобы выход системы $\omega(t)$, являющийся решением

указанного дифференциального уравнения с начальными условиями $\omega(0) = \omega_0$, стремился к нулю с возрастанием времени. Более того, мы хотим выбрать управление $L^*(t)$, обладающее свойством оптимальности, такое, чтобы соответствующий ему выход достигал нуля наиболее эффективным образом, например, за минимально возможное время. Такая задача управления может возникнуть, например, в случае, когда R представляет собой приводной шкив в некотором технологическом процессе, либо при управлении ракетным снарядом, где R — поперечное сечение снаряда. В первом случае управляющий момент может быть создан с помощью некоторого электромеханического устройства, во втором же случае — при помощи вспомогательных реактивных двигателей. Задача о приведении величины ω от значения $\omega = \omega_0$ к $\omega = 0$ может возникнуть также в случае, когда существует некоторая идеальная постоянная угловая скорость ротора R, так как при этом ω можно интерпретировать как величину рассогласования между действительной и идеальной угловой скоростью. Таким образом, наш пример мог бы быть рассмотрен с общих позиций задачи о приведении рассогласования к нулю. Если начальная угловая скорость ω_0 известна заранее, то управляющий сигнал удобно задавать как входной сигнал разомкнутой цепи (рис. 1.1, *а*) и искать управление $L^*(t)$, оптимальное по отношению к нашему критерию.

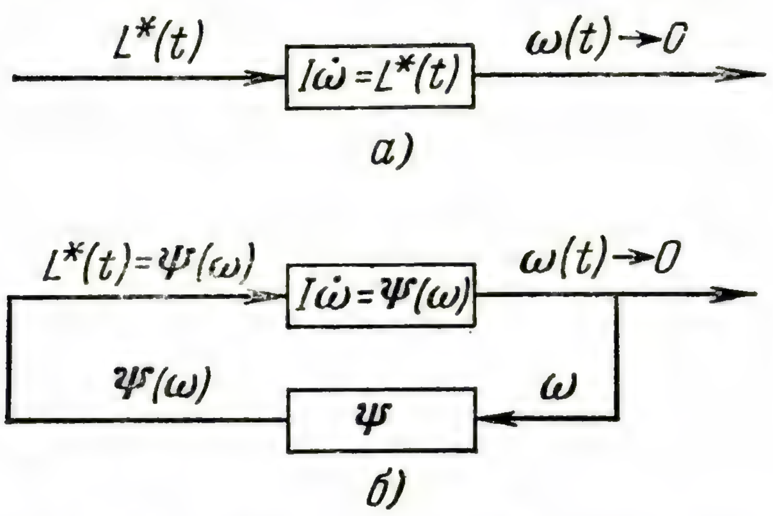

Рис. 1.1. Схема процесса управления: *а*) разомкнутая цепь, *б*) замкнутая цепь.

Если мы, однако, хотим сконструировать самокорректирующееся управляющее устройство, удовлетворительно функционирующее при всех возможных начальных значениях ω_0, а также при возмущениях $\omega(t)$, то оптимальное управление $L^*(t)$ придется синтезировать в форме соответствующего контура с обратной связью (см. рис. 1.1, *б*). А именно, мы должны вычислить некоторую функцию $\Psi(\omega)$ и использовать ее как управляющий сигнал в цепи обратной связи. Тогда решение $\omega(t)$ уравнения

$$I \frac{d\omega}{dt} = \Psi(\omega)$$

для каждого начального значения ω_0 будет оптимальным, т. е. $\omega(t)$ совпадет с оптимальным решением $\omega^*(t)$, которое появилось бы на выходе разомкнутой цепи при оптимальном управлении $L^*(t)$.

Рассмотрим линейный сигнал в цепи обратной связи вида

$$\Psi(\omega) = -k\omega,$$

где $k > 0$ — постоянный коэффициент усиления. Тогда уравнение

$$I\dot{\omega} = -k\omega, \quad \omega(0) = \omega_0$$

имеет решение

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{k}{I}t},$$

стремящееся к нулю при $t \to \infty$. Если мы хотим ускорить торможение $\omega(t)$, то нужно увеличить коэффициент усиления k; однако, каким бы большим ни был коэффициент k в этой математической модели, ротор окончательно не остановится — он только стремится к состоянию покоя. Более того, проблема выбора оптимального линейного управления с обратной связью в такой постановке не имеет решения, ибо каждое такое управление можно улучшить, увеличивая коэффициент усиления. Кроме того, задача поставлена и физически неудовлетворительно, так как в действительности существует предел увеличения коэффициента усиления в цепи обратной связи, ибо возникающие нелинейности типа насыщения сильно влияют на характеристики цепи. Для оптимального управления ротором разумно было бы потребовать, чтобы управляющий момент был заключен в некоторых границах. Для простоты обозначений положим

$$-1 \leqslant L(t) \leqslant 1.$$

Управляющий момент $L^*(t)$, который не обязан изменяться непрерывно (допускаются мгновенные переключения), должен удовлетворять ограничению $|L^*(t)| \leqslant 1$ и переводить ω из начального состояния $\omega = \omega_0$ в желаемое состояние $\omega = 0$ за минимальное возможное время. Решение для оптимального по быстродействию управления $L^*(t)$ в разомкнутой цепи очевидно из физических соображений. Если $\omega_0 > 0$, то положим

$$L^*(t) = -1.$$

Тогда

$$\omega^*(t) = \frac{I\omega_0 - t}{I}$$

при $t \leqslant T = I\omega_0$ и $\omega^*(T) = 0$. Если $\omega_0 < 0$, то положим $L^*(t) = +1$. Тогда

$$\omega^*(t) = \frac{I\omega_0 + t}{I}$$

при $t \leqslant T = -I\omega_0$ и $\omega^*(T) = 0$. Так как оптимальный выход $\omega^*(t)$ имеет постоянный знак, то легко построить синтезирующую функцию $\Psi(\omega)$ для цепи обратной связи. Положим $\Psi(\omega) = -\operatorname{sgn}\omega$, где

$$\operatorname{sgn}\omega = \begin{cases} +1 & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega = 0, \\ -1 & \text{при } \omega < 0. \end{cases}$$

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение

$$I\dot{\omega} = -\operatorname{sgn}\omega$$

для каждого начального значения ω_0 будет иметь решение, совпадающее с оптимальным выходом $\omega^*(t)$ для соответствующей разомкнутой системы.

Пример 2. **Управление механизмом, движущимся по гладким рельсам.** Рассмотрим механизм массы m, например, тележку, которая движется по горизонтальным рельсам с ничтожно малым трением. Координата x положения тележки в момент времени t определяется по закону Ньютона

$$m\ddot{x} = u(t),$$

где $u(t)$ — измеряемая в соответствующих единицах внешняя управляющая сила, приложенная к тележке. Предположим, что начальное положение и начальная скорость тележки заданы: $x = x_0$ и $\dot{x} = y = y_0$. Рассмотрим задачу остановки тележки в предписанном положении, скажем, $x = 0$, $y = 0$, за минимальное возможное время с помощью управляющей силы $u(t)$ (возможно, разрывной), удовлетворяющей ограничению

$$|u(t)| \leqslant 1.$$

Здесь решение задачи синтеза оптимального управления не очевидно, и полученный ниже результат будет неожиданным. Методы, вкратце изложенные в связи с этой задачей, составят основное содержание главы 2, где дается также строгое доказательство некоторых геометрических соотношений, используемых здесь чисто интуитивно. Изложение этого примера будет довольно пространным, ибо он иллюстрирует один из основных подходов к задаче управления.

Для удобства примем массу m равной единице, и, обозначая скорость $\dot{x} = y$, запишем уравнение движения в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t)$$

или, в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

т. е.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + bu,$$

где $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ — вектор, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ — матрицы. В этом при-

мере наиболее важные формулы будут представлены как в координатной, так и в матричной форме.

Удобно рассматривать решение

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}$$

как кривую, заданную параметрически в плоскости xy, называемой фазовой плоскостью. Таким образом, мы выбираем некоторое управление $u(t)$ с ограничением $|u(t)|\leqslant 1$, и затем исследуем соответствующее решение $x(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$. При этом наша цель заключается в перемещении механизма из состояния $\mathbf{x}_0$ в состояние $\mathbf{x}=0$ за минимальное возможное время.

Фиксируем момент времени $t_1>0$ и рассмотрим все возможные управления $u(t)$ на интервале времени $0\leqslant t\leqslant t_1$ с ограничением $|u(t)|\leqslant 1$. Каждое из этих управлений определяет соответствующее решение $\mathbf{x}(t)$, исходящее из заданной точки $\mathbf{x}_0$. Непосредственной подстановкой легко проверить, что решение определяется формулами

$$x(t)=x_0+y_0t+\int_0^t\Bigl[\int_0^s u(\sigma)\,d\sigma\Bigr]ds,$$

$$y(t)=y_0+\int_0^t u(\sigma)\,d\sigma,$$

или

$$\mathbf{x}(t)=e^{At}\mathbf{x}_0+e^{At}\int_0^t e^{-As}bu(s)\,ds.$$

Определим подмножество $K(t_1)$ на фазовой плоскости как совокупность конечных точек всех описанных выше траекторий, имеющих начало при $t=0$ в точке $\mathbf{x}_0$. Другими словами, $K(t_1)$ представляет собой множество тех точек, которые могут быть достигнуты за время t_1, если исходить из начального состояния $\mathbf{x}_0$ под действием управлений, удовлетворяющих нашим ограничениям. В рассматриваемом примере нетрудно проверить (а далее в общей теории это доказывается), что $K(t_1)$ — ограниченное замкнутое выпуклое множество, непрерывно зависящее от t_1.

Оптимальное время $t=t^*$ определяется, как первый момент времени, при котором множество $K(t)$ будет содержать точку (0, 0). Ввиду того, что $K(t)$ непрерывно зависит от t, можно доказать, что точка (0, 0) лежит на границе множества $K(t^*)$. Оптимальная траектория $\mathbf{x}^*(t)=\begin{bmatrix}x^*(t)\\ y^*(t)\end{bmatrix}$ приводит в начало координат в

момент $t=t^*$, а оптимальное управление $u^*(t), 0 \leqslant t \leqslant t^*$ — это то управление, которое порождает эту оптимальную траекторию.

Пусть $\boldsymbol{\eta}(t^*) = (\eta_1(t^*), \eta_2(t^*))$ — постоянный единичный вектор, исходящий из начала координат и направленный по внешней нормали к выпуклому множеству $K(t^*)$ (рис. 1.2). Тогда для каждой траектории $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, приводящей в точку $\mathbf{x}(t^*) \in K(t^*)$, должно выполняться условие

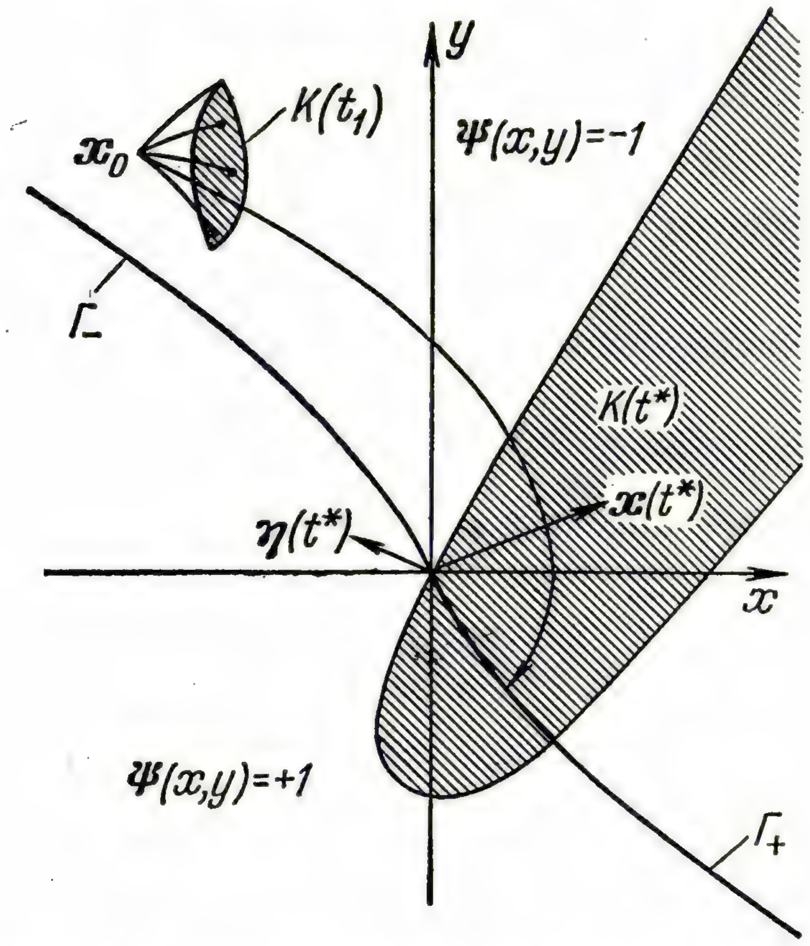

Рис. 1.2. Множество достижимости и кривая переключений для системы $\ddot{x}=u$, $|u(t)| \leqslant 1$.

$$\eta_1(t^*)\,x(t^*) + \eta_2(t^*)\,y(t^*) \leqslant 0$$

или

$$\boldsymbol{\eta}(t^*)\,\mathbf{x}(t^*) \leqslant 0,$$

т. е. вектор $\mathbf{x}(t^*)$, идущий из начала координат в точку $\mathbf{x}(t^*)$, не имеет положительной составляющей вдоль направления внешней нормали; это представляет собой аналитическое выражение того факта, что $\boldsymbol{\eta}(t^*)$ является внешней нормалью множества $K(t^*)$ в граничной точке $\mathbf{x}^*(t^*) = 0$:

$$\eta_1(t^*)\,x^*(t^*) + \eta_2(t^*)\,y^*(t^*) = \max_{(x,\,y) \in K(t^*)} (\eta_1(t^*)\,x + \eta_2(t^*)\,y),$$

или

$$\boldsymbol{\eta}(t^*)\,\mathbf{x}^*(t^*) = \max \boldsymbol{\eta}(t^*)\,\mathbf{x}(t^*).$$

В этом последнем равенстве, являющемся выражением так называемого принципа максимума, максимум берется по всем траекториям $\mathbf{x}(t)$, приводящим в точку $\mathbf{x}(t^*) \in K(t^*)$. Далее мы выведем из принципа максимума некоторые экстремальные свойства оптимального управления $u^*(t)$ и построим функцию $\Psi(x, y)$, на основании которой осуществляется синтез. Поскольку в принципе максимума участвуют оптимальное время t^* и вектор нормали $\boldsymbol{\eta}(t^*)$, заранее не известные, то мы будем применять его неявно.

Используя интегральное выражение для $\mathbf{x}(t)$, представим левую часть предыдущего соотношения в виде

$$\eta_1(t^*)\left[x_0 + y_0 t^* + \int_0^{t^*}\int_0^{s} u(\sigma)\,d\sigma\,ds\right] + \eta_2(t^*)\left[y_0 + \int_0^{t^*} u(\sigma)\,d\sigma\right].$$

Если рассматривать лишь те члены этого выражения, которые

содержат $u(t)$, то получим, что выражение

$$\eta_1(t^*)\int_0^{t^*}\int_0^s u(\sigma)\,d\sigma\,ds+\eta_2(t^*)\int_0^{t^*}u(\sigma)\,d\sigma$$

должно достигать максимума при оптимальном управлении $u^*(t)$. Учитывая тождество, которое можно проверить дифференцированием,

$$\int_0^t\int_0^s u(\sigma)\,d\sigma\,ds=\int_0^t(t-\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma,$$

и полагая $\eta_1(s)=\eta_1(t^*)$, $\eta_2(s)=\eta_1(t^*)(t^*-s)+\eta_2(t^*)$ на интервале $0\leqslant s\leqslant t^*$, получим, что управление $u^*(t)$ максимизирует интеграл

$$\int_0^{t^*}\eta_2(s)\,u(s)\,ds.$$

В матричной записи проведенные выше выкладки означают, что $u^*(t)$ максимизирует выражение

$$\boldsymbol{\eta}(t^*)\,e^{At^*}\mathbf{x}_0+\boldsymbol{\eta}(t^*)\,e^{At^*}\int_0^{t^*}e^{-As}bu(s)\,ds,$$

так что $u^*(t)$ максимизирует также второй член

$$\int_0^{t^*}\boldsymbol{\eta}(s)\,bu(s)\,ds=\int_0^{t^*}\eta_2(s)\,u(s)\,ds,$$

где

$$\boldsymbol{\eta}(t^*)\,e^{At^*}e^{-As}=\boldsymbol{\eta}(s)=(\eta_1(s),\ \eta_2(s)).$$

Учитывая условие $|u(t)|\leqslant 1$, легко понять, что максимум интеграла

$$\int_0^{t^*}\eta_2(s)\,u(s)\,ds$$

достигается при управлении

$$u^*(t)=\operatorname{sgn}\,\eta_2(t)\qquad(0\leqslant t\leqslant t^*).$$

Таким образом, оптимальное управление $u^*(t)$ является релейным управлением, т. е., оно принимает значения, равные $+1$ и -1, за исключением тех точек, где происходит переключение, а именно, нулей неизвестной функции $\eta_2(t)$.

Однако из определения $\boldsymbol{\eta}(t)$ видно, что

$$\dot{\eta}_1=0,\quad \dot{\eta}_2=-\eta_1,$$

или, в матричной записи,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\eta}(t^*) e^{At^*} e^{-At}(-A) = -\boldsymbol{\eta}(t) A.$$

Поэтому

$$\ddot{\eta}_2 = 0$$

и $\eta_2(t)$ является линейной функцией от t. Отсюда заключаем, что $\eta_2(t)$ имеет не более одного нуля. Итак, оптимальное управление $u^*(t)$ есть релейное управление со значениями $+1$ и -1 и не более, чем с одним переключением. Используя этот факт, мы можем построить функцию $\Psi(x, y)$, осуществляющую синтез в рассматриваемой задаче.

Оптимальная траектория движения, начинающаяся в точке $\mathbf{x}_0$ и идущая в начало координат, должна сначала совпадать с параболой, являющейся решением системы

$$(\mathscr{S}_-) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -1 \qquad (u \equiv -1),$$

а затем с параболой, являющейся решением системы

$$(\mathscr{S}_+) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = +1 \qquad (u \equiv +1)$$

или наоборот. Так как экстремальные системы дифференциальных уравнений $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_-$ автономны (их коэффициенты не зависят от времени), то экстремальные траектории могут быть построены следующим образом. Начиная экстремальное движение в момент $t = 0$ из начала координат, движемся по траекториям решений систем $\mathscr{S}_-$ и $\mathscr{S}_+$ в обратном направлении (попятное движение), чтобы достичь точки $\mathbf{x}_0$ в некоторый отрицательный момент $t = -t^*$. Меняя порядок отсчета времени на обратный, мы начинаем движение из $\mathbf{x}_0$ при $t = 0$ и достигаем начала координат при $t = t^*$. Таким образом, нами получено оптимальное движение $\mathbf{x}^*(t)$, оптимальное время t^* и оптимальное управление $u^*(t)$.

Построим теперь все возможные экстремальные траектории, начинающиеся из произвольных точек и приводящие в начало координат. Выберем единичный вектор $\boldsymbol{\eta}(0) = (\eta_1(0), \eta_2(0))$ и используем его в качестве начальных условий при решении системы

$$\dot{\eta}_1 = 0, \quad \dot{\eta}_2 = -\eta_1.$$

Пользуясь управлением $u(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t)$ для определения экстремальной траектории, приходящей в начало координат при $t = 0$, построим решение системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \operatorname{sgn} \eta_2(t)$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Таким образом, мы сможем построить все возможные экстремальные траектории, ведущие в начало координат при возрастании t, в том числе и на-

чинающуюся в точке $\mathbf{x}_0$. Если, например, взять $\eta_1(0)=0$, $\eta_2(0)=+1$, то $\eta_2(t)\equiv+1$ при $t\leqslant 0$, и движение происходит по траектории, удовлетворяющей системе

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=+1$$

или уравнению

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y},$$

решением которого, как известно, является парабола (см. рис. 1.3)

$$\Gamma_+ :\ 2x=y^2 \qquad (y\leqslant 0).$$

Аналогично при $\eta_1(0)=0$, $\eta_2(0)=-1$ получим движение по параболе

$$\Gamma_- :\ -2x=y^2 \qquad (y\geqslant 0).$$

Для любых других значений $\eta_1(0)$, $\eta_2(0)$ при $\eta_2(0)>0$ движение происходит по траектории Γ_+ до тех пор, пока $\eta_2(t)$ не окажется равным нулю, а затем начинается движение в обратном направлении по некоторой траектории системы $\mathcal{S}_-$. Аналогичный процесс получим при $\eta_2(0)<0$. Простое изучение семейства интегральных кривых систем $\mathcal{S}_-$ и $\mathcal{S}_+$ показывает, что для каждой заданной точки $\mathbf{x}_0$ имеется один и только один экстремальный путь, приводящий в начало координат. Это экстремальное движение и будет оптимальным. Существование оптимального движения будет доказано в дальнейшем при изложении общей теории.

Кривая, составленная из Γ_- и Γ_+, называется *линией переключения* W. В нашем примере ее уравнение таково:

$$y=W(x)=\begin{cases}-\sqrt{2x} & \text{при } x\geqslant 0,\\ +\sqrt{-2x} & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Определим синтезирующую функцию:

$$\Psi(x, y)=\begin{cases}-1, & \text{если } y>W(x) \text{ или если } (x, y)\neq(0, 0) \text{ и принадлежит } \Gamma_-,\\ 0, & \text{если } x=y=0,\\ +1 & \text{если } y=W(x) \text{ или если } (x, y)\neq(0, 0) \text{ и принадлежит } \Gamma_+.\end{cases}$$

Тогда оптимальное движение из любого начального состояния $\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$ в начало координат будет представлять собой решение уравнения

$$\ddot{x}=\Psi(x, \dot{x})$$

с начальными условиями $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=y_0$. Из геометрии фазовой плоскости следует, что, несмотря на разрывность функции

$\Psi(x, y)$ при $y=W(x)$, все решения уравнения $\ddot{x}=\Psi(x, \dot{x})$ определены корректно. Функцию $\Psi(x, y)$, осуществляющую синтез в этой задаче, можно эффективно реализовать в контуре обратной связи. На рис. 1.3 изображены оптимальные траектории системы

$$\ddot{x}=u(t), \quad |u(t)|\leqslant 1$$

при оптимальном управлении

$$u^*(t)=\Psi(x(t), \dot{x}(t)).$$

Оптимальное управление $u^*(t)$ для тележки можно интерпретировать как максимальную ускоряющую силу, которая переходит затем в максимальную тормозящую силу, обеспечивающую остановку тележки в требуемой точке $\mathbf{x}=0$. Момент времени, когда совершается переход от ускорения к торможению (или наоборот), может быть найден графически.

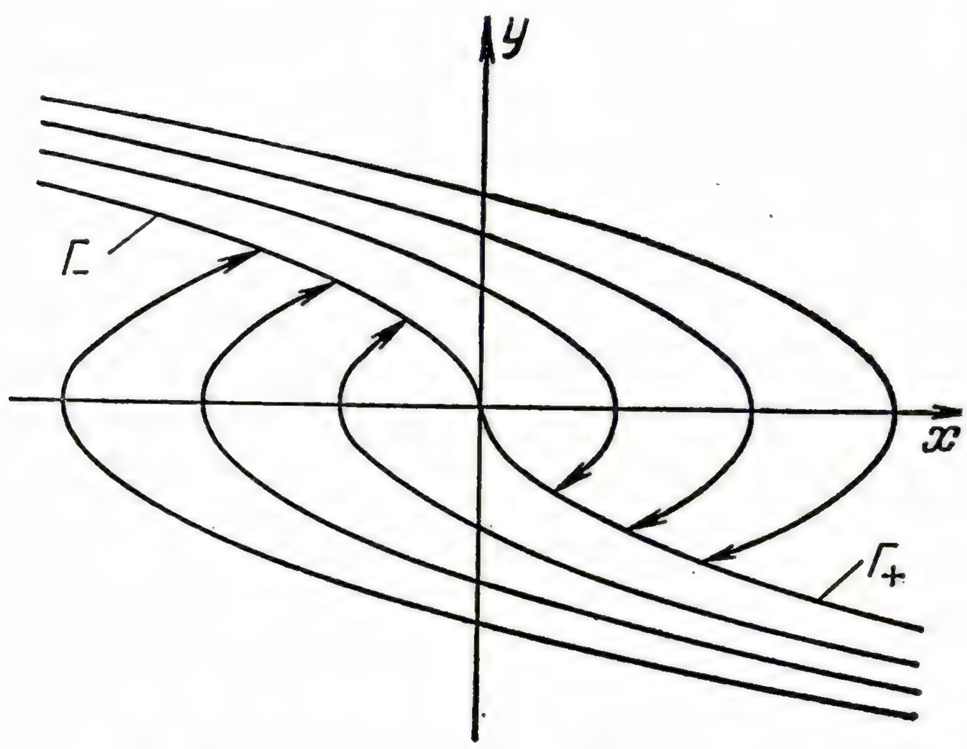

Рис. 1.3. Оптимальные по быстродействию траектории для системы $\dot{x}=y$, $\dot{y}=u(t)$, $|u(t)|\leqslant 1$.

Пример 3. **Управление гармоническим осциллятором.** Рассмотрим точку массы m, положение которой в момент времени t определяется координатой x и на которую действует восстанавливающая сила $-k^2x$, где постоянная $k^2>0$ (например, k^2 — жесткость пружины). Уравнение движения, согласно закону Ньютона имеет вид

$$m\ddot{x}+k^2x=u(t).$$

Внешняя управляющая сила предполагается ограниченной по величине, скажем,

$$|u(t)|\leqslant 1.$$

Положим для простоты, что $m=1$ и $k^2=1$. Мы вновь хотим перевести объект из начального состояния $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=y_0$ в начало координат за минимальное время. В фазовой плоскости соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-x+u(t)$$

или, в матричной записи,

$$\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+bu(t),$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя те же рассуждения относительно выпуклого множества достижимости $K(t_1)$, что и в предыдущем примере, мы придем к принципу максимума и получим формулу для оптимального управления:

$$u^*(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t),$$

где $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ — решение системы

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = -\eta_1,$$

или

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = -\boldsymbol{\eta} A.$$

Таким образом,

$$\ddot{\eta}_2 + \eta_2 = 0$$

и $\eta_2(t)$ представляет собой гармоническое колебание. Промежуток времени между двумя последовательными нулями функции $\eta_2(t)$ равен π.

Построим линию переключения W и синтезирующую функцию $\Psi(x, y)$, рассматривая всевозможные экстремальные траектории, оканчивающиеся в начале координат. Мы должны исследовать семейства фазовых траекторий экстремальных систем дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{S}_-) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - 1$$

и

$$(\mathcal{S}_+) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + 1.$$

Интегральные кривые системы $\mathcal{S}_-$ представляют собой концентрические окружности с центром в точке $x = -1$, $y = 0$, с периодом обращения фазовой точки, равным 2π. Интегральные кривые системы $\mathcal{S}_+$ — окружности с центром в точке $x = +1$, $y = 0$ и с таким же периодом обращения фазовой точки.

Если выбрать единичный вектор $\boldsymbol{\eta}(0)$ так, чтобы $\eta_1(0) = 1$, $\eta_2(0) = 0$, то $\eta_2(t) = -\sin t$ и на интервале $-\pi < t < 0$, $\operatorname{sgn} \eta_2(t) = +1$. Соответствующая экстремальная траектория совпадает с кривой, определяемой решением системы $\mathcal{S}_+$, и проходит через начало координат. Ее уравнение

$$\Gamma_+: \; x = -\cos t + 1, \quad y = \sin t \qquad (-\pi < t < 0)$$

или

$$(x-1)^2+y^2=1, \quad y<0.$$

Если $\eta_1(0)=-1$, $\eta_2(0)=0$, то $\eta_2(t)=\sin t$, и на интервале $-\pi<t<0$ имеем $\operatorname{sgn}\eta_2(t)=-1$. Соответствующая экстремальная траектория совпадает с кривой, являющейся решением системы $\mathscr{S}_-$, и проходит через начало координат. Ее уравнение

$$\Gamma_-: \ x=\cos t-1, \quad y=-\sin t \quad (-\pi<t<0)$$

или

$$(x+1)^2+y^2=1, \quad y>0.$$

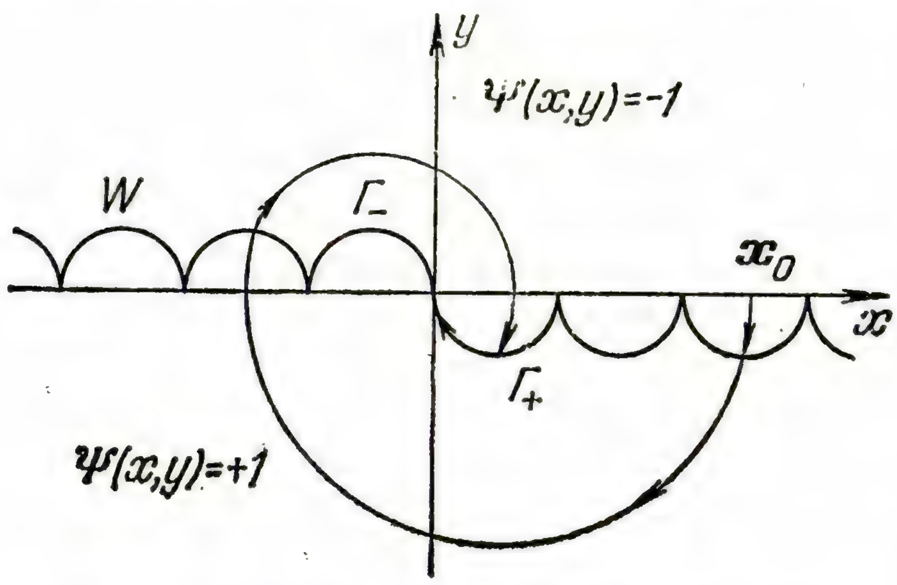

Рис. 1.4. Оптимальное по быстродействию управление, приводящее систему $\ddot{x}+x=u(t)$, $|u(t)| \leqslant 1$ в начало координат.

Если выбрать теперь $\eta(0)$ любым другим способом с тем, чтобы $\eta_2(0)$ было положительным, то в попятном движении экстремальная траектория будет идти из начала координат вдоль кривой Γ_+ до тех пор, пока $\eta_2(t)$ не станет равным нулю. В этой точке траектории экстремальное движение переключается на решение системы $\mathscr{S}_-$, по которому оно следует в течение промежутка времени π, до нового переключения на решение системы $\mathscr{S}_+$ (рис. 1.4). Аналогичный процесс протекает при начальных условиях $\eta_2(0)<0$, но здесь экстремальная траектория возвращается из начала координат вдоль кривой Γ_-.

Нетрудно в данном примере описать линию переключения, в точках которой происходит переключение между семействами решений $\mathscr{S}_-$ и $\mathscr{S}_+$.

Линия W состоит из дуг Γ_+ и Γ_- и их последовательных сдвигов в обратном направлении вдоль соответствующих решений систем $\mathscr{S}_-$ и $\mathscr{S}_+$ на промежутки времени продолжительностью π. Например, дуга Γ_+ сдвигается в обратном направлении вдоль решений системы $\mathscr{S}_-$ на промежуток времени π. Получающийся образ дуги Γ_+ затем сдвигается (снова в обратном направлении) вдоль решений системы $\mathscr{S}_+$ на промежуток времени π и так далее. Заметим, что такой сдвиг вдоль решений систем $\mathscr{S}_+$ или $\mathscr{S}_-$ на промежуток π представляет собой поворот фазовой плоскости на угол π вокруг центра $x=1$, $y=0$ или $x=-1$, $y=0$ соответственно. В результате указанных преобразований дуг Γ_+ и Γ_- возникает линия переключений W, состоящая из набора полуокружностей единичного радиуса, показанных на рис. 1.4.

Синтезирующая функция $\Psi(x, y)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ имеет вид

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{если } (x, y) \text{ лежит выше } W \text{ или на } \Gamma_-, \\ 0, & \text{если } (x, y) \text{ лежит на } W, \\ +1, & \text{если } (x, y) \text{ лежит ниже } W \text{ или на } \Gamma_+. \end{cases}$$

Оптимальные траектории управляемого гармонического осциллятора определяются решениями уравнения

$$\ddot{x} + x = \Psi(x, \dot{x})$$

для произвольного начального положения (x_0, y_0) фазовой точки. На рис. 1.4 изображены оптимальные траектории гармонического осциллятора. Качественно W можно определить на основе физического описания процесса управления, однако точный вид W и $\Psi(x, y)$ может быть получен лишь в результате теоретического исследования, аналогичного проведенному выше.

Пример 4. **Управление химической реакцией с нелинейным показателем качества.** Пусть реагент A вводится с постоянной скоростью в реактор в течение определенного интервала времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Предположим, что x есть значение величины pH, при которой протекает реакция, и которая определяет качество выходного продукта; эта величина регулируется изменением концентрации u какой-либо составляющей реагента A.

Предположим, что реакция протекает таким образом, что скорость изменения x пропорциональна сумме текущего значения и концентрации u составляющей реагента A:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta u,$$

где α и β — известные положительные постоянные. Далее предположим, что за меру изменения в выходе конечного продукта из-за вариаций pH принимается оценка

$$\int_0^T x^2 \, dt,$$

а расходы на поддержание соответствующей концентрации u пропорциональны u^2. Тогда общая сумма расходов, связанная с управлением $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, определяется выражением

$$C(u) = \int_0^T (ax^2 + u^2) \, dt,$$

где $a > 0$ — масштабный множитель. Теперь мы пришли к строгой математической формулировке задачи. При заданном начальном условии $x(0)$ требуется найти управляющую функцию $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ так, чтобы определяемая ею функция $x^*(t)$

доставляла минимум функционалу

$$C(u(t))=\int_0^T [ax^2(t)+u^2(t)]\,dt.$$

Управляющая функция не является априори ограниченной, однако из неотрицательности подынтегральной функции следует, что существует некоторое оптимальное управление $u^*(t)$. Наша задача — осуществить синтез $u^*(t)$, т. е. определить оптимальное управление как функцию состояния $x^*(t)$.

Для этой цели можно воспользоваться принципом максимума, что и будет сделано в главе 3, однако при этом возникают некоторые трудности из-за нелинейности функционала $C(u)$. Здесь же мы используем другой путь, применив теорию динамического программирования. Наши методы следуют принципу оптимальности, согласно которому из оптимальности управления $u^*(t)$ на участке $0\leqslant t\leqslant T$ следует его оптимальность на каждом подынтервале отрезка $0\leqslant t\leqslant T$. Строгое обоснование этих методов базируется на понятии выпуклого множества достижимости и во многом сходно с анализом принципа максимума, который будет дан ниже.

Пусть в некоторый момент времени t_0 на интервале $0\leqslant t\leqslant T$ химическая реакция определяется состоянием x_0. Пусть для интервала $[t_0, T]$ имеется оптимальное управление $u^*(t)$, дающее минимальные затраты $V(x_0, t_0)=C(u^*)$. Для того чтобы дальнейшие рассмотрения были справедливы, будем считать функцию $V(x, t)$ достаточно гладкой. Для каждого управления $u(t)$ на $[t_0, T]$ с соответствующим выходом $x_u(t)$ при начальном условии x_0 величина затрат равняется

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} [ax_u^2(t)+u^2(t)]\,dt+\int_{t_0+\delta}^{T} [ax_u^2(t)+u^2(t)]\,dt,$$

где $\delta>0$ — сколь угодно малое число. Выбирая $u(t)$ так, чтобы оно оптимизировало наш функционал на интервале $[t_0+\delta, T]$, получим значение затрат:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} [ax_u^2(t)+u^2(t)]\,dt+V(x_u(t_0+\delta),\ t_0+\delta).$$

Но минимальное значение затрат при начальном значении x_0 в момент времени t_0 не превосходит этой величины, поэтому имеем

$$V(x_0, t_0)=\min_{u(t)}\left\{\int_{t_0}^{t_0+\delta} [ax_u^2(t)+u^2(t)]\,dt+V(x_0(t_0+\delta),\ t_0+\delta)\right\},$$

где минимум берется по всем управлениям $u(t)$ на $[t_0, T]$. Это

уравнение иллюстрирует основную идею динамического программирования, заключающуюся в том, что программа оптимального управления разбивается на сумму двух программ, действующих на интервалах $[t_0,\ t_0+\delta]$ и $[t_0+\delta,\ T]$ соответственно. Возможность изменения δ определяет динамику задачи.

Используя разложение $V(x_0, t_0)$ в ряд Тейлора по δ, получим

$$V(x_0,\ t_0)=\min_{u(t)}\left\{\delta\left[ax_0^2+u^2(t_0)\right]+V(x_0,\ t_0)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x_0,\ t_0)\frac{\partial x_u}{\partial t}(t_0)+\frac{\partial V}{\partial t}(x_0,\ t_0)\right]\delta+o(\delta)\right\},$$

где $o(\delta)$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем δ. Учитывая, что

$$\frac{dx_u}{dt}(t_0)=\alpha x_0+\beta u(t_0)$$

и устремляя δ к нулю, получаем соотношение

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,\ t)=\min_u\left\{ax^2+u^2+\frac{\partial V}{\partial x}(x,\ t)(\alpha x+\beta u)\right\},$$

где начальную точку $(x_0,\ t_0)$ мы обозначаем $(x,\ t)$. Здесь минимум вещественной функции

$$h(u)=ax^2+u^2+\frac{\partial V}{\partial x}(\alpha x+\beta u)$$

вычисляется при фиксированных значениях $(x,\ t)$. Полагая

$$\frac{\partial h}{\partial u}=2u+\beta\frac{\partial V}{\partial x}=0,$$

находим, что минимум достигается при

$$u=-\frac{\beta}{2}\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Таким образом, $V(x,\ t)$ есть решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=ax^2-\frac{\beta^2}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\alpha x\frac{\partial V}{\partial x}$$

при условии $V(x,\ T)=0$. Это дифференциальное уравнение для минимальных затрат $V(x,\ t)$ и является основным результатом приложения метода динамического программирования к решению рассматриваемой задачи. Поскольку $V(x,\ t)$ задана при $t=T$ и из производных по времени в уравнение входит лишь $\partial V/\partial t$, то существует единственное решение $V(x,\ t)$. Попробуем найти его в виде

$$V(x,\ t)=c(t)\,x^2,$$

где $c(t)$ — неизвестная функция. Подставляя это выражение в уравнение для V, получим, что функция $c(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{dc}{dt} = \beta^2 c^2 - 2\alpha c - a$$

при условии $c(T) = 0$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вместе с условием $c(T) = 0$ однозначно определяет функцию $c(t)$ и, следовательно, функцию затрат

$$V(x, t) = c(t)\, x^2.$$

Чтобы получить выражение $c(t)$ в элементарных функциях применим подстановку

$$\zeta(t) = e^{-\beta^2 \int\limits_0^t c(t)\,dt},$$

или

$$\frac{\dot{\zeta}}{\zeta} = -\beta^2 c.$$

Тогда получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\zeta} + 2\alpha\dot{\zeta} - a\beta^2\zeta = 0$$

при условии $\dot{\zeta}(T) = 0$. Можно принять также $\zeta(T) = 1$, так как нас интересует лишь отношение $\dot{\zeta}/\zeta$. Решение имеет вид

$$\zeta(t) = e^{-\alpha(t-T)}\Big[\operatorname{ch}\sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta^2}\,(t-T) + \\ + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\alpha\beta^2}} \operatorname{sh}\sqrt{\alpha^2+\alpha\beta^2}\,(t-T)\Big].$$

Отсюда получим $c(t) = -\dot{\zeta}/\zeta\beta^2$ и функция $V(x, t) = c(t)\,x^2$ вычисляется в явном виде.

Рассмотрим теперь оптимальное управление $u^*(t)$ на отрезке времени $[0, T]$ с оптимальным выходом $x^*(t)$ при заданном начальном значении $x(0)$. Управляющая функция должна минимизировать величину

$$V(x^*(t), t) = \int\limits_t^{t+\delta} [ax^*(s)^2 + u^*(s)^2]\,ds + V(x^*(t+\delta),\ t+\delta)$$

для всех t из $[0, T]$. Проводя те же рассуждения, что и раньше, получим соотношение

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x^*(t), t) = ax^*(t)^2 + u^*(t)^2 + \frac{\partial V}{\partial x}(x^*(t), t)(\alpha x^*(t) + \beta u^*(t)).$$

Таким образом, для фиксированного значения t функция $u^*(t)$ должна принимать значение u, которое минимизирует величину

$$h(u)=ax^*(t)^2+u^2+\frac{\partial V}{\partial x}(x^*(t),\, t)(\alpha x^*(t)+\beta u),$$

т. е.

$$u^*(t)=-\frac{\beta}{2}\frac{\partial V}{\partial x}(x^*(t),\, t)=-\frac{\beta}{2}[2c(t)\,x^*(t)],$$

или

$$u^*(t)=-\beta c(t)\,x^*(t).$$

Это равенство определяет оптимальное управление. Таким образом, для синтеза оптимального управления $u^*(t)$ применяется цепь с обратной связью

$$u=-\beta c(t)\,x,$$

которая представляет собой линейную управляющую систему с переменным коэффициентом усиления $c(t)$. Это и есть обещанное решение задачи; его нетрудно реализовать (рис. 1.5).

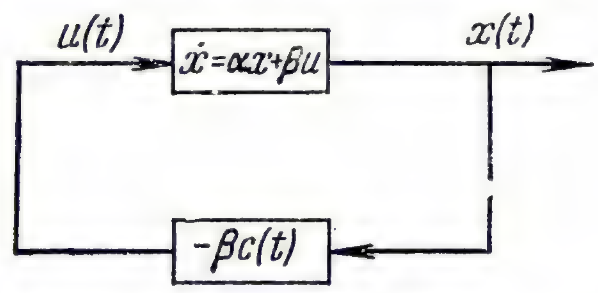

Рис. 1.5. Схема синтеза оптимального управления: $u(t)=-\beta c(t)\,x$.

Как будет показано в главе 3, существует целый класс задач, которые могут быть решены рассмотренным методом, а именно, задачи, в которых показатель качества является квадратичной функцией от выхода x и управления u, а основной процесс является линейным.

Пример 5. **Классический вариационный подход.** В этом примере мы рассмотрим задачу оптимального управления с точки зрения классического вариационного исчисления. Поскольку зависимость выходного сигнала системы $x(t)$ от управления $u(t)$ определяется при помощи дифференциальных уравнений динамической системы, то наша вариационная задача сводится к достаточно сложной задаче Майера—Больца. Мы рассматриваем здесь эту задачу, не останавливаясь на вопросах непрерывности и дифференцируемости, и используем классические обозначения вариационного исчисления.

Рассмотрим процесс управления в пространстве R^n, т. е. будем считать x вещественным n-мерным вектором, подчиненным уравнению

$$(\mathscr{S})\qquad \dot{x}=f(x,\, u),\quad x(0)=x_0$$

с управлениями $u(t)\subset R^m$ при $0\leqslant t\leqslant 1$. Для каждого управления $u(t)$ существует соответствующий выходной сигнал $x(t)$, причем $x(0)$ совпадает с заданным начальным значением x_0. Пусть

также задан показатель качества

$$C(u) = \int_0^1 h(x, u)\,dt.$$

На $u(t)$ и $x(1)$ не наложены никакие ограничения. Пусть $u^*(t)$ — оптимальное управление, минимизирующее $C(u)$, а $x^*(t)$ — соответствующий оптимальный выходной сигнал. (Векторные и матричные обозначения, используемые ниже, объяснены в приложении.)

Пусть

$$u(t, \varepsilon) = u^*(t) + \varepsilon\,\delta u(t)$$

— однопараметрическое семейство управлений, полученных возмущением $\varepsilon\,\delta u(t)$ оптимального управления $u^*(t)$; каждому из них соответствует выходной сигнал

$$x(t, \varepsilon) = x^*(t) + \varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon), \quad \delta x(0) = 0.$$

Заметим, что

$$u(t, 0) = u^*(t), \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(t, 0) = \delta u(t),$$

$$x(t, 0) = x^*(t), \quad \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t, 0) = \delta x(t).$$

Рассмотрим вариацию показателя качества:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \delta C = \int_0^1 \left[\frac{\partial h(t)}{\partial x}\,\delta x(t) + \frac{\partial h(t)}{\partial u}\,\delta u(t)\right] dt.$$

Здесь $\frac{\partial h(t)}{\partial x}$ обозначает $\frac{\partial h(t)}{\partial x}(x^*(t), u^*(t))$. Все другие аналогичные функции также вычисляются при $x = x^*(t)$, $u = u^*(t)$. Так как минимум $C(u(\cdot, \varepsilon))$ достигается при $\varepsilon = 0$, то должно выполняться условие

$$\delta C \equiv 0$$

для всевозможных вариаций $\delta u(t)$. Расшифруем это необходимое условие оптимального управления.

Вариация $\delta u(t)$ приводит к вариации $\delta x(t)$, удовлетворяющей следующему дифференциальному уравнению в вариациях:

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial f(t)}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f(t)}{\partial u}\,\delta u, \quad \delta x(0) = 0.$$

Отсюда

$$\delta x(t) = \int_0^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,\frac{\partial f(s)}{\partial u}\,\delta u(s)\,ds,$$

где фундаментальная матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial f(t)}{\partial x}\Phi \quad \text{и} \quad \Phi(0)=I.$$

Поэтому

$$\delta C=\int_0^1\left[\frac{\partial h(t)}{\partial x}\int_0^t\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\frac{\partial f(s)}{\partial u}\delta u(s)\,ds+\frac{\partial h(t)}{\partial u}\delta u(t)\right]dt.$$

Для упрощения записи введем векторную функцию

$$\eta^*(t)=-\eta_0\Phi^{-1}(t)+\int_0^t\frac{\partial h(s)}{\partial x}\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\,ds,$$

где постоянный вектор η_0 выбран так, чтобы

$$\eta^*(1)=-\eta_0\Phi^{-1}(1)+\int_0^1\frac{\partial h(s)}{\partial x}\Phi(s)\Phi^{-1}(1)\,ds=0.$$

Это означает, что $\eta^*(t)$ является единственным решением сопряженного дифференциального уравнения

$$\dot{\eta}=-\eta\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \eta(1)=0.$$

Далее, введем функцию Гамильтона, зависящую от $2n+m$ действительных переменных:

$$H(\eta,\ x,\ u)=\eta f(x,\ u)-h(x,\ u).$$

Тогда уравнения для x и η могут быть записаны в виде

$$\dot{\eta}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \eta(1)=0$$

и

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad x(0)=x_0;$$

они удовлетворяются при $\eta=\eta^*(t)$, $x=x^*(t)$, $u=u^*(t)$.

Применим теперь введенные нами обозначения для выяснения смысла необходимого условия $\delta C\equiv 0$. Прежде всего интегрированием по частям легко проверить, что

$$\int_0^1\frac{\partial h(t)}{\partial x}\Phi(t)\left(\int_0^t\Phi^{-1}(s)\frac{\partial f(s)}{\partial u}\delta u(s)\,ds\right)dt=$$

$$=\left(\int_0^1\frac{\partial h(t)}{\partial x}\Phi(t)\,dt\right)\left(\int_0^1\Phi^{-1}(s)\frac{\partial f(s)}{\partial u}\delta u(s)\,ds\right)-$$

$$-\int_0^1\left(\int_0^t\frac{\partial h(s)}{\partial x}\Phi(s)\,ds\right)\Phi^{-1}(t)\frac{\partial f(t)}{\partial u}\delta u(t)\,dt.$$

Используя это равенство, представим величину δC в виде

$$\delta C = \left(\int_0^1 \frac{\partial h(t)}{\partial x} \Phi(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 \Phi^{-1}(s) \frac{\partial f(s)}{\partial u} \delta u(s) ds\right) - \\ - \int_0^1 \left[\left(\int_0^t \frac{\partial h(s)}{\partial x} \Phi(s)\, ds\right) \Phi^{-1}(t) \frac{\partial f(t)}{\partial u} - \frac{\partial h(t)}{\partial u}\right] \delta u(t)\, dt.$$

Но отсюда следует, что

$$\delta C = \int_0^1 \left[(\eta^*(1)\Phi(1) + \eta_0)\Phi^{-1}(t) \frac{\partial f(t)}{\partial u} - \right. \\ \left. - \int_0^t \left(\frac{\partial h(s)}{\partial x} \Phi(s)\Phi^{-1}(t)\, ds\right) \frac{\partial f(t)}{\partial u} + \frac{\partial h(t)}{\partial u}\right] \delta u\, dt,$$

или

$$\delta C = \int_0^1 \left[-\eta^* \frac{\partial f(t)}{\partial u} + \frac{\partial h(t)}{\partial u}\right] \delta u(t)\, dt.$$

В силу того, что

$$\delta C \equiv 0$$

для всевозможных вариаций $\delta u(t)$ оптимального управления $u^*(t)$, находим, что

$$-\eta^*(t) \frac{\partial f(t)}{\partial u} + \frac{\partial h(t)}{\partial u} = 0$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\eta^*(t),\ x^*(t),\ u^*(t)) \equiv 0.$$

Более детальное исследование вариаций оптимального управления $u^*(t)$ показывает, что $u = u^*(t)$ не просто критическая точка функции $H(\eta^*(t),\ x^*(t),\ u)$, а именно максимум. Таким образом,

$$H(\eta^*(t),\ x^*(t),\ u^*(t)) = \max_{u \in R^m} H(\eta^*(t),\ x^*(t),\ u).$$

Это и есть принцип максимума, играющий столь важную роль в теории оптимального управления. Система уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

является системой уравнений Эйлера — Лагранжа рассматриваемой вариационной задачи (в гамильтоновой форме). В классической литературе, где отсутствуют ограничения на управление, эти условия обычно называются *необходимыми условиями Вейерштрасса*

для экстремалей. Для пояснения рассмотрим случай, когда процесс описывается скалярным уравнением

$$\dot{x}=u, \quad x(0)=x_0, \quad x(T)=x,$$

а показатель качества — функционалом

$$C(u)=\int_0^T h(x, u)\,dt=\int_0^T h(x, \dot{x})\,dt.$$

Здесь функцией Лагранжа является $h(x, \dot{x})$ и необходимое условие Лагранжа для минимизирующей гладкой кривой $x^*(t)$ есть

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial h}{\partial x}=0.$$

Полагая $H=\eta u-h$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\eta-\frac{\partial H}{\partial u}\right]+\frac{\partial H}{\partial x}=0.$$

Так как $\frac{\partial H}{\partial u}=0$, то

$$\dot{\eta}=-\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Функции $\eta^*(t)$ называются множителями Лагранжа вариационной задачи (в классических трудах обычно их обозначают через $\lambda(t)$). Функция Гамильтона $H(\eta, x, u)$ часто берется с противоположным знаком, но мы предпочитаем принятые здесь обозначения, так как они чаще употребляются в современной литературе по оптимальному управлению.

Если управление $u(t)$ ограничено по величине, или задана концевая точка $x(1)$, то вариационный метод исследования усложняется как в теоретическом, так и в вычислительном аспектах. По этой причине мы откажемся от классического вариационного подхода и будем опираться на геометрические соображения, безукоризненные, впрочем, с точки зрения математической строгости.

Упражнения

1. Рассмотрите управляемый процесс, описываемый уравнением $\dot{x}+bx=u$ с ограничением $|u(t)|\leqslant 1$. Здесь b — действительная постоянная. Проверьте, что решение $x(t)$, $x(0)=x_0$, соответствующее управлению $u(t)$, имеет вид

$$x(t)=e^{-bt}x_0+e^{-bt}\int_0^t e^{-bs}u(s)\,ds.$$

a) Покажите, что при $b\geqslant 0$ можно из каждой начальной точки x_0 достигнуть начала координат $x_1=0$.

b) При $b<0$ определите множество начальных точек, из которых можно достигнуть начала координат.

2. Рассмотрите управляемый процесс

$$\dot{x}+bx=u,$$

где b—действительная постоянная, а $|u(t)|\leqslant 1$. Пусть x_0—начальное состояние, из которого можно перейти в состояние $x_1=0$. Покажите, что оптимальное по быстродействию управление имеет вид

$$u^*=-\operatorname{sgn} x.$$

Вычислите минимальное время t^* в зависимости от x_0 и b.

3. Рассмотрите управляемый процесс

$$\ddot{x}+2b\dot{x}=u,$$

где b—действительная постоянная, отличная от нуля и $|u(t)|\leqslant 1$. Покажите, что замена переменных $x=z/b^2$ и $t=\tau/|b|$ сводит общую задачу к одному из двух случаев $2b=+1$ и $2b=-1$. Покажите, что оптимальным по быстродействию управлением, переводящим (x_0, y_0) в $(0, 0)$, будет $u^*(t)=\operatorname{sgn}\eta_2(t)$, где $\eta_2(t)$ имеет не больше одного нуля. Постройте кривую переключения и опишите оптимальное управление и оптимальное решение с помощью этой кривой и с помощью экстремальных систем, для которых $u(t)=+1$ и $u(t)=-1$. При этом нужно установить различие между случаями, когда $2b=+1$ и $2b=-1$.

4. Рассмотрите управляемый процесс

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=u,$$

где b и k^2—действительные постоянные, а $|u(t)|\leqslant c\ (c>0)$. Покажите, что с помощью соответствующей замены переменных эту задачу можно свести к случаю $k^2=1$, $c=1$.

5. За какое кратчайшее время пассажир может приехать из Нью-Йорка в Лос-Анжелес? Предполагается, что в его распоряжении имеется летательный аппарат с наилучшими механическими и термодинамическими свойствами, но максимальное ускорение не должно превышать 30 *м/сек*^{2}. (Летательный аппарат стартует в Нью-Йорке и приземляется в Лос-Анжелесе. Путь считается прямолинейным длиной 3640 *км*. Влияние вращения и кривизны Земли можно не учитывать.)

6. Рассмотрите управляемый процесс

$$\ddot{x}+x=u$$

при условии $|u(t)|\leqslant 1$. Пусть начальное состояние (x_0, y_0) лежит выше кривой переключения $y=W(x)$ управления, оптимального по быстродействию и приводящего x в начало координат. Пусть l—целое положительное число, такое, что

$$2l-1<\left[(x_0+1)^2+y_0^2\right]^{1/2}<2l+1.$$

Покажите, что оптимальное управление имеет в точности l переключений. Сформулируйте соответствующее утверждение для случая $y_0<W(x_0)$.

7. Рассмотрите систему

$$\dot{x}=\alpha x+\beta u,$$

аналогичную рассмотренной в примере 4. Однако показатель качества пусть будет несколько иным, а именно:

$$C(u)=\int_0^T(\alpha x^2+e^u)\,dt.$$

Используя метод динамического программирования, получите дифференциальное уравнение в частных производных для функции $V(x, t)$.

1.2. Постановка общей задачи оптимального управления

Наиболее общая из рассматриваемых здесь задач оптимального управления включает в себя следующие исходные данные: (1) описание объекта управления, (2) начальное состояние физической системы и цель управления, (3) класс допустимых управлений, (4) показатель или критерий качества — функционал, который дает количественную оценку эффективности управления.

Прежде чем обратиться к точной формулировке задачи, обсудим подробно каждый из этих факторов.

1. Объект управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{S}) \quad \dot{x}^i = f^i(t,\ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ u^1,\ \ldots,\ u^m), \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

связывающей вектор $x(t)$, характеризующий состояние объекта, с входным сигналом, или управлением, $u(t)$. Для краткости систему уравнений $\mathcal{S}$, описывающую объект управления, мы иногда будем называть процессом управления. Часто вектор $x(t)$ называют выходным сигналом, однако ниже мы определим выходной сигнал как функцию от x, удовлетворяющую некоторому условию наблюдаемости. В зависимости от вида системы $\mathcal{S}$ процесс будет автономным, линейным, n-го порядка и т. п. (см. приложения к этой главе).

Различные нелинейные зависимости могут наблюдаться даже в простейших физических процессах вследствие нелинейного трения, нелинейного усиления, насыщения. Но даже и в линейных системах при синтезе оптимальных управлений мы будем умышленно вводить нелинейную обратную связь, например, типа релейного управления. Более того, многие физические системы содержат существенные нелинейности, которыми нельзя пренебречь и с которыми не удается справиться при помощи линейной аппроксимации или применяя метод возмущений. (Рассмотренные ниже два примера описывают подобные существенно нелинейные системы.) В силу этого мы мало пользуемся классическим аппаратом линейной теории управления, например, интегральными преобразованиями и передаточными функциями.

Смысл каждой задачи оптимального управления — синтезировать управление с помощью соответствующим образом построенной цепи обратной связи. Преимущества такого замкнутого контура по сравнению с разомкнутой цепью управления заключаются в том, что процесс становится самонастраивающимся и самокорректирующимся. Управление с обратной связью дает возможность уменьшить влияние непредсказуемых изменений внешней среды на объект и влияние возмущений или неточности описания самого процесса.

Пример 1. Рассмотрим демпфированный нелинейный осциллятор с одной степенью свободы $x(t)$ и с управлением $u(t)$, описываемый дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}+f(x, \dot{x})\dot{x}+g(x)=u(t);$$

коэффициент трения $f(x, \dot{x}) \in C^1(R^2)$, упругая восстанавливающая сила $g(x) \in C^1(R^1)$, управляющая сила $u(t)$ ограничена и измерима на $0 \leqslant t < \infty$. Из физической природы системы естественны предположения

$$f(x, y) \geqslant 0, \quad xg(x) \geqslant 0, \quad |u(t)| \leqslant B \text{ для некоторой постоянной } B > 0.$$

Покажем сначала, что решение $S(t)=(x(t), y(t))$ системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-g(x)-f(x, y)y+u(t)$$

с начальными условиями $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ определено в фазовой плоскости R^2 для всех $0 \leqslant t < \infty$.

Действительно, если бы $S(t)$ было определено лишь на некотором наибольшем промежутке времени $0 \leqslant t < \tau_+ < \infty$, то функция $r^2(t)=x^2(t)+y^2(t)$ при $t \to \tau_+$ должна была бы принимать сколь угодно большие значения[1]). Докажем, что это не так. Введем функцию, определяющую энергию системы:

$$V(x, y)=\frac{y^2}{2}+\int_0^x g(s)\,ds.$$

Заметим, что $V(x, y) \geqslant 0$ на R^2 и $V=0$ лишь на том отрезке оси x, содержащем начало координат, где $g(x)=0$. Положим $V(t)=V(x(t), y(t))$. Тогда

$$\frac{dV}{dt}=y\dot{y}+g(x)\dot{x}=-f(x, y)y^2+yu(t).$$

Далее, в силу элементарных неравенств

$$\frac{dV}{dt} \leqslant B|y| \leqslant B\left(\frac{y^2}{2}+1\right)$$

и

$$\frac{d}{dt}[V(t)+1] \leqslant B[V(t)+1].$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$V(t)+1 \leqslant [V(0)+1]e^{Bt};$$

[1]) В противном случае решение $S(t)$ можно было бы в силу теоремы о существовании решения продолжить на более широкий интервал. (*Прим. ред.*)

следовательно,

$$V(t) \leqslant [V(0)+1]\, e^{B\tau_+}$$

на $0 \leqslant t < \tau_+$. Так как $G(x) = \int_0^x g(s)\, ds \geqslant 0$, то

$$y^2 \leqslant 2[V(0)+1]\, e^{B\tau_+} = C^2,$$

т. е.

$$|y(t)| \leqslant C \quad \text{для некоторой постоянной } C.$$

Так как

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(s)\, ds,$$

то

$$|x(t)| \leqslant x_0 + C\tau_+.$$

Но отсюда следует, что функция $V(t)$ ограничена на конечном интервале $0 \leqslant t < \tau_+$. Поэтому решение $S(t)$ определено при $0 \leqslant t < +\infty$.

Мы покажем теперь, что для каждого начального состояния $(x_0, y_0) \in R^2$ при $t = 0$ можно выбрать такое управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению $|u(t)| \leqslant B$, что соответствующее решение, начинаясь из точки (x_0, y_0), приходит в произвольно выбранную окрестность начала координат. В следующем разделе этой главы будет обсуждаться вопрос о возможности приведения фазовой точки точно в начало координат за конечное время.

Для любой постоянной $V_0 \geqslant 0$ рассмотрим в фазовой плоскости кривую

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x) = V_0.$$

Эта кривая имеет две ветви

$$y = \pm\sqrt{2(V_0 - G(x))}$$

с общей точкой при $G(x) = V_0$. Таким образом, эта кривая может состоять из двух отдельных ветвей; она может представлять собой замкнутую кривую, обходящую начало координат, или возможно кривую вида $\supset$ или $\subset$ в фазовой плоскости.

Рассмотрим свободный осциллятор, т. е. положим $u(t) \equiv 0$, и заметим, что поскольку $\dot{x} = y$, то решение $x(t)$ будет возрастающим при $y > 0$ и убывающим при $y < 0$. Кроме того, поскольку на оси Ox $\dot{y} = -g(x)$, то $\dot{y}$ будет неотрицательным при $x \leqslant 0$, $y = 0$ и неположительным при $x \geqslant 0$, $y = 0$. Возьмем теперь малый диск D с центром в начале координат и докажем, что решение

$S(t) = (x(t), y(t))$ может быть приведено в D за конечное время с помощью подходящего управления (см. рис. 1.6). Мы рассматриваем тот случай, когда $g(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, т. е. когда начало координат является единственной особой точкой. Если имеется более чем одна особая точка, то малым управлением $u(t)$ можно предотвратить остановку системы во всех других особых точках, кроме начала координат.

Сначала рассмотрим случай, когда точка (x_0, y_0) лежит во втором квадранте; $x_0 < 0$, $y_0 > 0$. Положим $u(t) = 0$ и будем следовать вдоль траектории $S(t)$ до тех пор, пока не попадем либо в диск D, либо в первый квадрант. Одна из этих возможностей должна осуществиться, так как $x(t)$ возрастает при $y > 0$, а траектория $S(t)$ не может достичь отрицательной полуоси x [где $\dot{y} = -g(x) > 0$] и не может уйти в бесконечность, ибо она должна лежать в области

$$V(x, y) \leqslant V(x_0, y_0), \quad \text{поскольку} \quad \dot{V} = -f(x, y)\, y^2 \leqslant 0.$$

Если точка (x_0, y_0) лежит в первом квадранте или траектория $S(t)$ попадает в первый квадрант при возрастании t, то полагаем $u(t) = -B < 0$. Тогда $\dot{y} \leqslant -B$ и траектория $S(t)$ должна пересечь положительную полуось x и попасть в четвертый квадрант. В четвертом квадранте мы положим $u(t) = 0$ и тогда траектория $S(t)$ попадет либо в D либо в третий квадрант. В третьем квадранте положим $u(t) = B$.

Таким образом, с помощью описанного выше управления мы заставляем траекторию $S(t)$ закручиваться по спирали (по часовой стрелке) вокруг начала координат. Поскольку

$$\dot{V} = -f(x, y)\, y^2 + yu(t) \leqslant 0$$

(и $\dot{V} < 0$ при $y \neq 0$), то нетрудно видеть, что

$$\lim_{t \to +\infty} V(t) = 0.$$

Однако область $V(x, y) < \varepsilon$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ пересекается с D так, что спираль $S(t)$ непременно войдет в D. Следовательно, фазовая точка может быть приведена в произвольную малую окрестность начала координат.

П р и м е р 2. Рассмотрим твердое тело, например, космический корабль, вращающийся в инерциальном пространстве вокруг своего центра тяжести с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$ под действием управляющего момента $\mathbf{u}(t)$. Пусть ω_1, ω_2, ω_3 — проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ на оси координат, совпадающие с главными осями инерции тела B. Тогда уравнения Эйлера движения твердого тела в фазовом пространстве R^3 переменных $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имеют такой

вид:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 + u_1(t),$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 + u_2(t),$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 + u_3(t).$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции твердого тела относительно соответствующих осей, а u_1, u_2, u_3 — проекции $\mathbf{u}(t)$ на те же оси. Предположим, что управляющий момент создается находящимися на корабле реактивными двигателями, максимальная тяга которых не зависит от характера движения корабля B, т. е.

$$|u_i(t)| \leqslant 1, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Наша цель — регулировать вектор угловой скорости $\omega(t)$ так, чтобы он приближался к нулю. В следующем разделе мы рассмотрим вопрос о существовании управления $\mathbf{u}(t)$, приводящего $\boldsymbol{\omega}(t)$ в точности к нулю за конечное время.

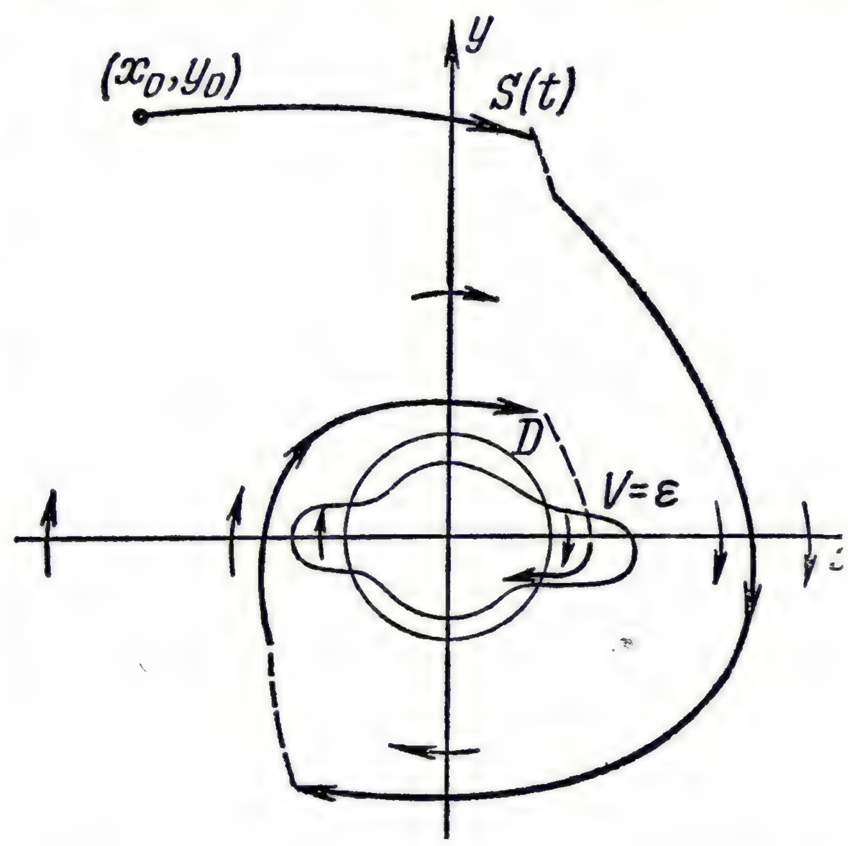

Рис. 1.6. Управляемость нелинейной системы $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = u(t)$.

Определим кинетическую энергию системы

$$E = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

и вычислим производную $\dot{E}$ вдоль любого решения $\boldsymbol{\omega}(t)$:

$$\dot{E} = I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + \omega_3 u_3.$$

Положим $u_i = -\frac{1}{2}\alpha I_i\omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$; если α — достаточно малая положительная постоянная, то $|u_i| \leqslant 1$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ вдоль всей траектории $\omega(t)$, соответствующей управлению $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Кроме того, при выбранном управлении $\dot{E} = -\alpha E$, так что с возрастанием t величина E экспоненциально убывает. Поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty} \boldsymbol{\omega}(t) = 0$ и в сколь угодно малую окрестность начала координат можно попасть за конечное время.

2. *Начальная точка или состояние* x_0 — это заданный в фазовом пространстве вектор. В реальном физическом процессе компоненты вектора x_0 и вектора $x(t)$ могут представлять собой положение, скорости, угловые скорости, температуру и другие параметры, измеряемые и регистрируемые соответствующими приборами (см. обсуждение вопроса о наблюдаемости в гл. 2 и 6).

В задаче управления заранее определяется также и *цель управления*, которая состоит в приведении объекта в заданное состояние x_1 или, в более общем случае, в заданное множество конечных состояний G, называемое *целевым множеством*.

Иногда целевое множество будет представлять собой непрерывно зависящее от t $(\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1)$ компактное множество $G(t)$[1]. Это означает, что для каждого момента времени t из данного интервала задается непустое компактное множество $G(t)$ в фазовом пространстве R^n. Непрерывность $G(t)$ как функции действительной переменной t определяется с помощью понятия расстояния между $G(t)$ и $G(t')$, вводимого следующим образом:

$$\operatorname{dist}(G(t),\ G(t')) = \max\left[\max_{P \in G(t)} \operatorname{dist}(P,\ G(t')),\ \max_{P' \in G(t')} \operatorname{dist}(P',\ G(t))\right].$$

Таким образом, для любого t и заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\operatorname{dist}(G(t), G(t')) < \varepsilon$, как только $|t'-t| < \delta$. Если $G(t)$ есть точка, непрерывно движущаяся по гладкой кривой $\xi(t)$ в R^n, то часто приходится рассматривать ошибку, или отклонение $x(t)$ от желаемого положения:

$$e(t) = x(t) - \xi(t).$$

Здесь под $x(t)$ понимается выходной сигнал управляемого процесса

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(t,\ x,\ u),$$

а процесс управления величиной $e(t)$ описывается уравнением

$$\dot{e} = f(t,\ e + \xi(t),\ u) - \dot{\xi}(t) = \tilde{f}(t,\ e,\ u).$$

В такой интерпретации целью управления является сведéние ошибки $e(t)$ к нулю.

3. *Класс Δ допустимых управлений* обычно состоит из измеримых функций $u(t)$ на различных интервалах времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, причем каждое из этих управлений переводит объект из начальной точки x_0 в одну из точек заданного целевого множества $G(t)$, т. е. решение $x(t)$ уравнения

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(t,\ x,\ u), \quad x(t_0) = x_0$$

должно удовлетворять условию $x(t_1) \in G(t_1)$.

Предположим, что S автономная система, и точка x_0 переводится в точку x_1 управлением $u_1(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Если управление $u_2(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ переводит точку x_1 в

---

[1]) Так обстоит дело в том случае, когда цель управления зависит от момента времени, в который заканчивается управление. (*Прим. ред.*)

точку x_2, то результирующее управление

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t), & t_0\leqslant t\leqslant t_1, \\ u_2(t-t_1+t_0), & t_1\leqslant t\leqslant t_1+t_2-t_0 \end{cases}$$

переводит x_0 в x_2. Поэтому нетрудно показать, что, не ограничивая общности, всегда можно считать началом управления $t=0$.

Часто на функции из класса Δ накладываются различные дополнительные ограничения; например, условие $u(t)\subset\Omega$, где Ω — фиксированное компактное выпуклое множество в R^m, называемое *ограничивающим множеством*[1]). Кроме того, иногда задается заранее начало и конец интервала времени, в течение которого происходит управление.

4. *Критерий*, или *показатель качества* представляет собой принятый количественный критерий эффективности каждого управления $u(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ из класса Δ. Если Δ состоит из управлений, определенных на различных интервалах времени и приводящих x_0 в целевое множество, то критерий качества управления $u(t)$ часто определяется следующим образом:

$$C(u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,\ x(t),\ u(t))\,dt,$$

где $f^0(t,\ x,\ u)$ — заданная непрерывная функция. Если $f^0(t,\ x,\ u)\equiv 1$, то $C(u)=t_1-t_0$, и мы получаем задачу оптимального быстродействия.

Иногда Δ состоит из управлений, действующих на фиксированном промежутке времени, например, $t_0\leqslant t\leqslant T$, от которых требуется лишь приближенное приведение системы в положение $\xi(t)$. Тогда критерий качества часто бывает таким:

$$C(u)=|x(T)-\xi(T)|+\int_{t_0}^{T} f^0(t,\ x(t),\ u(t))\,dt.$$

В частности, весьма распространены квадратичные критерии качества, включающие среднюю ошибку управляемого движения $x(t)$ и энергию, расходуемую при управлении $u(t)$, т. е.

$$C(u)=g(x(T))+\int_{t_0}^{T}[x'(t)\,W(t)\,x(t)+u'(t)\,U(t)\,u(t)]\,dt.$$

Здесь $g(x)$ — неотрицательная функция, а $W(t)$, $U(t)$ — симметричные положительно определенные (полуопределенные) матрицы, т. е. $x'Wx>0$ $(\geqslant 0)$ и $u'Uu>0$ для любых ненулевых векторов x, u.

---

[1]) В оригинале «restraint set». (*Прим. ред.*)

Задача оптимального быстродействия для линейных систем рассматривается в главе 2, а квадратичный критерий качества изучается в главе 3.

Теперь рассмотрим задачу управления, включающую в себя: (1) процесс $\mathcal{S}$, (2) начальное положение x_0 и целевое множество $G(t)$, (3) класс допустимых управлений Δ и (4) критерий качества $C(u)$, который определен для всех управлений u из непустого множества Δ.

Определение. Управление $u^*(t)$ из класса Δ называется *оптимальным по отношению к критерию качества* $C(u)$, если

$$C(u^*) \leqslant C(u)$$

для всех $u(t) \in \Delta$.

В главах 2 и 3 будет доказано существование оптимального управления для линейных систем с различными критериями качества. В главе 4 мы докажем довольно общие теоремы существования оптимальных управлений для нелинейных систем; в качестве примера приведем формулировку одной из таких теорем.

Теорема 1. *Пусть поставлена задача управления, т. е. заданы:*

1) *Система дифференциальных уравнений*

$$(\mathcal{S}) \quad \dot{x}^i = g^i(t, x) + h^i_j(t, x) u^j \qquad (i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m),$$

где

$$g^i(t, x), \; h^i_j(t, x) \text{ и } \frac{\partial g^i(t, x)}{\partial x^k}, \; \frac{\partial h^i_j(t, x)}{\partial x^k} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

— непрерывные на $R^1 \times R^n$ функции;

2) *непустое выпуклое компактное ограничивающее множество $\Omega \subset R^m$;*

3) *начальное положение $x_0 \in R^n$ и непрерывно зависящее от t $(\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1)$* компактное целевое множество $G(t) \subset R^n$;

4) *критерий качества*

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} [g^0(t, x(t)) + h^0_j(t, x(t)) u^j(t)] \, dt,$$

где $g^0(t, x)$ и $h^0_j(t, x)$ — непрерывные на $R^1 \times R^n$ функции.

Пусть $\Delta = \Delta(\mathcal{S}, \Omega, x_0, G)$ — класс измеримых управлений $u(t) \subset \Omega$ на подынтервалах $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ интервала $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, переводящих $x(t_0) = x_0$ в $x(t_1) \in G(t_1)$.

Предположим, что:

(a) *Δ — непустое множество;*

(b) *существует такое $B < \infty$, что $|x(t)| \leqslant B$ для всех управляемых движений $x(t)$, соответствующих управлениям из Δ.*

Тогда в классе Δ существует оптимальное управление $u^*(t)$.

Можно также доказать, что если класс $\Delta(\alpha)\subset\Delta$, состоящий из допустимых управлений с фиксированным начальным моментом времени $t_0=\alpha$ непуст, то в нем существует оптимальное управление [это верно и для подкласса $\Delta(\alpha, \beta)\subset\Delta$ управлений с фиксированными начальным и конечным моментами].

Доказательство этой и других теорем существования, а также примеры систем, не обладающих оптимальными управлениями, будут приведены в главе 4. Все доказательства существования основаны на использовании следующих трех фактов: (1) Δ — непустое множество, (2) множество Δ слабо компактно, так что существует предел $u^*(t)$ для подходящей последовательности управлений $u_k(t)$, на которых значения функционала $C(u)$ убывают, (3) функционал $C(u)$ обладает свойством непрерывности, так что $\lim\limits_{n\to\infty} C(u_n)=C(u^*)$. К сожалению, все эти теоремы существования не конструктивны. Поэтому для построения оптимального управления требуется дальнейшее исследование.

Для случая линейного управляемого процесса

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u$$

с интегрируемыми коэффициентами легко видеть, что предположение (b) сформулированной выше теоремы выполняется автоматически. В следующем разделе мы рассмотрим предположение (a), которое связано с понятием управляемости.

1.3. Основные результаты теории управляемости

В этом разделе мы обсудим возможность перевода системы из начального состояния x_0 в точности в заданное состояние x_1 за конечный промежуток времени.

Определение. *Автономный процесс управления*

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

где $f(x, u)\in C^1$ на $R^n\times R^m$, называется *вполне управляемым*, если для каждой пары точек x_0 и x_1 из R^n существует ограниченное измеримое управление $u(t)$ на некотором конечном интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, такое, что соответствующее движение $x(t)$ переводит систему из точки $x(0)=x_0$ в точку $x(t_1)=x_1$.

Замечание. Для неавтономного процесса

$$\dot{x}=f(t, x, u)$$

понятие управляемости изменяется следующим образом: для каждого начального момента времени t_0 процесс считается управляемым, если для любого начального положения x_0 и любого конечного положения x_1 существует такое ограниченное измеримое управление $u(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, что соответствующее

движение $x(t)$ переводит систему из точки $x(t_0)=x_0$ в точку $x(t_1)=x_1$.

В главе 2 мы докажем следующую теорему об управляемости линейных систем:

Теорема 2. *Линейный процесс*

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где A — действительная постоянная $(n \times n)$-матрица, B — действительная постоянная $(n \times m)$-матрица, является вполне управляемым тогда и только тогда, когда ранг $(n \times nm)$-матрицы

$$[B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B]$$

равен n.

В примерах, приведенных в разделе 1.2, рассматривалась задача приведения системы в начало координат. Были указаны случаи, когда из любого начального положения можно было привести систему в некоторую окрестность начала координат. Ниже мы покажем, какое управление следует применить, чтобы попасть в точности в начало координат.

Определение. Для процесса

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $f(x, u) \in C^1$ на $R^n \times R^m$, *областью нуль-управляемости $\mathscr{C}$* называется множество всех точек $x_0 \in R^n$, из которых система может быть переведена в начало координат с помощью допустимого управления $u(t)$ за конечный промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

В главе 6 мы докажем следующую основную теорему о приведении системы в точку покоя.

Теорема 3. *Рассмотрим процесс*

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $f(x, u) \in C^1$ на $R^n \times R^m$.

Предположим, что:

(a) $$f(0,\ 0) = 0;$$

(b) *класс Δ допустимых управлений включает все измеримые управления $u(t)$, которые определены на конечных интервалах времени и удовлетворяют условию $|u(t)| \leqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$;*

(c) *система линейных дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

с постоянными матрицами коэффициентов

$$A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0,\ 0)\right) \quad \text{и} \quad B = \left(\frac{\partial f^j}{\partial u^k}(0,\ 0)\right)$$

управляема, т. е.

$$\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n.$$

Тогда область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости содержит некоторую открытую окрестность начала координат в R^n.

Чтобы показать, насколько сильна эта теорема, отметим одно ее прямое следствие, которое в главе 2 будет доказано независимо от теоремы 3.

Следствие. *Рассмотрим линейную систему управления*

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где A — действительная постоянная $n \times n$-матрица, B — действительная постоянная $n \times m$-матрица.

Предположим, что

a) *Матрица A устойчива, т. е. все ее собственные значения λ удовлетворяют условию* $\operatorname{Re}\lambda < 0$;

b) *выполняется условие управляемости, т. е.*

$$\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n.$$

Тогда система из любой начальной точки x_0 может быть переведена в точку $x_1 = 0$ некоторым измеримым управлением $u(t)$ на конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Более того, $u(t)$ удовлетворяет условию $|u(t)| \leqslant \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Приложения сформулированной выше теоремы к примерам 1 и 2 раздела 1, а также и к другим интересным специальным случаям мы предлагаем в качестве упражнений.

В оставшейся части этого раздела мы познакомимся с некоторыми задачами управления, в которых система описывается не матричным уравнением, а одним линейным дифференциальным уравнением высокого порядка. Рассмотрим линейную систему, описываемую уравнением

$$x^{(n)} + a_1(t)\,x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,x = u(t),$$

где $u(t)$ — скалярное управление, ограниченное по величине, а именно, лежащее в некотором интервале $\mathscr{I}$. Может возникнуть задача: перевести систему из начального состояния $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ldots, x_0^{(n-1)})$ в желаемое состояние G, например, $x = 0$, и далее сохранять это состояние управлением из $\mathscr{I}$. Задачи такого типа часто встречаются в теории одномерных и многомерных систем управления. Мы сейчас рассмотрим пример такой задачи; более подробно она будет изложена в главе 2.

Пример 1. Рассмотрим линейный управляемый процесс

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x = u, \quad |u(t)| \leqslant 1.$$

Предположим, что мы хотим привести к нулю скорость $\dot{x}$ и

ускорение $\ddot{x}$ системы, а ее смещение x для нас несущественно. Иначе говоря, пусть требуется из любого начального состояния $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0)$ перейти в желаемое состояние $\dot{x}=0$, $\ddot{x}=0$ и в дальнейшем сохранять нулевые значения скорости и ускорения, используя управление $u(t)$, удовлетворяющее условию $|u(t)| \leqslant 1$. Эту задачу можно записать и в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = x^3, \quad \dot{x}^3 = -x^1 - 2x^2 - 2x^3 + u(t),$$

вводя новые переменные x^1, x^2, x^3. Целевое множество G будет представлять собой прямую $x^2=0$, $x^3=0$ в R^3. Мы будем называть *ядром множества* G и обозначать символом $\operatorname{core}(G)$ совокупность всех точек из G, обладающих следующим свойством: для каждой точки $x_0 \in \operatorname{core}(G)$ существует такое управление $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$ с ограничением $|u(t)| \leqslant 1$, что соответствующее решение $x(t)$, $x(0)=x_0$ не покидает множества G, т. е. $x^2(t)=x^3(t)=0$ при $0 \leqslant t < \infty$. Но тогда $\dot{x}^2(t)=\dot{x}^3(t)=0$ и, следовательно,

$$x^1(t)=u(t) \quad \text{и} \quad |x^1| \leqslant 1.$$

С другой стороны, любая начальная точка вида $(x_0^1, 0, 0)$, где $|x_0^1| \leqslant 1$, может быть навсегда задержана в G, если воспользоваться постоянным управлением $u(t)=x_0^1$. Таким образом,

$$\operatorname{core}(G) = \{|x^1| \leqslant 1, \ x^2=0, \ x^3=0\},$$

т. е. $\operatorname{core}(G)$ есть сегмент оси x^1.

Итак, задача, состоящая в том, чтобы привести систему в G и удерживать ее затем там, полностью совпадает с задачей приведения системы в ядро множества G. Следовательно, мы свели задачу приведения системы в G с дополнительным условием ее дальнейшего удерживания в G к более стандартной задаче приведения системы в новую цель — $\operatorname{core}(G)$ без дополнительных условий. Отметим, что целевое множество системы $\operatorname{core}(G)$ является компактным выпуклым множеством в R^3.

Интересно, что управление, приводящее систему с последующим удерживанием в плоскость

$$G' = \{x^2=0\},$$

налагает на решение условие $\dot{x}^2=\dot{x}^3=0$; таким образом,

$$\operatorname{core}(G') = \operatorname{core}(G).$$

Поэтому первоначальная задача двумерного управления, приводящего систему в $G=\{x^2=0, \ x^3=0\}$, может быть заменена одномерной задачей приведения в область $G'=\{x^2=0\}$. Этот факт является иллюстрацией одного общего результата, который будет получен в дальнейшем.

Другой тип линейных задач теории управления, в которых появляются производные управляющей функции, можно назвать *задачей с дифференциальным оператором управления.* У линейных систем такого вида передаточная функция является дробно-рациональной функцией, числитель которой определяется управляющей функцией и ее производными. Природа таких задач становится ясной из следующего ниже примера. Подробнее они будут изучены в главе 2.

Пример 2. Рассмотрим линейную задачу с дифференциальным оператором управления

$$(\mathscr{L}) \qquad \ddot{x}+3\dot{x}+2x=2\dot{u}+u,$$

где управление $u(t)$ класса C^1 подчинено ограничению $|u(t)|\leqslant 1$. Передаточная функция для разомкнутого контура имеет вид

$$\frac{2p+1}{p^2+3p+2}.$$

Отметим, что числитель $2p+1$ определяется видом правой части $2\dot{u}+u$.

Пусть требуется перевести систему из начального состояния $(x_0, \dot{x}_0)$ в точку $(0, 0)$ за минимальное возможное время. Чтобы записать эту задачу с помощью системы линейных уравнений в фазовом пространстве, положим $\dot{x}=y$. Тогда получим следующую систему:

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-2x-3y+2\dot{u}+u.$$

В дальнейшем будет показано, что в классе C^1 не существует оптимального управления для этой системы; поэтому требуется расширить класс допустимых управлений, включив в него разрывные функции. Для этого запишем нашу задачу $(\mathscr{L})$ в виде линейной системы несколько иного вида (см. главу 2, упражнение 4.5):

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}^1=x^2+2u, \quad \dot{x}^2=-2x^1-3x^2-5u.$$

Передаточная функция системы $(\mathscr{S})$ вычисляется следующим образом:

$$p\overline{x}^1=\overline{x}^2+2\overline{u}, \quad p\overline{x}^2=-2\overline{x}^1-3\overline{x}^2-5\overline{u},$$

где $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$, $\overline{u}$ — соответствующие преобразования Лапласа. Таким образом,

$$\overline{x}^1=\frac{2p+1}{p^2+3p+2}\,\overline{u}.$$

Заметим, что система $\mathscr{S}$ не содержит производных от u и поэтому к ней можно применять обычную методику теории управления,

предложенную в главе 2. Следует также отметить, что фазовые координаты x, $y=\dot{x}$ теперь входят в следующем виде:

$$x^1=x, \quad x^2=y-2u,$$

а начальное состояние $x^1(0)=x_0$, $x^2(0)=\dot{x}_0-2u(0)$ зависит от управления $u(t)$. Эту трудность, однако, можно обойти, используя управления, у которых $u(0)=0$, или же заменяя начальную точку начальным сегментом $x^1=x_0$, $y_0-2\leqslant x^2\leqslant y_0+2$. Кроме того, можно вовсе не рассматривать систему ($\mathscr{L}$), а считать систему $\mathscr{S}$ исходным описанием нашей задачи с заданным начальным состоянием (x_0^1, x_0^2).

Действительно, на практике эквивалентная система $\mathscr{S}$ часто имеет удовлетворительную физическую трактовку, а уравнение $\mathscr{L}$, содержащее дифференциальный оператор управления, выводится из системы $\mathscr{S}$ с помощью дифференцирования и последующего исключения неизвестных — операций, которые при применении к системе с разрывным управлением не являются, строго говоря, допустимыми.

1.4. Экстремальные свойства оптимальных управлений и их синтез

В дифференциальном исчислении для нахождении минимума функции действительного переменного требуется провести исследование критических точек, т. е. точек, в которых производная функции обращается в нуль. Аналогичной процедуре мы следуем в теории оптимального управления.

В этом разделе мы сформулируем принцип максимума, смысл которого заключается в том, что каждое оптимальное управление является максимальным, т. е. «критическим» для заданной задачи управления. Мы рассматриваем здесь лишь автономные системы; более общий случай неавтономных систем будет подробно изучен в главе 5. Рассмотрим задачу автономного управления, в описание которой входят:

1. Система ($\mathscr{S}$) $\dot{x}^i=f^i(x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m)$, $i=1, 2 \ldots, n$, где $f(x, u)\in C^1$ в $R^n\times\Omega$.

2. Начальное состояние x_0 и целевое множество G — непустое компактное подмножество в R^n.

3. Класс Δ, включающий все измеримые управления $u(t)$, определенные на различных конечных промежутках времени $0\leqslant t\leqslant t_1$, переводящие точку x_0 в G и принадлежащие некоторому непустому компактному ограничивающему подмножеству Ω в R^m.

4. Критерий качества $C(u)=\int\limits_0^{t_1} f^0(x(t),\ u(t))\,dt$, где $f^0(x,\ y)\in C^1$ в $R^n\times\Omega$.

Определение. Рассмотрим автономный управляемый процесс $\{\mathcal{S},\ x_0,\ G,\ \Omega,\ \Delta,\ C\}$, описанный выше. Пусть $u(t)$, $(0\leqslant t\leqslant t_1)$ — некоторое управление из Δ, которому соответствует решение $\mathbf{x}(t)=(x^i(t))$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Рассмотрим вместо вектора $\mathbf{x}(t)$ $n+1$-мерный вектор

$$\hat{\mathbf{x}}(t)=(x^\alpha(t)),\qquad \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где

$$x^0(t)=\int\limits_0^t f^0(x(t),\ u\ (t))\,dt.$$

$n+1$-мерный вектор $\hat{\eta}(t)=(\eta_\alpha(t))$, $0\leqslant t\leqslant t_1$ называется *сопряженным* решением для $\hat{x}(t)$, если $\hat{\eta}(t)$ есть решение гамильтоновой системы

$$\dot{x}^\alpha=\frac{\partial\hat{H}}{\partial\eta_\alpha}=f^\alpha(x,\ u(t)),\qquad \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

$$\dot{\eta}_\alpha=-\frac{\partial\hat{H}}{\partial x^\alpha}=-\eta_0\frac{\partial f^0}{\partial x^\alpha}(x,\ \ u(t))-\ \ldots\ -\eta_n\frac{\partial f^n}{\partial x^\alpha}(x,\ u(t)),$$

не обращающееся в нуль ни в какой точке отрезка $0\leqslant t\leqslant t_1$. Здесь функция Гамильтона имеет вид

$$\hat{H}(\hat{\eta},\ \hat{x},\ u)=\eta_0 f^0(x,\ u)+\eta_1 f^1(x,\ u)+\ldots+\eta_n f^n(x,\ u).$$

Положим

$$\hat{M}(\hat{\eta},\ \hat{x})=\max_{u\in\Omega}\hat{H}(\hat{\eta},\ \hat{x},\ u).$$

Тогда, по определению, управление $u(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, будет *максимальным*, если существует решение $\hat{\eta}(t)$, такое, что

1. $\hat{H}(\hat{\eta}(t),\ \hat{x}(t),\ u(t))=\hat{M}(\hat{\eta}(t),\ \hat{x}(t))$ почти всюду на $0\leqslant t\leqslant t_1$.
2. $\hat{M}(\hat{\eta}(t),\ \hat{x}(t))=0$ всюду на отрезке $[0,\ t_1]$; $\eta_0\leqslant 0$.

Следующая теорема называется *принципом максимума* для автономных систем.

Теорема 4. *Рассмотрим управляемую автономную систему $(\mathcal{S},\ x_0,\ G,\ \Omega,\ \Delta,\ C)$, описанную выше. Пусть $u(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_1$,— оптимальное управление из класса Δ. Тогда $u(t)$ является максимальным управлением.*

Заметим, что $u(t)$ называется максимальным управлением, хотя оно доставляет минимум функционалу $C(u)$. Чтобы не изменять традиционные термины, принятые в литературе по управлению, мы будем мириться с этим несоответствием.

Для пояснения природы принципа максимума применим его к следующей линейной задаче:

1. $\mathscr{S}$: $\dot{x}=Ax+Bu$, где A и B—действительные постоянные $(n\times n)$- и $(n\times m)$-матрицы соответственно.

2. Начальное положение x_0 принадлежит области нуль-управляемости, а целевое множество G есть начало координат.

3. Ограничивающее множество Ω есть компактное выпуклое подмножество в R^m.

4. Критерием качества является продолжительность процесса управления:

$$C(u)=\int_0^{t_1} dt=t_1.$$

В этом случае функция Гамильтона имеет такой вид:

$$\hat{H}(\hat{\eta},\ \hat{x},\ u)=\eta_0+\eta\,[Ax+Bu]=\eta_0+H(\eta,\ x,\ u),$$

где $\eta=(\eta_i)$, $i=1,\ldots,n$,— n-мерный вектор-строка и $\eta\,[Ax+Bu]=H$. Тогда

$$\hat{M}(\hat{\eta},\ \hat{x})=\eta_0+\eta Ax+\max_{u\in\Omega}\eta Bu=\eta_0+M(\eta,\ x),$$

где $M=\max\limits_{u\in\Omega}H$. Если $u(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_1$,— максимальное управление, то решение $x(t)=(x^i(t))$, $i=1,\ \ldots,\ n$, а также сопряженное решение $\eta(t)=(\eta_i(t))$, $i=1,\ \ldots,\ n$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}=Ax+Bu(t),\quad \dot{\eta}=-\eta A;$$

при этом $x^0=t$, $\eta_0=\text{const}$.

Принцип максимума означает, во-первых, что

$$\eta_0+\eta(t)\,Ax(t)+\eta(t)\,Bu(t)=\eta_0+\eta(t)\,Ax(t)+\max_{u\in\Omega}\eta(t)\,Bu$$

или

$$\eta(t)\,Bu(t)=\max_{u\in\Omega}\eta(t)\,Bu$$

почти всюду на интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$ и, во-вторых, что

$$\eta_0+\eta(t)\,Ax(t)+\max_{u\in\Omega}\eta(t)\,Bu=0$$

всюду на отрезке $[0,\ t_1]$. Если вектор-функция $\eta(t)$ обращается в нуль в какой-либо одной точке интервала $0\leqslant t\leqslant t_1$, то она тождественно равна нулю на $[0,\ t_1]$, так как является решением однородной линейной системы

$$\dot{\eta}=-\eta A.$$

Но если $\eta(t)\equiv 0$, то $\eta_0=0$, что противоречит определению век-

тора $\hat{\eta}(t)$. Следовательно, вектор-функция $\eta(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Таким образом, в этом случае можно не рассматривать дополнительные компоненты $x^0 = t$ и $\eta_0 = \mathrm{const}$, т. е. перейти к n-мерным векторам $x(t)$ и $\eta(t)$ и искать максимальное управление $u(t)$ в зависимости от $H(\eta, x, u)$ и $M(\eta, x)$. Необходимо отметить, что сопряженное решение удовлетворяет вполне определенной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta} = -\eta A,$$

коэффициенты которой не зависят от управления $u(t)$ и решения $x(t)$. Таким образом, $\eta(t)$ полностью определяется начальными условиями. Так как условия принципа максимума однородны, т. е. допускают умножение $\eta(t)$ на любую положительную постоянную, то это можно учесть при выборе начальных условий.

Рассмотрим важный частный случай, когда для описанной выше линейной автономной управляемой системы Ω представляет собой m-мерный куб $|u^j| \leqslant 1$. Тогда условие

$$\eta(t) Bu(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) Bu$$

означает, что каждая компонента управления $u(t)$ может быть выбрана равной либо $+1$, либо -1 в зависимости от знака соответствующей компоненты вектора $\eta(t) B$. Таким образом, максимальное управление $u(t)$ удовлетворяет равенству

$$u(t) = [\operatorname{sgn} \eta(t) B]'$$

почти всюду, если только компоненты $\eta(t) B$ не обращаются в нуль на подмножестве положительной меры из интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Заметим, что это есть как раз то самое условие экстремальности оптимального управления, которое было выведено в примерах раздела 1.1 из геометрических соображений, связанных со свойством выпуклости множества достижимости.

Теперь мы можем попытаться синтезировать максимальное управление

$$u(t) = [\operatorname{sgn} \eta(t) B]',$$

определив сначала сопряженное решение $\eta(t)$, а затем проинтегрировав уравнение

$$\dot{x} = Ax + B [\operatorname{sgn} \eta(t) B]'$$

с обратным отсчетом времени, начиная отсчет в начале координат $x = 0$ и заканчивая его в исходной точке x_0. При этом мы пробуем различные начальные значения вектора $\eta(t)$, например, единичный вектор при $t = 0$, а затем строим $u(t)$ и $x(t)$ для $t \leqslant 0$. Если построить таким способом все возможные максимальные управления и соответствующие им решения, то одно из них будет

оптимальным управлением (если такое вообще существует), переводящим точку x_0 в начало координат. После этого мы возвращаемся к прежнему направлению отсчета времени, сдвинув начало отсчета так, чтобы x_0 соответствовало $t=0$. Эта процедура уже использовалась нами при построении кривой переключения и синтезировании оптимального управления в примерах раздела 1.1.

Весьма важным для синтеза максимального, а следовательно, и оптимального управления является соображение единственности. Процесс управления, обладающий свойством единственности, мы будем называть *нормальным*; в дальнейшем будет развита специальная теория нормальных процессов управления. В частности, будет показано, что задача приведения к началу координат линейной автономной управляемой системы

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=u$$

за минимальное возможное время при условии $|u(t)|\leqslant 1$ является нормальной. Таким образом, при синтезе оптимального управления как релейного управления, возможно использование принципа максимума, максимальных управлений, а также кривых переключения.

1.5. Синтез оптимальных управлений для линейных систем второго порядка

В этом разделе мы закончим построение оптимального по быстродействию управления для линейных систем второго порядка наиболее общего вида [рассматривается задача приведения системы из точки $(x, \dot{x})$ в начало координат].

Итак, рассмотрим систему

$$\ddot{x}\pm 2b\dot{x}\pm k^2x=u,$$

где $b\geqslant 0$ и $k^2>0$ — константы, а управление подчинено ограничению $|u(t)|\leqslant 1$.

В разделе 1.1 уже рассматривался наиболее общий вид линейных систем первого порядка

$$\dot{x}\pm bx=u, \quad |u(t)|\leqslant 1.$$

Исследовались также некоторые частные случаи систем второго порядка, например,

$$\ddot{x}\pm b\dot{x}=u, \quad |u(t)|\leqslant 1$$

и

$$\ddot{x}+k^2x=u, \quad |u(t)|\leqslant 1.$$

В упражнениях было показано, что ограничение более общего вида на величину управления $|u(t)|\leqslant c$, где $c>0$, сводится к стандартному ограничению $|u(t)|\leqslant 1$ соответствующим измене-

нием масштаба. Рассмотренные ниже случаи развивают решение задачи синтеза оптимальных по быстродействию управлений для любых автономных линейных систем второго порядка.

Рассмотрим вопрос о синтезе оптимального по быстродействию управления в задаче о приведении к нулю линейной системы

$$(\mathscr{L}) \qquad \ddot{x} \pm 2b\dot{x} \pm k^2 x = u$$

с коэффициентами $b \geqslant 0$ и $k^2 > 0$ и ограничением $|u(t)| \leqslant 1$. Заметим, что соответствующая система уравнений

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm k^2 & \pm 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

является нормальной и управляемой. Следовательно, по теоремам разделов 1.2 и 1.3 существует единственное оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$, переводящее систему из заданного начального состояния (x_0, y_0), лежащего в области нуль-управляемости $\mathscr{C}$, в точку $(0, 0)$. При этом $\mathscr{C}$ является открытым связным множеством в фазовой плоскости R^2.

В силу принципа максимума, сформулированного в разделе 1.4, оптимальное управление является максимальным, и выражается формулой

$$u^*(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t)$$

почти всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Здесь сопряженное решение $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{\eta}_1 = \pm k^2 \eta_2,$$

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_1 \pm 2b\eta_2$$

или

$$\ddot{\eta}_2 \mp 2b\dot{\eta}_2 \pm k^2 \eta_2 = 0.$$

Заметим, что $\eta_2(t)$ не может быть тождественным нулем, так как в этом случае

$$\eta_1(t) = \pm 2b\eta_2(t) - \dot{\eta}_2(t) = 0,$$

что противоречит условию $\eta(t) \neq 0$ на $0 \leqslant t \leqslant t^*$. В силу аналитичности функции $\eta_2(t)$ она может иметь лишь конечное число нулей на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Вследствие нормальности системы $\mathscr{L}$ существует лишь одно максимальное управление, переводящее (x_0, y_0) в $(0, 0)$, а следовательно, и одно оптимальное управление $u^*(t)$. Мы построим соответствующую кривую переключений $y = W(x)$, на которой происходит переключение экстремальной траектории с решения системы

$$(\mathscr{S}_-) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mp k^2 x \mp 2by - 1$$

на решение системы

$$(\mathcal{S}_+) \qquad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=\mp k^2x\mp 2by+1,$$

и наоборот. Так как замена переменных $x\to -x$, $y\to -y$ переводит $\mathcal{S}_-$ в $\mathcal{S}_+$, то ясно, что $W(-x)=-W(x)$, и поэтому достаточно искать кривую переключений лишь для $x>0$.

Таким образом, синтез оптимального управления $u^*(t)$ сводится к определению области $\mathscr{C}$ управляемости и построению кривой переключений $y=W(x)$.

Пример 1. **Демпфированный линейный осциллятор.** Рассмотрим задачу о приведении в начало координат за минимальное время системы

$$(\mathscr{L}) \qquad \ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=u.$$

Здесь $b>0$ и $k^2>0$ — постоянные, и $|u(t)|\leqslant 1$. Поскольку матрица

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -k^2 & -2b\end{bmatrix}$$

устойчива, то в силу следствия из теоремы раздела 1.3 областью нуль-управляемости $\mathscr{C}$ будет все пространство R^2.

Здесь имеется два качественно различных случая:

1) слабое демпфирование, $b^2-k^2<0$,

2) критическое и сильное демпфирование, $b^2-k^2\geqslant 0$.

Рассмотрим сначала случай $b^2-k^2<0$. Тогда каждое решение экстремальной системы

$$(\mathcal{S}_-) \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -k^2 & -2b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

представляет собой спираль, закручивающуюся вокруг особой точки (положения равновесия) O_-: $x=-1/k^2$, $y=0$, а каждое решение системы

$$(\mathcal{S}_+) \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -k^2 & -2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

есть спираль, закручивающаяся вокруг особой точки O_+: $x=\frac{1}{k^2}$, $y=0$ при $t\to\infty$. Любая экстремальная траектория, приводящая в начало координат, должна состоять из конечного числа кусков интегральных кривых систем $\mathcal{S}_-$ и $\mathcal{S}_+$ с чередующимся переключением. Анализ сопряженного решения $\eta_2(t)=\alpha e^{bt}\sin(\omega t+\beta)$, где $\alpha\neq 0$, β — произвольные постоянные, и $\omega=\sqrt{k^2-b^2}$, показывает, что промежуток времени между последовательными переключениями равен $T=\pi/\omega$.

Пусть S_+ — решение системы $\mathscr{S}_+$, которое при обратном отсчете времени исходит из начала координат (рис. 1.7). Опишем с помощью этого решения кривую переключения $y = W(x)$ при $x \geqslant 0$, а затем докажем справедливость этого построения.

Построим кривую переключений, развертывая спираль S_+ в точках пересечения с осью x. Пусть S_+^1 есть дуга траектории S_+, ведущая из точки (0, 0) в направлении, противоположном указанному стрелкой на рис. 1.7, к предшествующей точке пересечения траектории S_+ с осью x. Очевидно, что дуга S_+^1 и ее отражение S_-^1

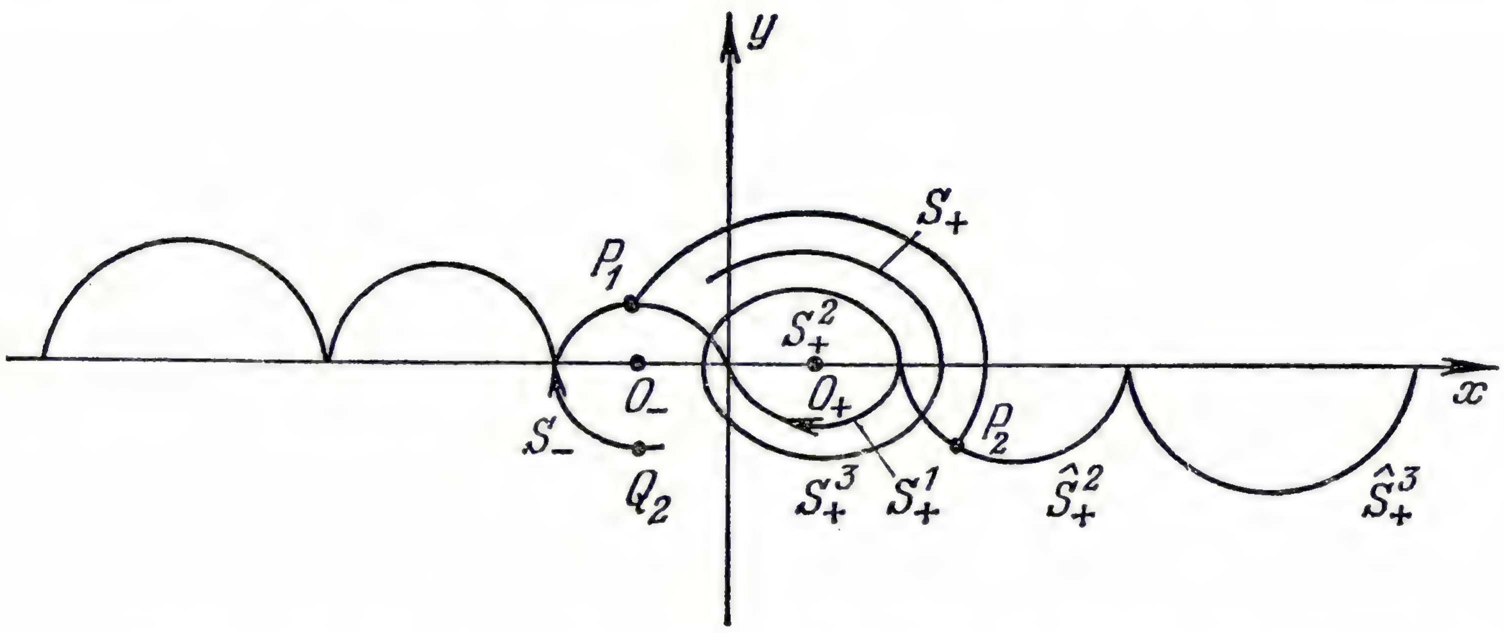

Рис. 1.7. Оптимальное по быстродействию управление, приводящее систему в начало координат. График кривой переключения для системы $\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=u$, $|u(t)| \leqslant 1$. Случай 1, пример 1: $b^2-k^2<0$, $b>0$, $k^2>0$.

относительно начала координат являются частью кривой переключения, так как каждая точка дуги представляет собой точку переключения для максимальной или экстремальной траектории решения системы $\mathscr{S}_-$, которая пересекает дугу и затем по ней приводит в начало координат.

Рассмотрим последовательные дуги спирали S_+: $S_+^1, S_+^2, S_+^3, \ldots$; каждая из них представляет собой половину оборота спирали S_+ и начинается в точке пересечения спирали с осью x. На полуоси $x \geqslant 0$ кривая переключения $y = W(x)$ строится из дуги S_+^1 и дуг $\hat{S}_+^2, \hat{S}_+^3, \ldots$, являющихся результатом переноса дуг $S_+^2, S_+^3, \ldots$ вдоль оси x. Таким образом, мы образуем непрерывную кривую $y = W(x)$, однозначную по x на положительной полуоси $x \geqslant 0$ и такую, что при возрастании x точки дуг $\hat{S}_+^1, \hat{S}_+^2, \ldots$ идут в том же порядке, что и точки дуг $S_+^1, S_+^2, \ldots$ при возрастании $(-t)$.

Для $x < 0$ положим $W(x) = -W(-x)$. Определим теперь синтезирующую функцию $\Psi(x, y)$ так, чтобы решения уравнения

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = \Psi(x, \dot{x})$$

всегда давали бы оптимальные траектории, переводящие систему из любой начальной точки (x_0, y_0) в начало координат (0, 0).

Для этого положим [для всех действительных $(x, y) \neq (0, 0)$]

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{для} \quad y > W(x) \quad \text{и на} \quad S_-^1, \\ 0 & \text{для} \quad y = W(x), \\ +1 & \text{для} \quad y < W(x) \quad \text{и на} \quad S_+^1. \end{cases}$$

Чтобы проверить правильность нашего построения, начнем движение с куска S_+^1 решения S_+ системы $\mathcal{S}_+$ и куска S_-^1 решения S_- системы $\mathcal{S}_-$. Кривая переключения вправо от S_+^1 состоит из кусков решений системы $\mathcal{S}_+$, взятых на интервалах $T = \frac{\pi}{\omega}$ и исходящих из точек S_-^1.

Рассмотрим точку $P_1 = (x^1, y^1)$ на S_-^1 и обозначим через $P_2 = (x^2, y^2)$ точку, в которую мы придем через промежуток времени $T = \frac{\pi}{\omega}$, двигаясь вдоль решения системы $\mathcal{S}_+$. Тогда точки P_1, O_+ и P_2 будут лежать на одной прямой, и отношение длин отрезков P_1O_+ и O_+P_2 равняется e^{-bT}. Это легко вычислить, учитывая, что точки P_1 и P_2 лежат на одном и том же витке спирали S_+ с характеристикой затухания e^{-bt} на расстоянии в полвитка. Однако отношение длины отрезка Q_2O_-, где $Q_2 = (x_-^2, y_-^2)$ — точка траектории S_-, лежащая на прямой P_1O_-, к длине отрезка P_1O_- также равно e^{-bT}. Из подобия треугольников находим, что $y_-^2 = y^2$, а затем простым вычислением можно показать, что $x^2 = x_-^2 + \left(e^{\frac{b\pi}{\omega}} + 1\right)\frac{2}{k^2}$. Это означает, что дуга $\hat{S}_+^2$, входящая в кривую переключения, представляет собой результат параллельного переноса дуги S_-^2, которая лежит на траектории S_- и является продолжением дуги S_-^1. Но дуги S_-^2 и S_+^2 получаются друг из друга параллельным переносом, так как системы $\mathcal{S}_-$ и $\mathcal{S}_+$ переходят одна в другую при замене переменных $(x, y) \to (-x, -y)$. Таким образом, дуга $\hat{S}_+^2$ является следующим за S_+^1 куском линии переключения $y = W(x)$ при $x > 0$. Полное описание кривой $y = W(x)$ получается повторением этого рассуждения.

Обратимся к случаю (2) $b^2 - k^2 \geqslant 0$. Здесь каждое решение систем $\mathcal{S}_\pm$ приближается соответственно к точкам $O_\pm$, однако на каждом решении x может обращаться в нуль не более одного раза. Общее решение сопряженного уравнения имеет вид

$$\eta_2(t) = e^{bt}(\alpha + \beta t) \quad \text{при} \quad b^2 - k^2 = 0$$

или

$$\eta_2(t) = \alpha e^{bt} \operatorname{sh}(\mu t + \beta) \quad \text{при} \quad b^2 - k^2 > 0,$$

где α и β — постоянные и $\mu = \sqrt{b^2 - k^2}$. В любом случае $\eta_2(t)$ имеет самое большее один нуль, а соответствующее оптимальное управление таково:

$$u^*(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t).$$

В случае (2) кривая переключений $y = W(x)$ состоит из двух кусков решений Γ_+ и Γ_-. Здесь Γ_- представляет собой решение системы $\mathcal{S}_-$, проходящее через точку (0, 0), а Γ_+ — решение системы $\mathcal{S}_+$, лежащее в четвертом квадранте, как показано на рис. 1.8, и ведущее из начала координат. Таким образом, легко построить кривую переключений $y = W(x)$, которая будет однозначной на всей оси x, а также соответствующую синтезирующую функцию

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -1 \text{ при } y > W(x) \text{ и на } \Gamma_-, \\ +1 \text{ при } y < W(x) \text{ и на } \Gamma_+. \end{cases}$$

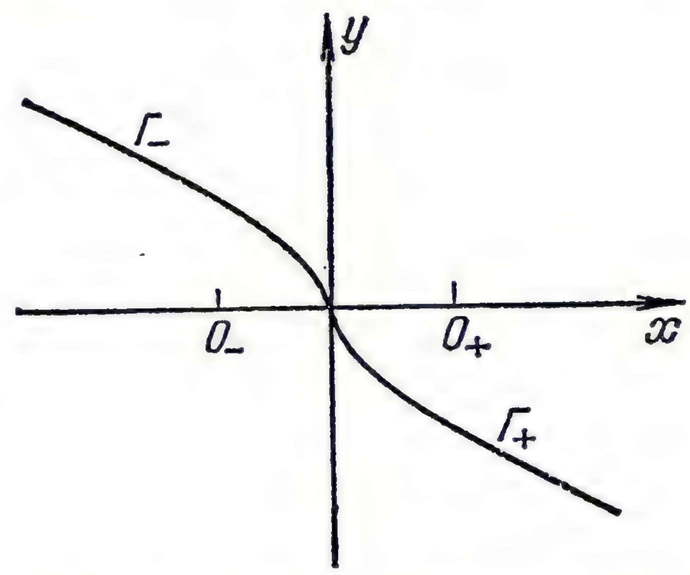

Рис. 1.8. Оптимальное по быстродействию управление, приводящее систему в начало координат. График кривой переключения для системы $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = u$, $|u(t)| \leqslant 1$. Случай 2, пример 1: $b^2 - k^2 \geqslant 0$, $b > 0$, $k^2 > 0$.

Пример 2. **Линейный осциллятор с отрицательным трением.** Рассмотрим задачу приведения в начало координат за минимальное время системы

$$\ddot{x} - 2b\dot{x} + k^2x = u.$$

Здесь $b > 0$ и $k^2 > 0$ — постоянные, а $|u(t)| \leqslant 1$. Заметим, что система дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

не является устойчивой в начале координат (при $u \equiv 0$), однако она управляема и нормальна.

Так же как и в примере 1, для построения кривой переключений и синтеза оптимального управления рассмотрим экстремальные системы

$$(\mathcal{S}_-) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k^2x + 2by - 1$$

и

$$(\mathcal{S}_+) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -k^2x + 2by + 1.$$

Здесь снова возможны два случая:

1) слабое демпфирование, $b^2 - k^2 < 0$,

2) критическое и сильное демпфирование, $b^2 - k^2 \geqslant 0$.

Рассмотрим случай 1, $b^2 - k^2 < 0$. Здесь каждое решение системы $\mathcal{S}_-$ представляет собой раскручивающуюся спираль с центром в точке O_-: $x = -\frac{1}{k^2}$, $y = 0$, а каждое решение системы $\mathcal{S}_+$ — спираль с центром в точке O_+: $x = \frac{1}{k^2}$, $y = 0$, раскручивающуюся с возрастанием t. В наиболее общем виде сопряженную траекторию

можно представить так:

$$\eta_2(t) = \alpha e^{-bt} \sin(\omega t + \beta),$$

где α, β — постоянные и $\omega = \sqrt{k^2 - b^2}$. Таким образом, экстремальная траектория, приводящая в точку (0, 0), может иметь много переключений между дугами $\mathscr{S}_-$ и $\mathscr{S}_+$; промежуток времени между переключениями всегда должен, однако, равняться $T = \pi/\omega$.

Кривая переключения строится методом, аналогичным употреблявшемуся в примере 1. Пусть S_+^1 — дуга кривой S_+ [S_+ решение системы $\mathscr{S}_+$, исходящее из точки (0, 0)], отсчитанная от начала координат и соответствующая промежутку времени $T = \pi/\omega$ (при обратном отсчете времени). Пусть S_+^2, S_+^3 — последовательные дуги кривой S_+, каждая из которых начинается и заканчивается в точке пересечения S_+ с осью x и соответствует промежутку времени $T = \pi/\omega$. Тогда кривая $y = W(x)$ будет состоять из дуги S_+^1, за которой будет следовать S_+^2, а затем своего рода развертка спирали, с остриями в точках пересечения кривой S_+ с осью x (рис. 1.9).

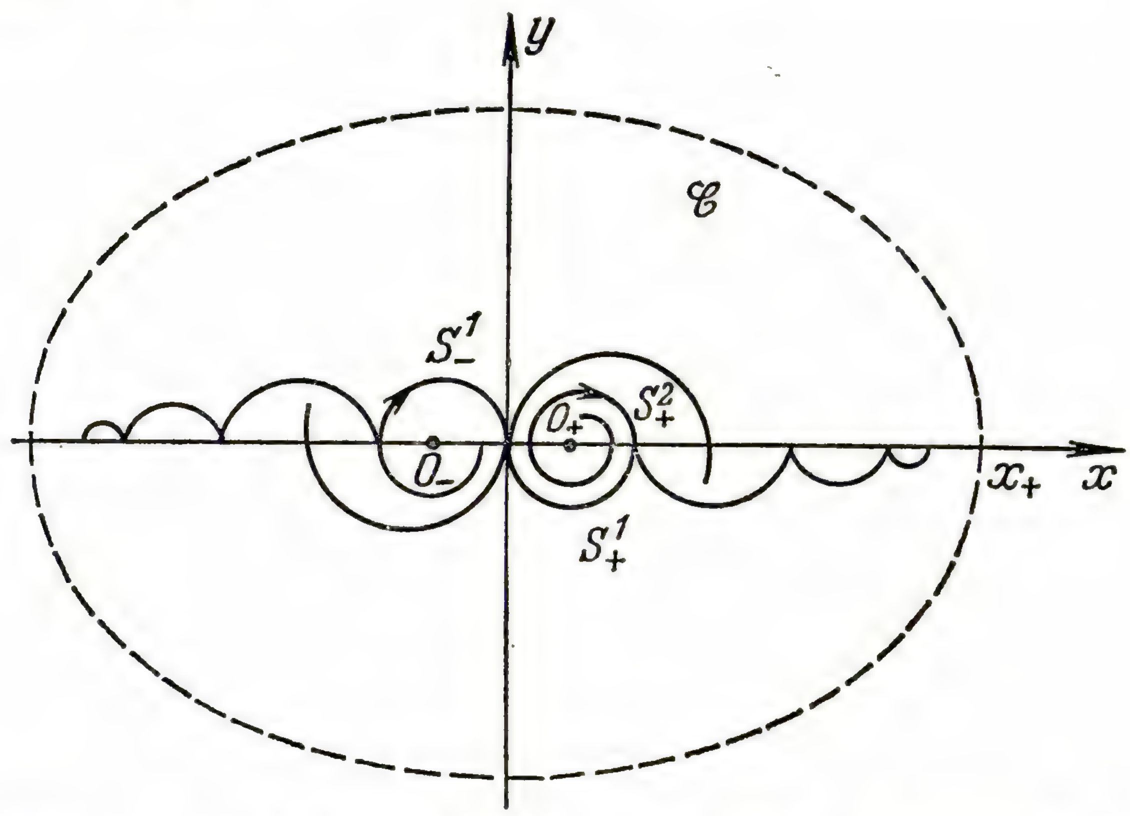

Рис. 1.9. Оптимальное по быстродействию управление, приводящее систему в начало координат. График кривой переключения для системы $\ddot{x} - 2b\dot{x} + k^2 x = u$, $|u(t)| \leqslant 1$. Случай 1, пример 2: $b^2 - k^2 < 0$, $b > 0$, $k^2 > 0$.

Поскольку диаметр дуги S_+^1 равняется $\left(e^{-\frac{b\pi}{\omega}} + 1\right)\frac{1}{k^2}$, а диаметры последующих дуг убывают, так как множитель $e^{-b\pi/\omega} < 1$, то нетрудно вычислить, что $y = W(x)$ определена для следующих значений x:

$$0 \leqslant x < x_+ = \frac{1 + e^{-b\pi/\omega}}{(1 - e^{-b\pi/\omega})k^2}.$$

Пользуясь нечетностью функции $W(x) = -W(-x)$, можно доопределить $W(x)$ на $x_- < x \leqslant 0$, где $x_- = -x_+$.

Легко видеть, что область управляемости $\mathscr{C}$ есть открытая область, ограниченная решением $\mathscr{S}_-$, ведущим из точки $(x_-, 0)$ в точку $(x_+, 0)$ при $y \geqslant 0$, и решением $\mathscr{S}_+$, ведущим из точки $(x_+, 0)$ в точку $(x_-, 0)$ при $y \leqslant 0$. Таким образом, синтезирующая функция определяется в $\mathscr{C}$ следующим образом:

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{для } y > W(x) \text{ и на } S_-^1, \\ 0 & \text{для } y = W(x), \\ +1 & \text{для } y < W(x) \text{ и на } S_+^1. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим случай 2, $b^2 - k^2 \geqslant 0$. Каждое решение систем $\mathscr{S}_\pm$ исходит из особой точки $O_\pm$ и имеет не более чем одну точку пересечения с осью x. Следовательно, каждая оптимальная траектория, приводящая в точку $(0, 0)$, будет иметь не более одного переключения. Решения системы $\mathscr{S}_+$ легко получить из решений $\mathscr{S}_-$ (пример 1, случай 2) подстановкой $x \to -x$, $y \to y$, $t \to -t$. Решения $\mathscr{S}_-$ аналогично получаются из решений $\mathscr{S}_+$ (пример 1, случай 2).

Пусть S_+^1 — дуга решения $\mathscr{S}_+$, ведущая из точки O_+ в начало координат. Тогда кривая переключений $y = W(x)$ состоит из дуги S_+^1 при $x \geqslant 0$ и соответствующей дуги S_-^1 системы $\mathscr{S}_-$ при $x \leqslant 0$. Область управляемости $\mathscr{C}$ представляет собой открытую область, ограниченную решением системы $\mathscr{S}_+$, идущим из точки O_+ в точку O_- при $y \leqslant 0$ и решением системы $\mathscr{S}_-$, идущим из точки O_- в точку O_+ при $y \geqslant 0$ (рис. 1.10). Как обычно, синтезирующая функция определена в области $\mathscr{C}$ (см. рис. 1.10) и имеет вид

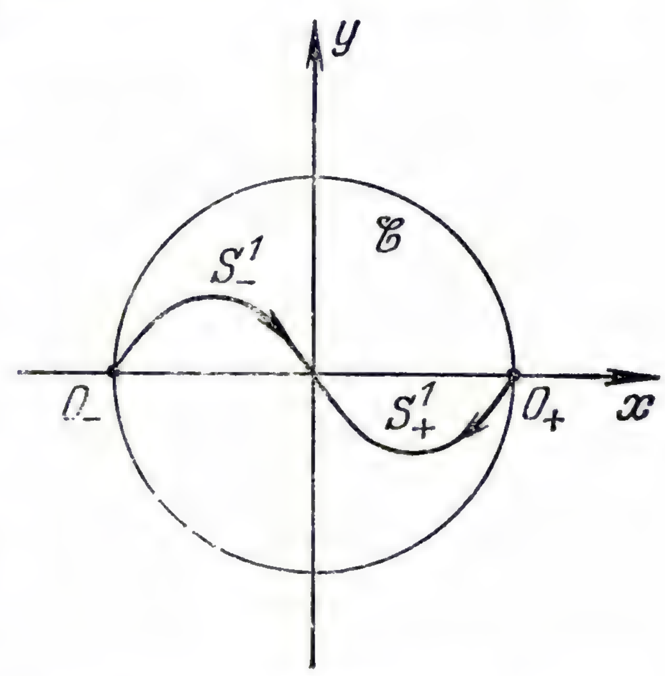

Рис. 1.10. Оптимальное по быстродействию управление, приводящее систему в начало координат. График кривой переключения для системы $\ddot{x} - 2b\dot{x} + k^2x = u$, $|u(t)| \leqslant 1$. Случай 1, пример 2: $b^2 - k^2 > 0$, $b > 0$, $k^2 > 0$.

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{для } y > W(x) \text{ и на } S_-^1, \\ +1 & \text{для } y < W(x) \text{ и на } S_+^1. \end{cases}$$

Пример 3. **Управление под действием отталкивающей силы.** Рассмотрим синтез оптимального управления в задаче приведения к началу координат за минимальное время линейной системы

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} - k^2x = u$$

с постоянными коэффициентами b и $k^2 > 0$ и ограничением $|u(t)| \leqslant 1$. Здесь снова оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$, переводящее произвольную точку (x_0, y_0), принадлежащую области управляемости, в точку $(0, 0)$, является единст-

венным максимальным управлением, переводящим (x_0, y_0) в $(0, 0)$ и

$$u^*(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t).$$

Сопряженное решение $\eta_2(t) \not\equiv 0$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\eta}_2 - 2b\dot{\eta}_2 - k^2\eta_2 = 0$$

и имеет не более одного нуля; общее решение имеет вид

$$\eta_2(t) = \alpha e^{bt} \operatorname{sh}(\nu t + \beta),$$

где α и β — постоянные, а $\nu = \sqrt{b^2 + k^2}$. Таким образом, $u^*(t)$ имеет не более, чем одно переключение.

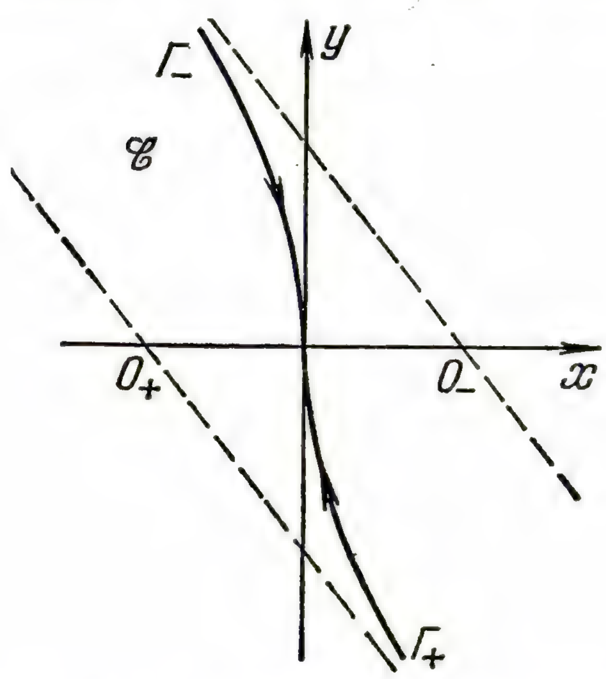

Рис. 1.11. Оптимальное по быстродействию управление, приводящее систему в начало координат. График кривой переключения для системы $\ddot{x} + 2b\dot{x} - k^2x = u$, $|u(t)| \leqslant 1$.

Экстремальные системы

$$(\mathscr{S}_-) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = k^2x - 2by - 1$$

и

$$(\mathscr{S}_+) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = k^2x - 2by + 1$$

соответственно имеют особые точки O_-: $x = 1/k^2$, $y = 0$ и O_+: $x = -1/k^2$, $y = 0$, являющиеся особыми точками типа седла.

Линия переключения составляется из двух кривых Γ_+ и Γ_-. Здесь Γ_+ — решение системы $\mathscr{S}_+$, проходящее через точку $(0, 0)$ и лежащее в четвертом квадранте фазовой плоскости. Аналогично, решение Γ_- системы $\mathscr{S}_-$ проходит через точку $(0, 0)$ и находится во втором квадранте (рис. 1.11). Область управляемости представляет собой открытую бесконечную полосу, ограниченную прямыми

$$y = (-b - \nu)\left(x - \frac{1}{k^2}\right)$$

и

$$y = (-b - \nu)\left(x + \frac{1}{k^2}\right).$$

Картина не меняется при $b > 0$, $b = 0$ и $b < 0$. Синтезирующая функция определяется как обычно:

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad y > W(x) \quad \text{и на} \quad \Gamma_-, \\ +1 & \text{при} \quad y < W(x) \quad \text{и на} \quad \Gamma_+. \end{cases}$$

Упражнения

1. Рассмотрите управление гамильтоновой системой:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial y^i} + u^i, \quad \dot{y}^i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + v^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь $(x^1, x^2, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = (x, y)$ точка фазового пространства R^{2n}, а функция Гамильтона $H(x, y)$ принадлежит классу C^2 в R^{2n}. Управляющий вектор (u, v) удовлетворяет ограничению

$$|u^i| \leqslant 1, \quad |v^i| \leqslant 1.$$

Пусть $H(x, y) > 0$ и $|\operatorname{grad} H(x, y)| > 0$ в $R^{2n} \setminus (0, 0)$; $H(0, 0) = 0$ и $\lim\limits_{|x|+|y| \to \infty} H(x, y) = +\infty$. Покажите, что можно из любого начального состояния (x_0, y_0) перевести систему в заданную окрестность начала координат.

2. Рассмотрите нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = 0,$$

где $f(x, y)$ и $g(x)$ — функции из C^1 на фазовой плоскости R^2. Положим $f(x, y) \geqslant 0$ и $xg(x) > 0$ для $x \neq 0$.

(a) Покажите, что если функция $G(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds$ удовлетворяет условию: $\lim\limits_{x \to \infty} G(x) = \infty$, то каждая кривая

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x) = V_0 > 0$$

представляет собой замкнутую кривую, содержащую внутри себя начало координат.

(b) Пусть $f(x, y) \equiv 0$ и $g(x) = xe^{-x^2}$ так, что нелинейное уравнение

$$\ddot{x} + xe^{-x^2} = 0$$

допускает линейную аппроксимацию

$$\ddot{x} + x = 0$$

вблизи начала координат. Покажите, что глобальное поведение решений этих уравнений на фазовой плоскости будет качественно различным.

3. Рассмотрите описанные ниже системы управления с указанными критериями качества и целевыми множествами. Покажите, что в каждом случае систему можно из любого начального состояния перевести в соответствующее целевое множество, однако оптимального управления не существует. Установите в каждом случае, почему не применима теорема существования, установленная в разделе 1.2.

(a) $\dot{x} = \sin 2\pi u, \quad \dot{y} = \cos 2\pi u, \quad \dot{z} = -1$ в R^3 при условии $|u(t)| \leqslant 1$. Начальное состояние $(0, 0, 1)$, конечное — $(0, 0, 0)$; критерий качества —

$$C(u) = \int\limits_0^t (x^2 + y^2)\,dt.$$

Указание. Постройте управления $u_k(t)$ на $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sin 2\pi u_k(t) = \sin 2\pi kt; \quad \cos 2\pi u_k(t) = \cos 2\pi kt \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3 \ldots;$$

(b) $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$, $\dot{z} = -1$ в R^3 при условии $u^2(t) + v^2(t) = 1$. Переведите $(0, 0, 1)$ в $(0, 0, 0)$. Критерий качества

$$C(u, v) = \int\limits_0^t (x^2 + y^2)\,dt.$$

(c) $\dot{x}=1$, $\dot{y}=-xe^{y}u$ в R^2 при условии $0\leqslant u(t)\leqslant 2$. Переведите $(-1, 0)$ в $(1, 0)$. Критерий качества

$$C(u)=\int\limits_0^t (2-y)\,dt=\int\limits_{-1}^{1}(2-y)\,dx.$$

Указание. Для каждого решения $x(t)=t-1$, $y(t)$ покажите, что $0\leqslant y(x)\leqslant -\ln x^2$ для $x\neq 0$. Тогда $C(u)>\int\limits_{-1}^{1}(2+\ln x^2)\,dx=0$. Попробуйте применить управление $u_\varepsilon(t)=2-\varepsilon$ для малых $\varepsilon>0$.

4. Рассмотрите нелинейную систему

$$\ddot{x}-\dot{x}^2-x^2=u^2, \quad |u(t)|\leqslant 1$$

в фазовой плоскости x, $y=\dot{x}$. Покажите, что область нуль-управляемости целиком лежит в четвертом квадранте и, следовательно, не содержит никакой окрестности начала координат.

5. Запишите линейную систему с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=u$$

в виде матричной системы первого порядка

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=Ax+bu,$$

положив $x^1=x$, $x^2=\dot{x}$, $\ldots$, $x^n=x^{(n-1)}$. Используя теоремы, доказанные в разделе 1.3, покажите, что система $\mathcal{S}$ управляема.

6. Рассмотрите нелинейный управляемый процесс

$$x^{(n)}+f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, u)=0,$$

где функция $f(x^1, \ldots, x^n, u)$ принадлежит C^1 в R^{n+1}, а управление u подчинено ограничению $|u(t)|\leqslant 1$. Кроме того, $f(0, 0, \ldots, 0)=0$ и $\frac{\partial f}{\partial u}(0, \ldots, 0)\neq 0$. Применяя теоремы, сформулированные в разделе 1.3, покажите, что область нуль-управляемости для соответствующей системы уравнений первого порядка в R^n содержит открытую окрестность начала координат.

7. Покажите, что система

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=-x+u, \quad \dot{y}=-2y$$

не является управляемой в R^2, исследуя картину интегральных кривых на фазовой плоскости. Произведя преобразование координат,

$$\overline{x}=2x-y, \quad \overline{y}=x-y,$$

получите соответствующую систему $\overline{\mathcal{S}}$. Проверьте, выполняется ли для нее алгебраическое условие управляемости раздела 1.3.

8. Рассмотрите примеры 1 и 2 раздела 1.2.

(a) Покажите, что система может быть приведена в начало координат из любого начального состояния.

(b) Проверьте в каждом случае выполнение всех условий теоремы существования раздела 1.2 и докажите существование управления, оптимального по быстродействию.

9. (a) Рассмотрите нелинейную автономную систему

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u) \quad \text{при} \quad u(t)\in\Omega,$$

переводящую x_0 в $x_1=0$ и минимизирующую $C(u)=\int\limits_0^t f^0(x(t),\ u(t))\,dt$ как в разделе 1.4. Сформулируйте в терминах управления $u(t)$ и решений $x(t)$, $\eta(t)$ принцип максимума для оптимального управления.

(b) Сформулируйте соответствующий принцип для управления, максимизирующего критерий $C(u)$.

10. Рассмотрите систему

$$\dot{x}=u-u^2$$

с ограничением $|u(t)|\leqslant 1$. Покажите, что оптимальным управлением, переводящим $x_0=-1$ в $x_1=0$ за минимальное время, будет $u(t)\equiv\frac{1}{2}$. Отметим, что в данном случае оптимальное управление не будет релейной функцией, переключающейся с $+1$ на -1.

Приложение I

Геометрическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений

В примерах 2 и 3 раздела 1.1 мы показали, как свести изучение одного уравнения второго порядка, например,

$$\ddot{x}=f(t,\ x,\ \dot{x}),$$

к изучению системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x=y,\quad \dot{y}=f(t,\ x,\ y).$$

Аналогичным образом, вместо скалярного дифференциального уравнения высшего порядка можно рассматривать соответствующее векторное уравнение первого порядка, представляющее собой частный случай системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x}^1&=f^1(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n),\\ \dot{x}^2&=f^2(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dot{x}^n&=f^n(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n).\end{aligned}$$

Эту систему дифференциальных уравнений можно записать так:

$$\dot{x}^i=f^i(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)=f^i(t,\ x),\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

или в виде векторного дифференциального уравнения

$$(\mathscr{S})\qquad x=f(t,\ x)\quad\text{или}\quad\frac{dx}{dt}=f(t,\ x).$$

Решение

$$x(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{bmatrix}$$

представляет собой вектор-столбец, состоящий из действительных дифференцируемых функций аргумента t, определенных на некотором открытом интервале $\mathcal{I}$ и удовлетворяющих на нем системе дифференциальных уравнений $\dot{x}^i(t) = f^i(t, x(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В этом разделе предлагается геометрическая интерпретация векторного дифференциального уравнения $\mathcal{S}$ как векторного поля в пространстве R^n n действительных переменных $(x^1, \dots, x^n)$. Кроме того, мы введем терминологию и обозначения, употребляемые в теории векторных и скалярных функций и сформулируем основные теоремы, относящиеся к векторным дифференциальным уравнениям. При желании читатель может лишь бегло ознакомиться с этим материалом, возвращаясь к нему для детального изучения по мере того, как отмеченные здесь понятия будут встречаться в излагаемой далее теории оптимального управления.

Обозначение множеств в R^n, $n = 1, 2, 3, \dots$

Пространство R^n представляет собой совокупность всевозможных наборов n действительных чисел $(x^1, \dots, x^n)$. Таким образом, R^1 есть действительная прямая, а R^2 — действительная плоскость. Если точка или вектор $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ принадлежит некоторому подмножеству A из R^n, то пишут $x_0 \in A$. Если каждая точка A лежит в подмножестве B, т. е. A содержится в B, то пишут $A \subset B$. Множество точек, принадлежащих A_1, но не принадлежащих A_2, называют *разностью* множеств A_1 и A_2 и обозначают $A_1 - A_2$; если же $A_1 \subset A_2$, то разность их будет пустым множеством, т. е. множеством, не содержащим ни одной точки. *Пересечением* $A_1 \cap A_2$ называется множество точек в R^n, принадлежащих как A_1, так и A_2, а *объединением* $A_1 \cup A_2$ — множество точек, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_1 или A_2; аналогично определяются пересечение и объединение любого конечного числа подмножеств в R^n.

Для множеств $A \subset R^n$ и $B \subset R^m$ мы определяем их *произведение* $A \times B \subset R^{n+m}$ как множество всех пар точек (x, y), где $x \in A$, $y \in B$.

Понятия $P_0 \in S$, $A \subset B$, $A_1 - A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cup A_2$ и $A \times B$ для подмножеств более общих пространств определяются аналогично.

Геометрия в R^n

Нам понадобится в дальнейшем следующая норма в R^n (не совпадающая с евклидовой):

$$|x_0| = |x_0^1| + |x_0^2| + \dots + |x_0^n|, \quad x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in R^n.$$

С введением расстояния между точками x и y по формуле

$d(x, y) = |x-y|$, R^n превращается в метрическое пространство, т. е. пространство, в котором определена действительная функция расстояния, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $d(x_0, y_0) > 0$, если $y_0 \neq x_0$ и $d(x_0, x_0) = 0$.
2. $d(x_0, y_0) = d(y_0, x_0)$.
3. $d(x_0, z_0) \leqslant d(x_0, y_0) + d(y_0, z_0)$.

Множество $\mathcal{G} \subset R^n$ называется открытым, если для каждой точки $x_0 \in \mathcal{G}$ существует число $r > 0$ такое, что множество точек $\{x \mid x \in R^n| : |x-x_0| < r\}$ целиком лежит в $\mathcal{G}$ (замена нормы $|x-x_0|$ евклидовой длиной $x-x_0$ привела бы к точно такому же определению). Множество $C \subset R^n$ называется *замкнутым*, если множество $R^n - C$ открыто в R^n. Открытое множество $\mathcal{G} \subset R^n$ не содержит своих граничных точек, в то время как замкнутое множество $C \subset R^n$ содержит все свои граничные точки. Объединение открытых множеств есть открытое множество, а пересечение замкнутых — замкнутое множество. Объединение всех открытых множеств, содержащихся в некотором множестве $A \subset R^n$, называется *внутренностью* множества A. Множество $N \subset R^n$, содержащее множество A в своей внутренности, называется *окрестностью* множества A. Пересечение $\overline{A}$ всех замкнутых множеств в R^n, каждое из которых содержит A, называется *замыканием* множества A в R^n. Говорят, что точка P принадлежит границе ∂A множества A, если каждая окрестность P содержит как точки, принадлежащие A, так и точки, принадлежащие его дополнению $R^n - A$. Все эти определения и свойства открытых и замкнутых множеств верны в любом метрическом пространстве.

Множество $K \subset R^n$ называется компактным, если K замкнуто и ограничено в R^n (т. е. K замкнуто и функция $|x|$ ограничена на K). *Расстоянием* от точки $P \in R^n$ до компактного множества $K \subset R^n$ называется кратчайшее евклидово расстояние от P до точек множества K. Множество $A \subset R^n$ называется выпуклым, если для любой пары точек x_0 и x_1 из A весь отрезок $\mu x_0 + (1-\mu)x_1$, где $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, лежит в A (здесь линейная комбинация векторов вычисляется покомпонентно). Открытое множество $\mathcal{G} \subset R^n$ называется *связным*, если любые две точки из $\mathcal{G}$ можно соединить непрерывной кривой, лежащей в $\mathcal{G}$. Заметим, что всё пространство R^n является открытым, замкнутым, выпуклым и связным в R^n, но не является компактным.

Система дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

может быть интерпретирована геометрически, как векторное поле с компонентами $f^i(t, x)$ в каждый момент времени t в пространстве R^n. Мы называем R^n, или его подмножество, в котором определена система $\mathcal{S}$, фазовым пространством системы $\mathcal{S}$. Решение

системы $\mathscr{S}$ в R^n представляет собой кривую $x(t) = (x^i(t))$, заданную в параметрическом виде (с параметром t), касательный вектор которой или вектор скорости $\dot{x}(t) = (\dot{x}^i(t))$ совпадает с вектором $f(t, x(t))$.

Если вектор-функция $f(t, x)$ не зависит от времени, т. е. $f(t, x) \equiv f(x)$, то система дифференциальных уравнений называется *автономной*. В этом случае векторное поле $\mathscr{S}$ можно представить как поле скорости установившегося потока жидкости в R^n. Если $f(x_0) = 0$, то x_0 есть особая точка, или точка равновесия автономной системы $\mathscr{S}$, а $x(t) = x_0$ — решение, которое на фазовой плоскости изображается одной точкой. Периодическое решение $x(t)$ системы, т. е. такое, что для некоторого постоянного периода $P > 0$ имеет место тождество $x(t) = x(t+P)$, изображается в фазовом пространстве в виде простой замкнутой кривой. Этот геометрический язык полезен при исследовании качественной картины поведения интегральных кривых системы $\mathscr{S}$.

Для того чтобы сформулировать фундаментальные теоремы существования, единственности и регулярности решений $\mathscr{S}$, необходимо ввести понятия непрерывности и дифференцируемости.

Определения непрерывности и дифференцируемости в R^n

Векторная функция $f(x)$ со значениями в R^n называется *непрерывной* на множестве $A \subset R^n$, если каждая ее компонента $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ является непрерывной функцией на A. Далее, говорят, что $f(x)$ принадлежит классу C^k, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, на открытом множестве $\mathscr{G} \subset R^n$, если каждая ее компонента $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные порядка $\leqslant k$ на множестве $\mathscr{G}$. Если $f(x)$ принадлежит всем классам C^k, то пишут $f(x) \in C^\infty$ на $\mathscr{G}$. Если $f(x)$ является аналитической функцией на $\mathscr{G}$, т. е. если каждая функция $f^i(x_1, \ldots, x^n)$ разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд в окрестности каждой точки $x \in \mathscr{G}$, то отсюда следует, что $f(x) \in C^\infty$. Как было отмечено ранее, производной векторной функции $x(t) = (x^i(t))$ по $t \in R^1$ называется вектор-функция $\dot{x}(t) = (\dot{x}^i(t))$.

Рассмотрим действительную систему дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где функция $f(t, x)$ определена и непрерывна на $\mathscr{I} \times \mathscr{G} \subset R^{1+n}$, $\mathscr{I} \subset R^1$ — открытый интервал, а $\mathscr{G}$ — открытое множество в R^n. Предположим, что функции $\partial f^i(t, x)/\partial x^j$ непрерывны на $\mathscr{I} \times \mathscr{G}$. Тогда для каждой начальной точки $(t_0, x_0) \in \mathscr{I} \times \mathscr{G}$ существует единственное решение системы $\mathscr{S}$:

$$x = \varphi(t, t_0, x_0),$$

проходящее через заданную точку x_0 в момент времени t_0:

$$\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$$

и это решение определено в $\mathcal{I} \times \mathcal{G}$ на некотором максимальном промежутке времени $\tau_-(t_0, x_0) < t < \tau_+(t_0, x_0)$, где оно удовлетворяет системе $\mathcal{S}$. Эта основная теорема существования и единственности доказывается в учебниках по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Однако нам понадобится более сильная теорема существования, нежели описанная выше, так как нам придется иметь дело с системами дифференциальных уравнений, у которых коэффициенты $f(t, x)$ являются разрывными функциями от t. Такие системы играют важную роль в теории оптимального управления, поскольку они описывают поведение управляемого объекта под действием оптимальных управлений с мгновенными переключениями. Мы будем всегда считать, что $f^i(t, x)$ — измеримые по t функции для любого фиксированного x. Измеримые функции действительного переменного t составляют весьма обширный класс функций, включающий в себя все непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, а также пределы таких функций. Довольно затруднительно привести пример неизмеримой функции; во всяком случае, мы будем сталкиваться лишь с измеримыми функциями (чаще всего с кусочно-непрерывными). Ниже мы дадим краткие сведения о функциях, измеримых и интегрируемых по Лебегу.

Определения измеримых и интегрируемых функций на R^n Слабая компактность

Подмножество $N \subset R^n$ называется *множеством меры нуль*, если для него найдется покрытие, представляющее собой объединение счетного числа n-мерных кубов, общий объем которых меньше заранее заданного числа $\varepsilon > 0$. Например, любое конечное или бесконечное счетное множество точек в R^n является множеством меры нуль. О двух функциях $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенных на $A \subset R^n$ и отличающихся друг от друга на множестве меры нуль, говорят, что они совпадают почти всюду на A. Измеримые[1]) множества в R^n определяются, как элементы некоторого наименьшего семейства множеств в R^n, содержащего все открытые множества, все замкнутые множества, все множества меры нуль из R^n, разность любых двух членов этого семейства, а также объединения и пересечения конечного или счетного числа любых его элементов. Действительная функция $h(t)$, определенная на действительном интервале $\mathcal{I}$, называется измеримой, если для любых действительных α и β множество $\{t \mid t \in \mathcal{I}$ и $\alpha < h(t) < \beta\}$ является из-

---

[1]) Речь идет об измеримости в смысле Лебега. (*Прим. ред.*)

меримым в R^1. Если функция $h(t)$ измерима на $\mathcal{J}$, то существует замкнутое подмножество $\mathcal{C}$ в $\mathcal{J}$ такое, что функция $h(t)$ непрерывна на $\mathcal{C}$, а мера множества $\mathcal{J}-\mathcal{C}$ сколь угодно мала[1]).

Если функция $h(t)$ измерима на $\mathcal{J}$, то мы можем определить для нее интеграл Лебега

$$\int\limits_{\mathcal{J}} h(t)\,dt,$$

рассматривая соответствующие пределы интегральных сумм. Функция $h(t)$ называется *интегрируемой на* $\mathcal{J}$, если записанный выше интеграл, а также интеграл от $|h(t)|$ суть конечные действительные числа. Изменение значений функции $h(t)$ на множестве меры нуль не влияет на величину интеграла. Если функция $h(t)$ кусочно-непрерывна, а интервал $\mathcal{J}$ компактен, то значение написанного выше интеграла Лебега совпадает со значением обычного риманова интеграла.

Пусть $h(t)$ интегрируема на интервале $\mathcal{J}=(t_0, t_1)$. Рассмотрим неопределенный интеграл

$$H(t)=\int\limits_{t_0}^{t} h(s)\,ds \text{ для } t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Такой интеграл представляет собой абсолютно непрерывную функцию[2]). Можно доказать, что абсолютно непрерывная функция непрерывна и дифференцируема почти всюду (т. е. на всем интервале $\mathcal{J}$, исключая множество меры нуль), и имеет место равенство (также почти всюду):

$$\frac{d}{dt}H(t)=h(t).$$

Всякая липшицева непрерывная функция $H(t)$ является абсолютно непрерывной[3]). Таким образом, основное отличие, возникающее

---

[1]) Это есть следствие известной теоремы Н. Н. Лузина о C-свойстве измеримой функции, которое может быть положено в основу самого определения измеримости. (*Прим. ред.*),

[2]) Функция f, заданная на интервале $\mathcal{J}$, называется *абсолютно непрерывной на* $\mathcal{J}$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $\mathcal{J}_k=(a_k, b_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ из $\mathcal{J}$ с общей длиной, не превосходящей δ, выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon.$$

(*Прим. ред.*)

[3]) Говорят, что функция $f(x)$ на интервале (a, b) удовлетворяет условию Липшица порядка α $(0<\alpha\leqslant 1)$, если существует константа A такая, что для всех x_1, x_2 из (a, b) имеет место неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant A\,|x_2-x_1|^{\alpha}$. (*Прим. ред.*)

из-за разрывности $f(t, x)$, состоит в том, что многие из обычных формул дифференциального и интегрального исчисления верны лишь «почти всюду».

В дальнейшем при доказательстве существования оптимальных управлений нам потребуется понятие слабой сходимости последовательности управлений. Последовательность $\{u_n(t)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ действительных или векторных интегрируемых функций на некотором действительном интервале $\mathcal{J}$ называется *слабо сходящейся к функции* $u^*(t)$, если для любой ограниченной измеримой весовой функции $g(t)$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{J}} g(t)\, u_n(t)\, dt = \int_{\mathcal{J}} g(t)\, u^*(t)\, dt.$$

Можно показать, что множество всех измеримых на конечном интервале $\mathcal{J}$ и принимающих значения из некоторого компактного выпуклого подмножества $\Omega \subset R^m$ векторных функций является слабо компактным. Это означает, что из каждой последовательности таких функций можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся на $\mathcal{J}$ к функции из данного множества. Разумеется, предельная функция $u^*(t)$ определена лишь почти всюду на $\mathcal{J}$.

Множество всех действительных функций, определенных на интервале $\mathcal{J}$, для которых

$$\int_{\mathcal{J}} |u(t)|^p\, dt < \infty \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$

составляет пространство L_p. Если отождествить функции, отличающиеся друг от друга лишь на множестве меры нуль, и ввести норму по формуле

$$\|u\|_p = \Big(\int_{\mathcal{J}} |u(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}},$$

то L_p станет полным нормированным векторным пространством (такие пространства часто называют *банаховыми*). Под пространством L_∞ мы понимаем множество всех существенно ограниченных, или ограниченных почти всюду измеримых функций с нормой $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |u(t)|$ [1]). Если $\mathcal{J}$ — компакт, то выполняется соотношение $L_p \subset L_1$ для $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Замкнутый шар в L_p для $1 < p \leqslant \infty$ (т. е. множество $\|u\|_p \leqslant B$) является слабо компактным; на самом деле, соответствующая последовательность интегралов сходится для любой весовой

---

[1]) По определению, $\operatorname{ess\,sup} |u(t)| = \inf\limits_{v(t)} \sup\limits_{t \in \mathcal{J}} |v(t)|$, где $v(t)$ пробегает множество всех ограниченных измеримых функций на $\mathcal{J}$, совпадающих с $u(t)$ почти всюду. (*Прим. ред.*)

функции $g(t) \in L_q$ на $\mathfrak{I}$, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В частности, если $p=1$, то $q=\infty$. Случай $p=q=2$ представляет особый интерес, и L_2 называют *гильбертовым пространством.*

По определению, вектор (или матрица) $u(t)$ принадлежит L_p на интервале $\mathfrak{I}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если каждая из его компонент $u^i(t)$ принадлежит L_p. Это будет тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathfrak{I}} |u(t)|^p \, dt < \infty.$$

Приступим теперь к формулировке основной теоремы существования, единственности и регулярности для систем дифференциальных уравнений. Доказательство и подробное обсуждение ее можно найти в соответствующих учебниках.

Теорема IA. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $f(t, x)$ определено на некотором открытом множестве $\mathfrak{I} \times \mathfrak{G} \subset R^{n+1}$. Предположим, что

(a) *для любого фиксированного $t \in \mathfrak{I}$ функции $f^i(t, x)$ принадлежат классу C^1 для $x \in \mathfrak{G}$;*

(b) *для любого фиксированного $x \in \mathfrak{G}$ функции $f^i(t, x)$ измеримы по t на $\mathfrak{I}$;*

(c) *для любой пары компактных подмножеств $\mathfrak{I}_c \subset \mathfrak{I}$ и $K \subset \mathfrak{G}$ существует интегрируемая функция $m(t)$ на $\mathfrak{I}_c$, такая, что*

$$|f(t, x)| \leqslant m(t) \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leqslant m(t)$$

для всех $(t, x) \in \mathfrak{I}_c \times K$.

Тогда для любых начальных условий (t_0, x_0) из $\mathfrak{I} \times \mathfrak{G}$ существует единственное решение системы $\mathscr{S}$

$$x = \varphi(t, t_0, x_0),$$

такое, что

$$\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0,$$

определенное на некотором максимальном промежутке времени

$$\tau_-(t_0, x_0) < t < \tau_+(t_0, x_0).$$

Кроме того, вектор-функция $\varphi(t, t_0, x_0)$ определена и непрерывна на некотором открытом множестве $D \subset R^{1+1+n}$. Для любых фиксированных t_0 и x_0 функция $\varphi(t, t_0, x_0)$ абсолютно непрерывна по t и удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi(t, t_0, x_0)}{dt} = f(t, \varphi(t, t_0, x_0))$$

почти всюду на $\tau_- < t < \tau_+$. Для любых фиксированных t и t_0 функция $\varphi(t, t_0, x_0)$ принадлежит классу C^1 по x_0 и вектор-функция

$$\frac{\partial \varphi(t, t_0, x_0)}{\partial x_0^j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

абсолютно непрерывна по t и удовлетворяет линейной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x_0^j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(t, \varphi(t, t_0, x_0))\left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial x_0^j}\right).$$

Эта основная теорема имеет большое число различных обобщений и модификаций. Мы перечислим их в следующих замечаниях.

Замечания. 1. Предположим, что коэффициенты $f(t, x, \lambda)$ системы $\mathcal{S}$ зависят от действительного векторного параметра $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^m)$. Если $f(t, x, \lambda)$ определена на открытом множестве $\mathcal{I} \times \mathcal{G} \times \Lambda \subset R^{1+n+m}$ и если для каждого $\lambda_0 \in \Lambda$ выполняются предположения (a), (b) и (c) нашей теоремы, то система $\mathcal{S}$ имеет решение

$$x = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0),$$

проходящее через точку (t_0, x_0) при $\lambda = \lambda_0$. Далее, если предположения (a) и (c) усилить следующим образом:

(a′) для любого фиксированного $t \in \mathcal{I}$ функции $f^i(t, x, \lambda)$ принадлежат классу C^k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ по (x, λ) из $\mathcal{G} \times \Lambda$ и

(c′) для любой тройки компактных подмножеств $\mathcal{I}_c \subset \mathcal{I}$, $K \subset \mathcal{G}$, $L \subset \Lambda$ существует интегрируемая функция $m(t)$ на $\mathcal{I}_c$, такая, что

$$|Df(t, x, \lambda)| \leqslant m(t) \quad \text{для всех} \quad (t, x, \lambda) \in \mathcal{I}_c \times K \times L$$

и для любого частного дифференцирования D порядка $\leqslant k$ по (x, λ), то решение $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ будет непрерывной функцией на некотором открытом множестве $\mathcal{G}' \subset R^{1+1+n+m}$, принадлежащей классу C^k по (x_0, λ).

2. Если функция $f(t, x, \lambda)$ непрерывна на множестве $\mathcal{I} \times \mathcal{G} \times \Lambda \subset R^{1+n+m}$ и удовлетворяет предположениям (a′) и (c′), то предположение (b) выполняется автоматически. В этом случае решение $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ принадлежит классу C^1 в $\mathcal{G}' \subset R^{1+1+n+m}$ и удовлетворяет системе $\mathcal{S}$ в каждой точке интервала $\tau_- < t < \tau_+$.

3. Во многих задачах можно установить, что максимальный промежуток времени $\tau_- < t < \tau_+$ не ограничен справа ($\tau_+ = +\infty$). В частности (как можно показать), так и будет, если $\mathcal{I} = (t_0, +\infty)$ и решение, проходящее через точку (t_0, x_0), лежит в компактном подмножестве $K \subset \mathcal{G} \subset R^n$ для $t \geqslant t_0$.

Приложение II

Алгебраическая теория линейных дифференциальных уравнений

В примерах 2 и 3 раздела 1 исследовались линейные процессы управления, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка, причем задача сводилась к изучению систем дифференциальных уравнений первого порядка на фазовой плоскости. Линейные процессы более высоких порядков сводятся к линейным системам, имеющим следующий общий вид:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= a_1^1(t)\,x^1 + a_2^1(t)\,x^2 + \ldots + a_n^1(t)\,x^n + b_1^1(t)\,u^1 + \ldots + b_m^1(t)\,u^m,\\
\dot{x}^2 &= a_1^2(t)\,x^1 + a_2^2(t)\,x^2 + \ldots + a_n^2(t)\,x^n + b_1^2(t)\,u^1 + \ldots + b_m^2(t)\,u^m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}^n &= a_1^n(t)\,x^1 + a_2^n(t)\,x^2 + \ldots + a_n^n(t)\,x^n + b_1^n(t)\,u^1 + \ldots + b_m^n(t)\,u^m.
\end{aligned}
$$

Эта линейная система дифференциальных уравнений описывает некоторую физическую систему с m входными (управляющими) переменными

$$
u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \ldots \\ u^m \end{bmatrix}
$$

и с n выходными (управляемыми) переменными

$$
x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{bmatrix}.
$$

Процесс (объект) описывается заданием коэффициентов, возможно, зависящих от времени и образующих матрицы

$$
A(t) = \begin{bmatrix} a_1^1(t) & a_2^1(t) & \ldots & a_n^1(t) \\ a_1^2(t) & a_2^2(t) & \ldots & a_n^2(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n(t) & a_2^n(t) & \ldots & a_n^n(t) \end{bmatrix}
$$

и

$$
B(t) = \begin{bmatrix} b_1^1(t) & b_2^1(t) & \ldots & b_m^1(t) \\ b_1^2(t) & b_2^2(t) & \ldots & b_m^2(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^n(t) & b_2^n(t) & \ldots & b_m^n(t) \end{bmatrix}.
$$

Матрица $A(t)$ с коэффициентами $a^i_j(t)$ имеет порядок $n\times n$, а матрица $B(t)=(b^i_j(t))$ — порядок $n\times m$.

Линейный процесс управления

$$\dot{x}^i=\sum_{j=1}^{n} a^i_j(t)\,x^j+\sum_{k=1}^{m} b^i_k(t)\;u^k, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

или, применяя суммирование по повторяющимся индексам,

$$\dot{x}^i=a^i_j(t)\,x^j+b^i_k(t)\,u^k, \qquad i=1,2,\ \ldots,\ n,$$

записывается в матричных обозначениях так:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u.$$

Суммы и произведения матриц и векторов определены так, чтобы запись $\mathscr{L}$ в матричном виде была наиболее удобной. Ниже мы перечислим основные факты и формулы матричной алгебры и матричного исчисления, которые могут понадобиться нам в дальнейшем. Читатель может обращаться к этому справочному материалу по мере надобности, при чтении следующих глав книги.

Алгебра постоянных матриц

Матрицей называется прямоугольная таблица, элементами которой могут быть числа или функции. Векторы и скаляры являются частными случаями матриц. *Рангом* постоянной $(n\times m)$-матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк (оно совпадает с числом линейно независимых столбцов). Пусть $F=(f^i_j)$ и $G=(g^i_j)$ — $(n\times m)$-матрицы с действительными постоянными элементами. *Линейной комбинацией* матриц $\alpha F+\beta G$ называется $(n\times m)$-матрица с элементами $\alpha f^i_j+\beta g^i_j$ в i-й строке и j-м столбце. Пусть $H=(h^j_k)$ есть $(m\times r)$-матрица. *Произведением* GH матриц G и H называется $(n\times r)$-матрица с элементами $\left(\sum_{j=1}^{m} g^i_j h^j_k\right)$ в i-й строке и k-м столбце. Вообще говоря, $GH\neq HG$ даже в случае квадратных матриц G и H, когда второе произведение имеет смысл. Такое правило умножения матриц позволяет нам написать

$$(a^i_j x^j)=Ax \quad \text{и} \quad (b^i_k u^k)=Bu$$

в матричной записи задачи $(\mathscr{L})$. Пусть $A=(a^i_j)$ квадратная $(n\times n)$-матрица. *Транспонированной матрицей* A' называется матрица, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит элемент a^j_i. Иначе говоря, A' получается из A отражением относительно главной диагонали. Очевидно, что $(A')'=A$. Если $A'=A$, то матрица называется *симметричной*. Если x есть вектор-столбец, то x' — вектор-строка. Если A — симметричная матрица, и $x'Ax>0$

(или $\geqslant 0$) для всех действительных векторов $x \neq 0$, то матрица A называется *положительно* (или *неотрицательно*) *определенной*.

Пусть A — квадратная $(n \times n)$-матрица, и пусть для любого вектора y существует единственный вектор x, такой, что $y = Ax$. Тогда матрица A называется *невырожденной*, и решение x выражается через y в виде $x = A^{-1}y$. *Обратная* матрица A^{-1}, существующая лишь в случае, если определитель матрицы A не равен нулю, может быть вычислена, если выразить x через y из системы $y = Ax$ с помощью обычных методов. Очевидно, что $(A^{-1})^{-1} = A$.

Следующие правила матричной алгебры легко доказываются для любых действительных постоянных матриц F, G и H:

1) $(F+G)+H = F+(G+H)$,

2) $F+G = G+F$,

3) $F+(-F) = 0$ или $F-F = 0$, где 0 — $n \times m$-матрица, состоящая из нулей и $-F = (-1)F$:

4) $F+0 = F$,

5) $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$ для чисел α, β,

6) $\alpha(F+G) = \alpha F + \alpha G$,

7) $(\alpha+\beta)F = \alpha F + \beta F$,

8) $1F = F$, $0F = 0$ для числа 0 и нулевой матрицы 0.

Если размеры матриц таковы, что можно образовать произведения этих матриц, то верны следующие правила:

9) $F(\alpha G + \beta H) = \alpha FG + \beta FH$ и $(\alpha G + \beta H)F = \alpha GF + \beta HF$,

10) $(FG)H = F(GH)$.

Для квадратных действительных $(n \times n)$-матриц имеем

11) $IA = AI = A$, $0A = A0 = 0$,

где I — единичная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные равны нулю, т. е. $I = \delta_j^i$, где

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

12) $(A+B)' = A' + B'$,

13) $(AB)' = B'A'$.

Для квадратных невырожденных $(n \times n)$-матриц имеем

14) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ и $AA^{-1} = A^{-1}A = I$,

15) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Для квадратной $(n \times n)$-матрицы A определим n собственных или характеристических значений $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, которые являются корнями (считая кратные) характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Если A — действительная симметричная матрица, то все ее соб-

ственные значения действительны и существует невырожденная действительная матрица P, такая, что

$$PAP^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Если матрица A имеет n различных комплексных собственных значений, то существует невырожденная комплексная матрица P такая, что PAP^{-1} есть диагональная матрица. Правила 1)—15) верны и для матриц с комплексными элементами.

Матричное исчисление

Норму $(n\times m)$-матрицы $A=(a_j^i)$ с действительными или комплексными элементами определим следующим образом: $|A|=\sum_{i,\,j}|a_j^i|$.

Тогда легко проверить следующие неравенства:

1) $|\alpha A|\leqslant|\alpha||A|$, где α—число,
2) $|A+B|\leqslant|A|+|B|$,
3) $|AB|\leqslant|A|\cdot|B|$,

где размеры матриц A и B таковы, что их суммы и произведения определены. В частности, для вектора x с нормой $|x|=\sum_{i=1}^{m}|x^i|$, имеем

4) $|Ax|\leqslant|A||x|$.

Если элементы матрицы $A(t)=(a_j^i(t))$ представляют собой функции аргумента t, определенные на некотором интервале $\mathcal{J}$, то можно определить

$$\int_{\mathcal{J}} A(t)\,dt \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}A(t)$$

как матрицы с элементами, соответственно, $\int_{\mathcal{J}} a_j^i(t)\,dt$ и $\dot a_j^i(t)$. Таким образом, матрица $A(t)$ измерима, интегрируема и непрерывна, абсолютно непрерывна или принадлежит классу C^k, в том случае, когда все ее элементы обладают соответствующим свойством. Кроме того,

5) $\left|\int_{\mathcal{J}} A(t)\,dt\right|\leqslant\int_{\mathcal{J}}|A(t)|\,dt$,

6) $\left|\frac{d}{dt}\,|A(t)|\right| \leqslant \left|\frac{dA}{dt}\right|$

всюду, где обе части написанных неравенств имеют смысл.

Для квадратной, действительной или комплексной $(n\times n)$-матрицы A можно определить матрицу

$$\exp A = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots$$

При этом сходимость последовательности матриц или ряда определяется покомпонентно. Используя свойства обычных степенных рядов, легко показать, что:

7) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ и $e^0 = I$,

8) $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$, если $AB = BA$,

9) $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} \cdot A$,

10) $\exp(PAP^{-1}) = Pe^A P^{-1}$

и

$$\exp\{P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,P^{-1}\} = P\ \mathrm{diag}\{e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}\}P^{-1}.$$

Если каждое собственное значение λ_i матрицы A удовлетворяет неравенству $\mathrm{Re}\,\lambda_i < \lambda$, то имеет место следующая важная оценка:

11) $|e^{At}| \leqslant ce^{\lambda t}$ при $0 \leqslant t < \infty$

с некоторой постоянной $c > 0$. Если все собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенству $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, то A называется *устойчивой* матрицей, и $|e^{At}| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Применим теперь эти правила и законы матричного исчисления к общей теории систем линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}^i = a^i_j(t)\,x^j, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

или, в матричных обозначениях,

$$\dot{x} = A(t)\,x.$$

Здесь $A(t) = (a^i_j(t))$ — действительная или комплексная $(n\times n)$-матрица, элементы которой есть функции от t, определенные на некотором действительном интервале $\mathcal{J}$. Совокупность n векторов-столбцов

$$x^1 = \varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \varphi^1_1(t) \\ \vdots \\ \varphi^n_1(t) \end{bmatrix}, \ \ldots, \ x^n = \varphi_n(t) = \begin{bmatrix} \varphi^1_n(t) \\ \vdots \\ \varphi^n_n(t) \end{bmatrix}$$

образуют *фундаментальную систему*, или *базис*, решений на $\mathcal{J}$,

если $(n\times n)$-матрица

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1^1(t) & \ldots & \varphi_n^1(t)\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \varphi_1^n(t) & \ldots & \varphi_n^n(t)\end{bmatrix}$$

является невырожденной на всем интервале $\mathcal{I}$. Таким образом, столбцы некоторой $(n\times n)$-матрицы $X(t)$ образуют базис решений уравнения

$$\dot{x}=A(t)x \quad \text{на} \quad \mathcal{I}$$

в том случае, когда матрица $X(t)$ есть фундаментальное матричное решение или, короче, фундаментальная матрица этого уравнения, т. е.

$$\frac{d}{dt}X(t)=A(t)X(t)$$

и

$$\det X(t)\neq 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{I}.$$

Если матрица $A(t)$ интегрируема на каждом компактном подынтервале интервала $\mathcal{I}$, то для заданных начальных условий $t_0\in\mathcal{I}$ и x_0 существует единственная абсолютно непрерывная фундаментальная матрица $\Phi(t)$ (или $\Phi(t, t_0)$), определенная на интервале $\mathcal{I}$, причем $\Phi(t_0)=I$. Итак, решение системы $\dot{x}=A(t)x$ с начальным условием $x(t_0)=x_0$ имеет вид

$$x(t)=\Phi(t)x_0,$$

причем это решение будет действительным, если матрицы A и x_0 действительны. Если $x_0=0$, то $x(t)\equiv 0$ на всем интервале $\mathcal{I}$; поэтому *нетривиальное* решение $x(t)$ не может обращаться в нуль на интервале $\mathcal{I}$. Если $A(t)=A$ — постоянная матрица, то фундаментальная матрица, обращающаяся в единичную при $t=t_0$, имеет вид

$$\Phi(t)=e^{A(t-t_0)}.$$

Рассмотрим теперь неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+b(t),$$

где $(n\times n)$-матрица A и n-мерный вектор-столбец $b(t)$ интегрируемы на каждом компактном подынтервале данного интервала $\mathcal{I}$. Кроме того, пусть заданы начальные условия $t_0\in\mathcal{I}$ и x_0. Тогда существует единственное решение $x(t)$ на $\mathcal{I}$, удовлетворяющее условию $x(t_0)=x_0$. Это решение $x(t)$ находится методом вариации произвольных постоянных по формуле

$$x(t)=\Phi(t)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b(s)\,ds,$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной системы $\dot{x}=A(t)x$, причем $\Phi(t_0)=I_0$. Непосредственной подстановкой можно проверить, что указанная выше формула действительно дает решение неоднородной системы. В самом деле,

$$\frac{d}{dt}x(t)=A(t)\left[\Phi(t)x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)b(s)\,ds\right]+$$
$$+\Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t)=A(t)x(t)+b(t).$$

Кроме того, это решение удовлетворяет начальным условиям

$$x(t_0)=\Phi(t_0)x_0=Ix_0=x_0.$$

Если $A(t)=A$ — постоянная матрица, и $t_0=0$, то

$$\Phi(t)=e^{At}$$

и формула вариации произвольных постоянных принимает вид

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds.$$

Оценки качественного поведения решения $x(t)$, встречающиеся в теории управления, а также в теории устойчивости, чаще всего основаны на анализе основной формулы вариации произвольных постоянных.

Следующий простой пример иллюстрирует применение теории матриц к решению линейных систем дифференциальных уравнений.

Пример. Рассмотрим демпфированный гармонический осциллятор

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=f(t),$$

где b и k — действительные постоянные, а $f(t)$ — действительная функция, интегрируемая на любом отрезке времени. Пусть $k>0$ и $k^2>b^2$. Рассмотрим однородную систему

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},$$

где

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -k^2 & -2b\end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что фундаментальная матрица решений этой системы имеет вид

$$e^{At}=\frac{k}{\omega}e^{-bt}\begin{bmatrix}\sin(\omega t+\alpha) & \frac{1}{k}\sin\omega t\\ -b\sin(\omega t+\alpha)+\omega\cos(\omega t+\alpha) & \frac{-b}{k}\sin\omega t+\frac{\omega}{k}\cos\omega t\end{bmatrix},$$

где $\omega=\sqrt{k^2-b^2}$, $\sin\alpha=\frac{\omega}{k}$, $\cos\alpha=\frac{b}{k}$. Это решение проще всего вычислить с помощью элементарных методов решения уравнения

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=0$$

при начальных условиях $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$ или $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$. Решение неоднородного уравнения с начальными условиями (x_0, y_0) при $t=0$ дается формулой

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}=e^{At}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}\begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \end{bmatrix} ds.$$

Первая компонента векторного решения

$$x(t)=\frac{k}{\omega}e^{-bt}\left[x_0\sin(\omega t+\alpha)+\frac{y_0}{k}\sin\omega t\right]+ \\ +\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t f(s)e^{-b(t-s)}\sin\omega(t-s)\,ds$$

представляет собой искомое решение данного скалярного неоднородного линейного дифференциального уравнения.

ГЛАВА 2

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

В этой главе будет подробно изложена теория оптимального по быстродействию управления для линейных процессов, определение которых будет дано в разделе 2.1.

В разделах 2.2 и 2.3 рассматриваются качественные аспекты теории управления. Здесь дается определение множества достижимости, как множества всех точек, в которые может быть переведена система из начальной точки x_0 с помощью допустимых управлений $u(t)$. Основные факты теории управляемости мы получим, изучая геометрическую структуру множества достижимости.

В последующих разделах мы обратимся к количественным аспектам теории управления. Здесь будет доказано существование оптимальных управлений и показано, что оптимальные управления обладают определенными максимальными и экстремальными свойствами (принцип максимума). Затем мы синтезируем искомые оптимальные управления при помощи соответствующих цепей обратной связи. Все понятия будут вводиться для общего случая неавтономных линейных систем, однако подробное исследование будет проводиться лишь для систем с постоянными коэффициентами.

Приложение к этой главе содержит основные определения и свойства выпуклых множеств и, кроме того, доказательства некоторых математически более сложных теорем, обобщающих результаты раздела 2.2 относительно управляемости линейных систем.

2.1. Линейные управляемые процессы

Рассмотрим линейный процесс, описываемый системой линейных дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u + v(t).$$

Здесь коэффициенты $A(t)$, $B(t)$, $v(t)$ обозначают заданные матрицы и векторы, описываемые ниже, и наша задача заключается в том, чтобы выбрать управление $u(t)$ так, чтобы соответствующая тра-

ектория $x(t)$ переводила бы систему из начального состояния x_0 в некоторое желаемое конечное состояние в R^n.

На протяжении всей этой главы предполагается, что коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям:

(1) $A(t)$ — $(n\times n)$-матрица, $B(t)$ — $(n\times m)$-матрица, а $v(t)$ — n-мерный вектор-столбец; все они действительны и измеримы на всей оси времени t.

(2) Нормы $|A(t)|$, $|B(t)|$ и $|v(t)|$ интегрируемы на любом компактном подмножестве оси t.

(3) Управление $u(t)$ является действительным, ограниченным, измеримым m-мерным вектором, определенном на некотором интервале $\mathcal{I}$: $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (обычно $t_0 < t < \infty$), принимающим значения из непустого ограничивающего множества $\Omega \subset R^m$ и, возможно, удовлетворяющим еще и некоторым другим указанным ниже ограничениям.

Решение $x(t)$ представляет собой действительный, абсолютно непрерывный n-мерный вектор на $\mathcal{I}$, удовлетворяющий соответствующей системе дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{L}_u) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u(t) + v(t)$$

(основные вопросы теории систем линейных дифференциальных уравнений изложены в приложении 2 к главе 1).

В некоторых случаях мы будем накладывать на коэффициенты системы $\mathcal{L}$ или на множество Ω дополнительные ограничения. Однако всюду в главе 2 мы считаем, что условия, гарантирующие существование решения системы дифференциальных уравнений, выполняются, и что, в частности, для решения $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет место формула вариации произвольных постоянных

$$x(t) = \Phi(t)\,x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,[B(s)\,u(s) + v(s)]\,ds,$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальное матричное решение однородной системы

$$\dot{x} = A(t)\,x,$$

удовлетворяющее условию $\Phi(t_0) = I$. Если $A(t) = A$ — постоянная матрица, то $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$.

2.2. Управляемость: множество достижимости

Рассмотрим линейную систему

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u + v(t).$$

Для заданного начального состояния x_0 изучим множество $K(t_1)$ точек R^n, в которые x_0 может быть переведена с помощью управлений $u(t) \in \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Определение. Рассмотрим систему управления $\mathscr{L}$ с исходной точкой x_0 и со множеством допустимых управлений $u(t) \subset \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Пусть через $x(t)$ обозначаются соответствующие решения, проходящие через точку $x(t_0) = x_0$. *Множеством достижимости* $K(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ назовем совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в R^n. Обычно для краткости мы будем опускать все величины, кроме конечного момента времени t_1 в обозначении множества достижимости $K(t_1)$. Для удобства положим $K(t_0) = x_0$.

Заметим, что $K(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ есть просто результат сдвига $K(\mathscr{L}, \Omega, 0, t_0, t_1)$ на вектор $\Phi(t_1) x_0$. Поэтому геометрия множества достижимости $K(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ не зависит от начальной точки x_0. Для автономных линейных систем имеет значение лишь разность $t_1 - t_0$, поэтому мы будем обычно полагать $t_0 = 0$.

Ограничивающее множество Ω будет, как правило, выпуклым и компактным. Оно может, например, представлять собой m-мерный куб

$$|u^i| \leqslant 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

В приложении к этой главе мы докажем следующую теорему (предполагая для простоты доказательства множество Ω выпуклым, хотя эта теорема остается верной и для произвольного компактного множества Ω).

Теорема 1. *Рассмотрим линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t) x + B(t) u + v(t)$$

с компактным выпуклым ограничивающим множеством Ω, *начальным состоянием* x_0 *и управлениями* $u(t)$, *определенными на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. *Тогда множество достижимости* $K(t_1)$ *является компактным, выпуклым и непрерывно зависит от* t_1 *при* $t_1 \geqslant t_0$.

Доказательство. Для того чтобы доказать, что множество $K(t_1)$ есть компакт, т. е. замкнуто и ограничено в R^n, покажем, что из любой последовательности точек $x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_r(t_1), \ldots$ в $K(t_1)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой предельной точке $\overline{x}(t_1)$ в $K(t_1)$. Рассмотрим соответствующие решения $x_r(t)$ и управления $u_r(t) \subset \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ для $r = 1, 2, 3, \ldots$ По формуле вариации произвольных постоянных имеем

$$x_r(t) = \Phi(t) x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) [B(s) u_r(s) + v(s)] \, ds,$$

где $\Phi(t)$ — соответствующее фундаментальное матричное решение, такое, что $\Phi(t_0) = I$. Множество управлений $u(t) \subset \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ является слабо компактным (в самом деле, множество всех функций $B(t) u(t)$ слабо компактно, что следует из леммы $1A$ приложения к главе 2); поэтому существует подпоследовательность $u_{r_i}(t)$,

слабо сходящаяся к некоторому управлению $\overline{u}(t) \subset \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, так что

$$\lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s) u_{r_i}(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s) \overline{u}(s)\, ds.$$

Пусть $\overline{x}(t)$ — решение, соответствующее управлению $\overline{u}(t)$. Тогда на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ имеем

$$\overline{x}(t) = \Phi(t) x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \, [B(s) \overline{u}(s) + v(s)]\, ds = \lim_{i \to \infty} x_{r_i}(t).$$

Таким образом,

$$\lim_{i \to \infty} x_{r_i}(t_1) = \overline{x}(t_1) \in K(t_1)$$

и, следовательно, множество $K(t_1)$ есть компакт.

Для доказательства выпуклости $K(t_1)$ покажем, что отрезок

$$(1-\lambda) x_0(t_1) + \lambda x_1(t_1), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

соединяющий две точки $x_0(t_1)$ и $x_1(t_1)$ из $K(t_1)$, весь лежит в $K(t_1)$. Пусть $u_0(t)$ и $u_1(t)$ — управления, соответствующие решениям $x_0(t)$ и $x_1(t)$. Определим управления $u_\lambda(t) \subset \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ следующим образом:

$$u_\lambda(t) = (1-\lambda) u_0(t) + \lambda u_1(t).$$

Решение $x_\lambda(t)$, соответствующее $u_\lambda(t)$, имеет вид

$$x_\lambda(t) = \Phi(t) x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) [B(s) u_\lambda(s) + v(s)]\, ds.$$

Следовательно,

$$x_\lambda(t) = (1-\lambda) \left\{ \Phi(t) x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) [B(s) u_0(s) + v(s)]\, ds \right\} +$$
$$+ \lambda \left\{ \Phi(t) x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) [B(s) u_1(s) + v(s)]\, ds \right\},$$

и поэтому

$$x_\lambda(t_1) = (1-\lambda) x_0(t_1) + \lambda x_1(t_1),$$

т. е. $K(t_1)$ — выпуклое множество.

Будем теперь считать совокупность объектов $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0)$ фиксированной и изучим зависимость множества $K(t_1)$ от t_1 $(t_1 > t_0)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что расстояние между множествами $K(t_1)$ и $K(t_2)$ становится

меньше ε, как только $|t_1-t_2|<\delta$, т. е. мы покажем, что соответствие

$$t \to K(t) \quad \text{для} \quad t > t_0$$

есть непрерывное отображение действительного луча в метрическое пространство, образованное непустыми компактными подмножествами в R^n (см. приложение 1 главы 1). Здесь под расстоянием между множествами $K(t_1)$ и $K(t_2)$ понимается нижняя грань всех $\varepsilon>0$ таких, что каждая точка множества $K(t_2)$ находится не далее, чем на ε от некоторой точки $K(t_1)$, так же как и каждая точка $K(t_1)$ не далее, чем на ε от некоторой точки $K(t_2)$. Пусть $\hat{u}(t)\subset\Omega$ — управление с соответствующим решением $\hat{x}(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1+1$. Тогда для $t_0<t_1$, $t_2<t_1+1$ имеем

$$\hat{x}(t_2)-\hat{x}(t_1)=\Phi(t_2)\int_{t_0}^{t_2}\Phi^{-1}(s)\,[B(s)\,\hat{u}(s)+v(s)]\,ds-$$
$$-\Phi(t_2)\int_{t_0}^{t_1}\Phi^{-1}(s)\,[B(s)\,\hat{u}(s)+v(s)]\,ds+$$
$$+[\Phi(t_2)-\Phi(t_1)]\left\{\int_{t_0}^{t_1}\Phi(s)^{-1}\,[B(s)\,\hat{u}(s)+v(s)]\,ds+x_0\right\}.$$

На отрезке $t_0\leqslant t\leqslant t_1+1$ непрерывные матричные функции $\Phi(t)$ и $\Phi^{-1}(t)$ ограничены по норме, т. е.

$$|\Phi(t)|<C_1, \quad |\Phi(t)^{-1}|<C_1,$$

для некоторой постоянной C_1. В силу интегрируемости $|B(t)|$ и $|v(t)|$ и ограниченности $|\hat{u}(t)|$ получим оценку

$$|x_0|+\int_{t_0}^{t_1+1}|\Phi^{-1}(s)|\,|B(s)\,\hat{u}(s)+v(s)|\,ds<C_2.$$

Поскольку интеграл есть непрерывная функция пределов интегрирования

$$\left|\int_{t_1}^{t}\Phi^{-1}(s)\,[B(s)\,\hat{u}(s)+v(s)]\,ds\right|<\frac{\varepsilon}{2C_1},$$

и

$$|\Phi(t)-\Phi(t_1)|\leqslant\left|\int_{t_1}^{t}A(s)\,\Phi(s)\,ds\right|<\frac{\varepsilon}{2C_2}$$

для заданного $\varepsilon>0$ и $|t-t_1|<\delta$, если δ выбрать достаточно

малым. Таким образом, для $|t_2-t_1|<\delta$ имеем

$$|\hat{x}(t_2)-\hat{x}(t_1)|\leqslant|\Phi(t_2)|\cdot\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}\Phi^{-1}(s)\,[B(s)\,\hat{u}(s)+v(s)]\,ds\right|+$$
$$+|\Phi(t_2)-\Phi(t_1)|\left[\int\limits_{t_0}^{t_1+1}|\Phi^{-1}(s)|\,|B(s)\,\hat{u}(s)+v(s)|\,ds+|x_0|\right]$$

и

$$|\hat{x}(t_2)-\hat{x}(t_1)|<C_1\cdot\frac{\varepsilon}{2C_1}+C_2\cdot\frac{\varepsilon}{2C_2}=\varepsilon.$$

Теперь пусть точка $\hat{x}(t_1)\in K(t_1)$ соответствует управлению $\hat{u}(t)$ на $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Определим $\hat{u}(t)\subset\Omega$ на $t_0\leqslant t\leqslant t_1+1$, приписав ему значения $\hat{u}(t)=\hat{u}(t_1)$ на $t_1\leqslant t\leqslant t_1+1$, и пусть $\hat{x}(t)$ будет соответствующим ему решением. Тогда $\hat{x}(t_2)\in K(t_2)$ и $|\hat{x}(t_2)-\hat{x}(t_1)|<\varepsilon$. С другой стороны, если $\tilde{x}(t_2)$ есть точка из $K(t_2)$, соответствующая управлению $\tilde{u}(t)$ на $t_0\leqslant t\leqslant t_2$, то снова продолжим $\tilde{u}(t)\subset\Omega$ на интервал $t_0\leqslant t\leqslant t_1+1$, и получим $|\tilde{x}(t_2)-\tilde{x}(t_1)|<\varepsilon$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что расстояние между $K(t_1)$ и $K(t_2)$ будет меньше ε, как только $|t_1-t_2|<\delta$, где $\delta>0$ зависит от ε и t_1. Аналогично можно показать, что расстояние между $K(t_0)=x_0$ и $K(t_1)$ меньше ε, если $|t_1-t_0|$ достаточно мало́. Таким образом, $K(t_1)$ непрерывно зависит от момента времени $t_1\geqslant t_0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если P — внутренняя точка множества $K(t_1)$, то существует окрестность N точки P и $\delta>0$ такие, что любое множество $K(t_2)$ при $|t_2-t_1|<\delta$ содержит N внутри себя.*

Доказательство. Пусть $x_0(t_1)$, $x_1(t_1)$, ..., $x_n(t_1)$ — вершины n-мерного симплекса S (выпуклой оболочки множества, состоящего из $n+1$ независимой точки[1])), лежащего внутри множества $K(t_1)$; P — центроид этого симплекса, а N — внутренность симплекса, полученного из данного уменьшением всех длин вдвое. Пусть соответствующие управления $u_0(t)$, $u_1(t)$, ..., $u_n(t)$ продолжены на интервал $t_0\leqslant t\leqslant t_1+1$.

Выберем $\varepsilon>0$ столь малым, чтобы любой n-мерный симплекс Q_0, Q_1, Q_2, ..., Q_n, такой, что $|Q_i-x_i(t_1)|<\varepsilon$, содержал N в своей внутренности. По теореме 1 существует $\delta>0$ такое, что неравенства $|x_i(t_2)-x_i(t_1)|<\varepsilon$, $i=0, 1, \ldots, n$, выполняются при $|t_2-t_1|<\delta$. Поскольку $K(t_2)$ содержит $x_0(t_2)$, ..., $x_n(t_2)$ и является выпуклым множеством, то и множество N должно находиться внутри $K(t_2)$.

---

[1]) Точки M_0, M_1, ..., M_n в R^m независимы, если векторы $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$, ..., $\overline{M_0M_n}$ образуют линейно независимую систему. (*Прим. ред.*)

Замечания. В теореме 1А приложения к данной главе доказано утверждение теоремы 1 и ее следствие, без требования выпуклости множества Ω. Выпуклость Ω не гарантируется в дальнейшем изложении и поэтому мы будем использовать теорему 1А. Действительно, в теореме 4 нам придется иметь дело с ограничивающими множествами Ω, которые вовсе не являются выпуклыми.

Часто бывает необходимо выбирать управления $u(t)$, лежащие на границе $\partial\Omega$ множества $\Omega \subset R^m$. Вообще оптимальное управление, как это будет показано ниже, обладает такими экстремальными свойствами. Это будет следовать из того геометрического факта, что конечная точка $x^*(t^*)$ оптимальной траектории $x^*(t)$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ находится на границе $\partial K(t^*)$ множества достижимости $K(t^*)$. Точнее, мы покажем, что $x^*(t^*)$ лежит в той части $\partial K(t^*)$, которая не входит ни в какое множество $K(t)$ для $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Определение. Пусть $K(t_1)$ — множество достижимости для процесса $\mathscr{L}$ с начальным состоянием x_0 и управлениями $u(t) \subset \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Будем называть точку $P \in \partial K(t_1)$ лежащей на новой границе $K(t_1)$ в том случае, если P не принадлежало никакому множеству $K(t)$ для $t_0 \leqslant t < t_1$, т. е.

$$P \in [\partial K(t_1) - \cup_{[t_0 \leqslant t < t_1]} K(t)].$$

Ниже мы будем исследовать управления $u(t)$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, которые переводят x_0 в точки, лежащие на границе $\partial K(t_1)$. Такие управления, называемые экстремальными, в основном определяют геометрию множества $K(t)$ и играют важную роль в решении задачи оптимального по быстродействию управления системой $\mathscr{L}$.

Определение. Пусть $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — управление для линейной системы

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t),$$

принадлежащее ограничивающему подмножеству $\Omega \subset R^m$, а x_0 — начальное состояние системы в момент t_0. Если конечная точка $x(t_1)$ соответствующего решения $x(t)$ лежит на границе $\partial K(t_1)$ множества достижимости $K(t_1)$, то $u(t)$ называется экстремальным управлением, а $x(t)$ — экстремальным решением на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Для того чтобы дать аналитическое выражение условия экстремальности, обратимся к линейной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x$$

и к соответствующей сопряженной системе

$$\dot{\eta} = -\eta A(t).$$

Здесь $\eta(t)$ — n-мерный вектор-строка. Каждое решение последнего

уравнения имеет вид $\eta(t)=\eta_0\Phi^{-1}(t)$, где η_0 — постоянный вектор, а $\Phi(t)$ фундаментальное матричное решение системы

$$\dot{x}=A(t)\,x$$

с $\Phi(t_0)=I$. Эту формулу для $\eta(t)$ легко проверить непосредственной подстановкой $\eta(t)$ в систему. Она дает решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $\eta(t_0)=\eta_0$. Если $\eta_0\neq 0$, то решение $\eta(t)$ будет нетривиальным, т. е. не будет обращаться в нуль на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Если $A(t)=A$ — постоянная матрица, то

$$\eta(t)=\eta_0 e^{-(t-t_0)A}.$$

Следующая теорема 2 дает нам основной аналитический аппарат теории оптимального по быстродействию управления линейными процессами, и является эквивалентом принципа максимума Понтрягина для этого случая. Теорема 2 утверждает, что управление будет экстремальным, только если оно максимально (в смысле главы 1), что дает нам возможность в дальнейшем изложении обойтись без выражения «максимальное управление».

Теорема 2. *Рассмотрим линейный управляемый процесс в* R^n

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u+v(t)$$

с компактным ограничивающим множеством Ω *и начальным положением* x_0 *в момент* t_0. *Управление* $u(t)\subset\Omega$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ *является экстремальным тогда и только тогда, когда существует нетривиальное решение* $\eta(t)$ *системы*

$$\dot{\eta}=-\eta A(t),$$

такое, что для почти всех t *из интервала* $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ *имеет место равенство*

$$\eta(t)\,B(t)\,u(t)=\max_{u\in\Omega}\eta(t)\,B(t)\,u.$$

Доказательство. Предположим, что управление $u(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ экстремально и, следовательно, переводит x_0 в $x(t_1)\in\in\partial K(t_1)$ по траектории

$$x(t)=\Phi(t)\,x_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\,[B(s)\,u(s)+v(s)]\,ds.$$

Поскольку $K(t_1)$ — выпуклый компакт, то существует гиперплоскость π, опорная для $K(t_1)$ в граничной точке $x(t_1)$. Пусть $\eta(t_1)$ — единичный вектор внешней нормали к плоскости π в точке $x(t_1)$. Определим нетривиальное сопряженное решение

$$\eta(t)=\eta_0\Phi^{-1}(t),\quad \eta(t_1)=\eta_0\Phi^{-1}(t_1).$$

Затем вычислим скалярное произведение векторов $\eta(t)$ и $x(t)$:

$$\eta(t)\, x(t) = \eta_0 x_0 + \int_{t_0}^{t} \eta(s)\,[B(s)\, u(s) + v(s)]\, ds.$$

Предположим теперь, что

$$\eta(t)\, B(t)\, u(t) < \max_{u \in \Omega} \eta(t)\, B(t)\, u$$

на некотором ненулевом промежутке времени из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Определим управление $\hat{u}(t) \subset \Omega$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\eta(t)\, B(t)\, \hat{u}(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)\, B(t)\, u$$

(по поводу измеримости $\hat{u}(t)$ см. леммы 2А и 3А приложения к настоящей главе). Тогда для соответствующего решения $\hat{x}(t)$ в R^n будем иметь

$$\eta(t_1)\, \hat{x}(t_1) = \eta_0 x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \eta(s)\, B(s)\, \hat{u}(s)\, ds + \int_{t_0}^{t_1} \eta(s)\, v(s)\, ds.$$

Поскольку

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(s)\, B(s)\, u(s)\, ds < \int_{t_0}^{t_1} \eta(s)\, B(s)\, \hat{u}(s)\, ds,$$

то

$$\eta(t_1)\, x(t_1) < \eta(t_1)\, \hat{x}(t_1).$$

Но это неравенство противоречит построению вектора $\eta(t_1)$ как внешней нормали к плоскости π в точке $x(t_1)$. Действительно, оно показывает, что точка $\hat{x}(t_1)$ отделена от множества $K(t_1)$ плоскостью π, что невозможно, так как $\hat{x}(t_1) \in K(t_1)$. Отсюда заключаем, что

$$\eta(t)\, B(t)\, u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)\, B(t)\, u$$

почти всюду на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Обратно, предположим, что для некоторого нетривиального сопряженного решения $\eta(t) = \eta_0 \Phi^{-1}(t)$ управление $u(t) \subset \Omega$ удовлетворяет условию

$$\eta(t)\, B(t)\, u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)\, B(t)\, u$$

почти всюду на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Требуется показать, что соответствующая траектория $x(t)$ оканчивается в граничной точке множества $K(t_1)$.

Предположим, что $x(t_1)$ — внутренняя точка $K(t_1)$. Для соответствующего сопряженного решения $\eta(t)$ рассмотрим точку $\tilde{x}(t_1)$ из $K(t_1)$, такую, что

$$\eta(t_1)\,x(t_1) < \eta(t_1)\,\tilde{x}(t_1).$$

Пусть $\tilde{u}(t) \subset \Omega$ есть управление, которому соответствует траектория $\tilde{x}(t)$. Согласно предположению

$$\eta(t)\,B(t)\,\tilde{u}(t) \leqslant \eta(t)\,B(t)\,u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)\,B(t)\,u$$

почти всюду на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Как и выше, найдем

$$\eta(t_1)\,\tilde{x}(t_1) \leqslant \eta(t_1)\,x(t_1)$$

и придем к противоречию. Следовательно, $x(t_1) \in \partial K(t_1)$. Теорема доказана.

Содержание теоремы 2 можно пояснить следующим образом. Если траектория $x(t)$ приводит в граничную точку множества $K(t_1)$, например, в его «юго-восточный угол», то движение почти всегда происходит в этом «юго-восточном» направлении с максимально возможной при заданных ограничениях скоростью. Однако движение вдоль решений системы $\mathscr{L}$ имеет свои особенности локально-геометрического характера, ибо в каждой точке $x(t)$ соответствующее «юго-восточное» направление указывается переменным вектором $\eta(t)$. Эти замечания мы выразим более точно в виде следствий из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть $u(t) \subset \Omega$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — экстремальное управление системы $\mathscr{L}$, с соответствующим решением $x(t)$ и сопряженным решением $\eta(t)$, удовлетворяющими соотношению*

$$\eta(t)\,B(t)\,u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)\,B(t)\,u$$

почти всюду на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда на каждом подынтервале $t_0 \leqslant t \leqslant \tau < t_1$, $u(t)$ также будет экстремальным управлением с $x(\tau) \in \partial K(\tau)$. Далее, $\eta(\tau)$ является внешней нормалью к опорной гиперплоскости π_τ для $K(\tau)$ в точке $x(\tau)$.

Доказательство. На подынтервале $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ имеем

$$\eta(t)\,B(t)\,u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)\,B(t)\,u$$

почти всюду, и следовательно, $u(t)$ экстремально на этом интервале, а потому $x(\tau) \in \partial K(\tau)$.

В теореме доказывается, что

$$\eta(\tau)\,\tilde{x}(\tau) \leqslant \eta(\tau)\,x(\tau)$$

для любой траектории $\tilde{x}(\tau)$ на $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Пусть π_τ — гиперплоскость, проходящая через точку $x(\tau)$ и имеющая вектор $\eta(\tau)$ своей

нормалью. Записанное выше неравенство показывает, что множество $K(\tau)$ не содержит точек из того полупространства, в которое направлен вектор $\eta(\tau)$. А это означает, что π_τ является опорной гиперплоскостью для $K(\tau)$ в точке $x(\tau)$.

Следствие 2. *Пусть $K(t)$ (на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$) есть множество достижимости управляемого процесса $\mathscr{L}$. Если для некоторого момента времени τ из интервала $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$ множество $K(\tau)$ имеет непустую внутренность, то множество $K(t)$ будет иметь непустую внутренность для всех t из интервала $\tau \leqslant t \leqslant t_1$.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ есть решение, точка $x(\tau)$ которого принадлежит внутренности множества $K(\tau)$. Если бы точка $x(t)$ для значения t из интервала $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ была граничной точкой множества $K(t)$, то вектор-функция $x(t)$ была бы экстремальным решением. Но тогда точка $x(\tau)$ лежала бы на границе множества $K(\tau)$. Поэтому $x(t)$ на интервале $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ должна быть внутренней точкой множества $K(t)$.

В теореме 2 показывается, что управление $u(t)$ на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ переводит x_0 в некоторую точку границы $\partial K(t_1)$ множества $K(t_1)$ лишь в случае, когда

$$\eta(t) B(t) u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) B(t) u \quad \text{п. в. (почти всюду)}$$

для соответствующего сопряженного решения $\eta(t)$. Часто бывает так, что для каждой граничной точки $P_1 \in \partial K(t_1)$ существует единственное экстремальное управление $u(t) \in \Omega$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, переводящее x_0 в P_1.

Определение. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t),$$

с ограничивающим множеством Ω и начальным положением x_0 в момент времени t_0. Определенная таким образом задача называется *нормальной*, если любые два управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, переводящие x_0 в одну и ту же граничную точку $P_1 \in \partial K(t_1)$, совпадают почти всюду.

Теорема 3. *Рассмотрим линейную систему в R^n*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t)$$

с компактным ограничивающим множеством Ω и начальным положением x_0 в момент времени t_0. Задача $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ будет нормальной тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие единственности: для каждого нетривиального решения $\eta(t)$ уравнения $\dot{\eta} = -\eta A(t)$ и для любых двух управлений $u_1(t)$ и $u_2(t) \subset \Omega$, удовлетворяющих условию

$$\eta(t) B(t) u_1(t) = \eta(t) B(t) u_2(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) B(t) u \quad \text{п. в.}$$

управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ совпадают, т. е.

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \textit{почти всюду на интервале} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Если задача является нормальной, и если множество Ω содержит более одной точки, то множество достижимости $K(t_1)$ будет строго выпуклым; тем самым, $K(t_1)$ является компактным выпуклым множеством с непустой внутренностью.

Доказательство. Если множество Ω состоит из одной точки, то все управления равны между собой, и теорема, очевидно, верна. Предположим теперь, что множество Ω содержит более одной точки.

Пусть задача $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ нормальна; покажем, что множество $K(t_1)$ строго выпукло. Предположим противное: пусть существует опорная гиперплоскость π, такая, что множество $\pi \cap K(t_1)$ содержит более одной точки, а следовательно, содержит целый отрезок L. Пусть $u_a(t)$ и $u_b(t) \subset \Omega$ переводят x_0 соответственно в концевые точки P_a и P_b отрезка L.

Для любого измеримого подмножества $D \subset \mathfrak{I}$ рассмотрим действительный $2n$-мерный вектор

$$w(D) = \begin{bmatrix} \int\limits_D \Phi^{-1}(s)\, B(s)\, u_a(s)\, ds \\ \int\limits_D \Phi^{-1}(s)\, B(s)\, u_b(s)\, ds \end{bmatrix},$$

где $\Phi(s)$, как обычно, фундаментальное матричное решение. Векторнозначная функция множества $w(D)$ принимает, вообще говоря разные значения. Так, например,

$$w(\mathfrak{I}) = \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad w(\varnothing) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\varnothing$ — пустое множество. Ляпуновым показано (лемма 4А приложения к этой главе), что существует такое множество $D_{\cdot 5} \subset \mathfrak{I}$ для которого

$$w(D_{\cdot 5}) = \begin{bmatrix} r_a/2 \\ r_b/2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad w(\mathfrak{I} - D_{\cdot 5}) = \begin{bmatrix} r_a/2 \\ r_b/2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $P_a \neq P_b$, то $r_a \neq r_b$, и поэтому ни $D_{\cdot 5}$, ни $\mathfrak{I} - D_{\cdot 5}$ не могут быть нулевыми множествами. Определим управления u_1 и u_2 следующим образом:

$$u_1(t) = \begin{cases} u_a(t) & \text{при} \quad t \in D_{\cdot 5}, \\ u_b(t) & \text{при} \quad t \in \mathfrak{I} - D_{\cdot 5}, \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} u_a(t) & \text{при} \quad t \in \mathfrak{I} - D_{\cdot 5}, \\ u_b(t) & \text{при} \quad t \in D_{\cdot 5}. \end{cases}$$

Тогда решение $x_1(t)$, соответствующее управлению $u_1(t)$, имеет вид

$$x_1(t) = \Phi(t_1)x_0 + \Phi(t_1)\int_{D_{.5}} \Phi^{-1}(s)[B(s)u_a(s) + v(s)]\,ds +$$
$$+ \Phi(t_1)\int_{\mathcal{J}-D_{.5}} \Phi^{-1}(s)[B(s)u_b(s) + v(s)]\,ds.$$

Несложно показать, что $x_1(t_1) = \frac{1}{2}P_a + \frac{1}{2}P_b$, т. е. точка $x_1(t_1)$ есть середина отрезка L. Решение, соответствующее управлению $u_2(t)$, также содержит точку $x_2(t_1) = x_1(t_1) = \frac{1}{2}P_a + \frac{1}{2}P_b$. В силу нормальности задачи $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $\mathcal{J}$. Однако это означает, что $u_a(t) = u_b(t)$ почти всюду на $D_{.5}$ и на $\mathcal{J} - D_{.5}$. Но, по предположению, P_a и P_b — разные точки отрезка L. Итак, мы пришли к противоречию, и строгая выпуклость множества $K(t_1)$ доказана.

Пусть $\eta(t)$ — нетривиальное сопряженное решение, и пусть π — опорная гиперплоскость для строго выпуклого множества $K(t_1)$ с внешней нормалью $\eta(t_1)$. Если $\hat{u}_1(t)$ и $\hat{u}_2(t)$ — любые два управления, удовлетворяющие условию

$$\eta(t)B(t)\hat{u}_1(t) = \eta(t)B(t)\hat{u}_2(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)B(t)u \quad \text{п. в.}$$

то оба эти управления переводят точку x_0 в одну и ту же точку P_1 из множества $\pi \cap K(t_1)$. В силу нормальности задачи

$$\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) \text{ почти всюду на } \mathcal{J}.$$

Обратно, предположим, что условие единственности теоремы 3 выполнено. Пусть $P \in \partial K(t_1)$ и пусть $\eta(t)$ — нетривиальное сопряженное решение, а вектор $\eta(t_1)$ является внешней нормалью к опорной гиперплоскости π к $K(t_1)$ в точке P_1. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t) \subset \Omega$ — управления, переводящие x_0 в точку P_1. По теореме 2

$$\eta(t)B(t)u_1(t) = \eta(t)B(t)u_2(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)B(t)u \quad \text{п. в.}$$

и из условия единственности вытекает желаемый результат:

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{п. в.}$$

Следовательно, задача $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ является нормальной. Теорема доказана.

Следствие. *Если задача* $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ *нормальна, то для любого* τ *из интервала* $t_0 < \tau < t_1$ *задача* $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, \tau)$ *также будет нормальной.*

Доказательство. Предположим, что управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, заданные на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, переводят x_0 в одну и ту

же точку $P_0 \in \partial K(\tau)$. Тогда, используя соответствующее нетривиальное сопряженное решение $\eta(t)$, получаем

$$\eta(t) B(t) u_1(t) = \eta(t) B(t) u_2(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) B(t) u$$

почти всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$. Продолжим решение $\eta(t)$ на весь интервал $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, считая вектор $\eta(t)$ внешней нормалью к опорной гиперплоскости π_t для множества $K(t)$. Выберем управление $u(t) \in \Omega$ на интервале $\tau < t \leqslant t_1$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\eta(t) B(t) u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) B(t) u$$

и затем продолжим $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на весь интервал $\tau \leqslant t \leqslant t_1$, полагая их равными на интервале $\tau < t \leqslant t_1$. Тогда $u_1(t)$ и $u_2(t)$ переводят x_0 в одну и ту же точку $P_1 \in K(t_1)$. По теореме 2 $u_1(t)$ и $u_2(t)$ являются экстремальными управлениями, а следовательно, $P_1 \in \partial K(t_1)$. Однако $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ — нормальная задача, а значит, $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Поэтому и $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, \tau)$ — нормальная задача.

Замечание. Теорема 2 показывает, что управление $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, экстремальное для некоторой начальной точки x_0, будет экстремальным и для любой другой начальной точки $\bar{x}_0$, т. е. $u(t)$ переводит $\bar{x}_0$ в граничную точку множества $K(t_1, \bar{x}_0)$. Аналогично, теорема 3 показывает, что если $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, t_1)$ — нормальная задача, то и задача $(\mathscr{L}, \Omega, \bar{x}_0, t_0, t_1)$ для любого другого начального положения $\bar{x}_0 \in R^n$ также будет нормальной.

Позднее в этой главе мы продолжим исследование условий нормальности в связи с задачей синтеза оптимальных управлений.

Используя первые три теоремы этой главы, мы убедимся, что свойства множества $K(t_1)$, установленные в теореме 1, связаны с существованием оптимального управления, что теорема 2 описывает и характеризует оптимальные управления как экстремальные управления и что из теоремы 3 следуют теоремы единственности, необходимые для синтеза оптимальных управлений.

Следующая теорема показывает, что всегда можно ограничиться рассмотрением тех управлений $u(t) \subset \Omega$, которые лежат на границе $\partial\Omega$ множества Ω. Для доказательства нам потребуется теорема 1А приложения к этой главе, так как придется рассматривать в качестве ограничивающего множества множество Ω, не являющееся, вообще говоря, выпуклым.

Поскольку управления $u(t) \in \partial\Omega$ часто реализуются физически при помощи механизмов, мгновенно переключающихся из одного крайнего положения на другое, то теорему 4 обычно называют *общим принципом релейного управления* (the general bang-bang principle).

Теорема 4. *Рассмотрим линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u + v(t),$$

с компактным ограничивающим множеством Ω *и начальным положением* x_0 *в момент времени* t_0. *Пусть* Ω_0 — *компактное подмножество множества* Ω, *выпуклая оболочка* $H(\Omega_0)$ *которого совпадает с выпуклой оболочкой* $H(\Omega)$ *множества* Ω.

Пусть $K(t_1)$ *есть множество достижимости для управлений* $u(t)\subset\Omega$, *определенных на интервале* $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, *а* $K_0(t_1)$ — *соответствующее множество достижимости для* $u(t)\subset\Omega_0$. *Тогда множество* $K(t_1)$ *будет компактным выпуклым множеством, и*

$$K_0(t_1) = K(t_1).$$

Доказательство. По теореме 1А приложения к главе 2 множество $K(t_1)$ является выпуклым и компактным. Кроме того, в той же теореме доказывается, что во всех случаях, когда ограничивающее множество совпадает с одним из множеств Ω, Ω_0 и $H(\Omega)$, множество достижимости не меняется и совпадает с $K(t_1)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\Omega_0 = \partial\Omega$ (Ω — *ограничивающее множество*). *Тогда соответствующее множество достижимости* $K_0(t_1)$ *совпадает с* $K(t_1)$.

Следствие 2. *Если* Ω — *выпуклый многогранник, а* Ω_0 — *множество его вершин, то* $K_0(t_1) = K(t_1)$.

Пример. Пусть для линейного процесса $\mathscr{L}$ ограничивающее множество представляет собой m-мерный куб $|u^i|\leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, m$. Пусть Ω_0 — совокупность его вершин. Тогда каждую точку из $K(t_1)$ можно достичь, применяя релейное управление $u(t)$, для которого

$$|u^i(t)| = 1 \text{ при } t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

Рассмотрим, однако, случай $m=1$, т. е. скалярную задачу

$$\dot{x} = b(t)\,u, \quad -1\leqslant u\leqslant 1,$$

где $b(t) = t^3 \sin\frac{1}{t}$ и $b(0)=0$ так, что $b(t)\in C^1$. Пусть $x_0=0$, $t_0=0$ и $t_1=1$. Тогда $K(t_1)$ будет компактным интервалом $-\alpha\leqslant x\leqslant \alpha = \int\limits_0^1 |b(t)|\,dt$. Заметим, что точки $x_1=\alpha$ можно достичь лишь с помощью управления $u(t)$, имеющего бесконечное число переключений на $0\leqslant t\leqslant 1$, а именно, в те моменты времени t, в которых $b(t)=0$. Этот пример показывает, что совокупность переключений релейного управления вовсе не обязана быть конечной или иметь простую структуру.

2.3. Управляемость и устойчивость автономных систем

Рассмотрим автономную систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с действительными постоянными $(n \times n)$-матрицей A и $(n \times m)$-матрицей B. Мы предполагаем здесь, что начало координат $x = 0$ является положением равновесия для свободной, или неуправляемой системы, для которой $u \equiv 0$. Более общая автономная линейная система во многих случаях может быть приведена к такому же виду с помощью параллельного переноса осей координат в пространствах x и u. В этом и следующем разделах мы будем заниматься изучением управляемости, наблюдаемости и устойчивости автономных линейных систем; случай неавтономных систем разбирается в упражнениях, а так же в теореме 6 главы 3. Мы не будем здесь накладывать никаких ограничений на управление, т. е. ограничивающим множеством Ω будем считать все пространство R^m. Наша задача — перевести систему из произвольной исходной точки x_0 в произвольную желаемую точку за конечный промежуток времени.

Определение. Автономная линейная система

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с $\Omega = R^m$ называется *вполне управляемой* (*обладает свойством управляемости*) в случае, если для любой пары точек x_0 и x_1 из R^n существует ограниченное измеримое управление $u(t)$ на некотором конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему из точки x_0 в точку x_1.

Следующая теорема дает удобный критерий управляемости автономных линейных систем.

Теорема 5. *Автономная линейная система в* R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

будет управляемой тогда и только тогда, когда ранг $(n \times nm)$-*матрицы*

$$[B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B]$$

равен n.

Доказательство. Предположим, что система $\mathscr{L}$ управляема, т. е. ее можно перевести из точки x_0 в произвольную точку x_1 из R^n. Предположим, что при этом, вопреки предположению теоремы,

$$\operatorname{rank}[B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B] < n.$$

Тогда строки матрицы связаны линейной зависимостью, и существует ненулевой постоянный вектор-строка v такой, что

$$v[B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B] = 0$$

или

$$vB = vAB = vA^2B = \ldots = vA^{n-1}B = 0.$$

По теореме Гамильтона—Кэли матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n = c_1A^{n-1} + c_2A^{n-2} + \ldots + c_nI,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторые действительные числа. Таким образом,

$$vA^nB = c_1vA^{n-1}B + \ldots + c_nvB = 0$$

и, по индукции,

$$vA^{n+k}B = 0 \quad \text{для всех} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Отсюда

$$ve^{At}B = v\left[I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots\right]B = 0$$

для любого действительного t.

Решение $x(t)$, исходящее из точки $x_0 = 0$ и соответствующее управлению $u(t)$, дается формулой

$$x(t) = e^{At}\int_0^t e^{-As}Bu(s)\,ds.$$

Поэтому

$$vx(t) = \int_0^t ve^{A(t-s)}Bu(s)\,ds = 0$$

для любого управления $u(t)$. Таким образом, все траектории $x(t)$ должны находиться в R^n на гиперплоскости, ортогональной вектору v. Однако это противоречит предположению об управляемости системы $\mathscr{L}$. Отсюда заключаем, что ранг матрицы $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ равен n.

Обратно, предположим, что матрица $[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$ имеет ранг n; докажем, что система $\mathscr{L}$ управляема. Пусть K_0' есть совокупность всех точек, в которые система может быть переведена из начала координат за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ с помощью управлений, удовлетворяющих условиям $|u^i| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда множество K_0' будет компактным и выпуклым в R^n.

Предположим, что размерность множества K_0' меньше, чем n. Тогда существует единичный вектор v такой, что

$$(1) \qquad \int_0^1 ve^{A(1-s)}Bu(s)\,ds = 0$$

для всех описанных выше управлений. Поскольку, если не считать ограничений на величину, управления $u(t)$ являются произволь-

ными, то можно заключить, что

$$ve^{A(1-s)}B \equiv 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{2}$$

При $s=1$ получим $vB=0$. Далее, дифференцируя равенство (2) по s и снова полагая $s=1$, получаем $vAB=0$. Продолжая этот процесс дифференцирования, выводим следующую цепочку равенств

$$vB = vAB = vA^2B = \ldots = vA^{n-1}B = 0.$$

Но это означает, что строки матрицы $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ линейно зависимы, что противоречит нашему предположению, и значит, размерность множества K_0' равна n.

Поскольку управление $u(t)$ можно заменить управлением $-u(t)$, то множество K_0' симметрично относительно начала координат. Поскольку множество K_0' содержит открытое подмножество и выпукло, то оно должно содержать начало координат в своей внутренности. Если рассматривать управления, ограниченные условиями $|u^i| \leqslant l$, где $l=1, 2, 3 \ldots$, то соответствующие множества K_0' заменяются на lK_0'. Таким образом, множество достижимости K_0, соответствующее точке $x_0=0$, если не накладывать никаких ограничений на управления, будет представлять собой все пространство R^n. Рассмотрим теперь в качестве начальной точки произвольную точку $x_0 \in R^n$. Тогда множество достижимости имеет вид $K = e^A x_0 + K_0$, т. е. снова совпадает со всем пространством R^n. Таким образом, система $\mathscr{L}$ управляема. Теорема доказана.

Поскольку понятие управляемости автономной линейной системы определялось нами геометрически, то свойство управляемости никоим образом не зависит от выбора системы координат в R^n. Если мы произведем преобразование координат $\bar{x} = Px$, с действительной невырожденной матрицей P, то система $\mathscr{L}$ примет вид

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \tag{$\mathscr{L}$}$$

где $\bar{A} = PAP^{-1}$ и $\bar{B} = PB$. Поэтому нам удобно ввести понятие *линейной эквивалентности*. Линейная автономная система

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u \tag{$\bar{\mathscr{L}}$}$$

называется *линейно эквивалентной* системе $\mathscr{L}$, если существует такая действительная постоянная невырожденная матрица P, что $\bar{A} = PAP^{-1}$ и $\bar{B} = PB$. Таким образом, линейно эквивалентные системы выражают одну и ту же физическую систему в разных координатах в пространстве R^n.

Легко показать, что свойство управляемости инвариантно относительно преобразований координат, т. е.

$$[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}^2\bar{B}, \ldots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = P\,[B, AB, A^2, \ldots, A^{n-1}B]$$

и

$$\operatorname{rank}[\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}^2\bar{B}, \ldots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = \operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B].$$

Матрица $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ называется *матрицей управляемости* для системы $\mathscr{L}$; ранг ее инвариантен по отношению к линейной эквивалентности.

Для систем, обладающих свойством управляемости, управляющая функция может быть сделана непрерывной и сколь угодно гладкой без ущерба для ее управляющих качеств. Этот факт, который будет использован нами в теореме 8, доказывается в следствии.

Следствие 1. *Пусть система*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

обладает свойством управляемости в R^n. Тогда для любой пары точек x_0 и $x_1 \in R^n$ и любого произвольно малого интервала времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ существует гладкая управляющая функция $u(t) \in C^\infty$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящая систему из точки x_0 в точку x_1. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничениям $|u^i(t)| \leqslant \varepsilon$, $|\dot{u}^i(t)| \leqslant \varepsilon$, ..., $|u^{i(r)}(t)| \leqslant \varepsilon$ и переводящее систему $\mathscr{L}$ из начального положения x_0 в любую точку некоторой окрестности точки $e^{At_1}x_0$.

Доказательство. Пусть K_∞ — множество достижимости, соответствующее начальной точке x_0, интервалу времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ (использование $t_1 > 0$ вместо $t_1 = 1$ не меняет дела) и ограничению на управления $u(t) \in C^\infty$. Очевидно, что K_∞ будет выпуклым множеством. Поскольку любое ограниченное измеримое управление на $0 \leqslant t \leqslant t_1$ можно равномерно аппроксимировать управлениями из C^∞ (кроме, быть может, малых интервалов, на которых управление равномерно ограничено), то K_∞ всюду плотно в R^n. Следовательно, $K_\infty = R^n$, и система может быть переведена из x_0 в x_1 с помощью гладкого управления.

Будем рассматривать теперь только гладкие управления $u(t) \in C^\infty$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющие условиям $|u^i(t)| \leqslant \varepsilon$, $|\dot{u}^i(t)| \leqslant \varepsilon$, ..., $|u^{i(r)}(t)| \leqslant \varepsilon$. Пусть K_∞^r — соответствующее множество достижимости для начальной точки x_0. Тогда K_∞^r — выпукло и симметрично относительно точки $e^{At_1}x_0$. Если бы размерность K_∞^r была меньше n, то существовал бы единичный вектор v такой, что

$$v \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu(s)\, ds = 0$$

для всех допустимых управлений. Но отсюда следует, что $ve^{A(t_1-s)}B = 0$ на интервале $0 \leqslant s \leqslant t_1$. Однако, как и при доказательстве теоремы, мы убеждаемся, что это противоречит управ-

ляемости системы $\mathscr{L}$. Отсюда следует, что K_∞^r имеет размерность n и содержит внутри себя окрестность точки $e^{At_1}x_0$, что и требовалось доказать.

Понятие управляемости системы $\mathscr{L}$ играет важную роль при изучении области $\mathscr{C}$ нуль-управляемости, т. е. множества тех точек в R^n, из которых система может быть переведена в начало координат за конечный промежуток времени с помощью допустимых управлений $u(t)$, принадлежащих ограничивающему множеству $\Omega \subset R^m$. Область $\mathscr{C}$ всегда связна; она будет открытой в том и только в том случае, если в ней содержится некоторая окрестность начала координат. Последнее утверждение непосредственно вытекает из теоремы о непрерывной зависимости решений системы $\mathscr{L}$ от начальных условий $x_0 \in R^n$.

Следствие 2. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, *содержащим управление* $u=0$ *в качестве своей внутренней точки. Тогда область* $\mathscr{C}$ *нуль-управляемости является открытым множеством в* R^n *в том и только в том случае, если система* $\mathscr{L}$ *обладает свойством управляемости.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости тогда и только тогда, когда таким свойством обладает система

$$(\mathscr{L}_-) \qquad \dot{x} = -Ax - Bu,$$

поскольку матрицы $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ и $[-B, AB, -A^2B, \ldots \ldots, (-1)^n A^{n-1}B]$ имеют один и тот же ранг. Если управление $u(t)$ переводит точку $x_0=0$ в точку x_1 перемещая ее вдоль решения системы $\mathscr{L}_-$ на отрезке времени $[0, t_1]$, то управление $u(t_1-t)$ переводит точку x_1 в начало координат вдоль решения системы $\mathscr{L}$ за тот же промежуток времени. Отсюда следует, что множество достижимости K_-, соответствующее системе $\mathscr{L}_-$, начальной точке $x_0=0$ и управлениям $u(t) \subset \Omega$, в точности совпадает с областью $\mathscr{C}$ нуль-управляемости для системы $\mathscr{L}$.

Итак, пусть система $\mathscr{L}$ (а следовательно, и система $\mathscr{L}_-$) обладает свойством управляемости. Тогда, при дополнительном ограничении $|u^i(t)| \leqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, соответствующее множество K_-^ε содержит некоторую окрестность точки $x_0=0$. Поскольку $K_-^\varepsilon \subset K_- = \mathscr{C}$, то множество $\mathscr{C}$ содержит окрестность точки $x_0=0$ и, следовательно, $\mathscr{C}$ является открытым множеством в R^n.

Обратно, пусть $\mathscr{C}$ — открытое множество в R^n. Тогда каждой точки $x_1 \in \mathscr{C}$ можно достичь, исходя из начала координат, двигаясь по решению $\mathscr{L}_-$ под действием управления из Ω. Следовательно,

$\mathscr{C}$ есть множество всех точек вида

$$x = -\int_0^{t_1} e^{A(s-t_1)} Bu(s)\, ds,$$

где $u(t) \subset \Omega$, а t_1 лежит в интервале $0 \leqslant t_1 \leqslant \infty$. Предположим, что система $\mathscr{L}_-$ не обладает свойством управляемости. Тогда существует единичный вектор v такой, что

$$vB = vAB = vA^2B = \ldots = vA^{n-1}B = 0,$$

а значит,

$$ve^{At}B = 0$$

для любого действительного t. Но это означает, что область $\mathscr{C}$ находится в гиперплоскости, ортогональной к вектору v, что невозможно, так как $\mathscr{C}$ имеет непустую внутренность. Таким образом, система $\mathscr{L}_-$, а следовательно, и система $\mathscr{L}$, должна обладать свойством управляемости.

Следствие 3. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$.

Предположим, что

(а) $u = 0$ *находится внутри* Ω;

(б) *система* $\mathscr{L}$ *управляема*;

(в) *матрица* A *устойчива, т. е. все собственные значения* λ *матрицы* A *удовлетворяют условию* $\operatorname{Re}\lambda < 0$. *Тогда область нуль-управляемости* $\mathscr{C}$ *совпадает с* R^n.

Доказательство. Рассмотрим произвольную начальную точку $x_1 \in R^n$. Пусть на систему воздействует нулевое управление $u(t) \equiv 0$, пока соответствующая траектория $x(t)$, приближаясь к точке $x_0 = 0$, не войдет в область $\mathscr{C}$. Но это означает, что траектория $x(t)$ может достигнуть начала координат за конечное время. Значит, $x_1 \in \mathscr{C}$, т. е. $\mathscr{C} = R^n$, что и требовалось доказать.

Если $m = 1$, т. е. B является вектором-столбцом b, то для системы

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu$$

следующие три утверждения будут эквивалентными:

(1) $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости;

(2) $\operatorname{rank}\,[b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b] = n$;

(3) $\det\,[b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b] \neq 0$;

(4) векторы b, bA, A^2b, ..., $A^{n-1}b$ линейно независимы.

Некоторые из этих элементарных критериев управляемости не годятся для $m \geqslant 2$. Например, если взять $A = 0$ и $B = I$, то

полученная система будет вполне управляемой, несмотря на то, что все столбцы матрицы AB состоят из нулей. Таким образом, теория управляемости становится значительно более простой для случая $m=1$, т. е. для скалярных управлений. Следующие четыре теоремы относятся именно к таким задачам управления.

Часто линейным управляемым процессом в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с векторным управлением $u(t) \subset R^m$ можно эффективно управлять с помощью скалярного управления $\mu(t)$, если выбрать $u(t) = c\mu(t)$, где c — постоянный вектор, а $\mu(t)$ — скалярное управление. Тогда, обозначив через b постоянный вектор-столбец Bc, получим систему

$$(\mathscr{L}_1) \qquad \dot{x} = Ax + b\mu$$

со скалярными управлениями $\mu(t) \subset R^1$. Такое сведéние пространства управлений от R^m к R^1 возможно практически всегда, кроме некоторых исключительных случаев; при этом свойство управляемости системы остается неизменным. Возможность сведéния пространства управления от R^m к R^1 зависит лишь от жордановой формы матрицы A. Известно, что для любой комплексной $(n \times n)$-матрицы A существует невырожденная комплексная матрица P, такая, что

$$PAP^{-1} = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_k\},$$

где каждая жорданова клетка

$$A_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & & & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

соответствует собственному значению λ_j матрицы A. Такая жорданова каноническая форма матрицы единственна, с точностью до порядка расположения клеток A_j вдоль главной диагонали. Если $(n \times n)$-матрица A имеет n различных собственных значений, то каждая клетка $A_j = (\lambda_j)$ будет (1×1)-матрицей. Матрица A определяет линейное преобразование комплексного n-мерного векторного пространства X в себя, причем каждой жордановой клетке A_j соответствует инвариантное подпространство X_j, в котором действует линейное преобразование A_j.

Теорема 6. *Рассмотрим автономную линейную систему*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u(t) \subset R^m,$$

обладающую свойством управляемости. Если любые две жордановы клетки матрицы A отвечают ее различным собственным значениям,

то существует такой действительный вектор c, что система

$$(\mathscr{L}_1) \qquad \dot{x} = Ax + (Bc)\mu, \quad \mu(t) \subset R^1,$$

является также вполне управляемой. В противном случае такого вектора c не существует.

Доказательство. Если действительные матрицы A, B удовлетворяют условию полной управляемости

$$\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n,$$

то и комплексные матрицы $\overline{A} = PAP^{-1}$, $\overline{B} = PB$, где P — невырожденная комплексная матрица, будут также удовлетворять этому условию.

Пусть

$$\overline{A} = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$$

— жорданова каноническая форма матрицы A, где каждая из A_j является квадратной комплексной $(n_j \times n_j)$-матрицей вида

$$A_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Обозначим символом B строки матрицы $\overline{B}$ так, что

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \ldots \\ \beta_{1n_1} \\ \ldots \\ \beta_{21} \\ \ldots \\ \beta_{2n_2} \\ \ldots \end{bmatrix}.$$

Заметим, что n_1-я строка матрицы $\overline{A}^l\overline{B}$ имеет вид $(\lambda_1)^l\beta_{1n_1}$ и в силу полной управляемости системы $\mathscr{L}$ $\beta_{1n_1} \neq 0$. Аналогично, $\beta_{2n_2} \neq 0, \ldots$ $\ldots, \beta_{kn_k} \neq 0$. Предположим теперь, что две какие-либо различные клетки, например, A_1 и A_2, отвечают равным собственным значениям, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$. Для такой матрицы $\overline{A}$ и любого комплексного вектора $\overline{b}$ система

$$\dot{x} = \overline{A}x + \overline{b}\mu(t)$$

не будет обладать свойством управляемости при $\mu(t) \in R^1$. Это следует из того, что n_1-я и $n_1 + n_2$-я строки матрицы $[\overline{b}, \overline{A}\,\overline{b}, \ldots, \overline{A}^{n-1}\overline{b}]$ равняются соответственно $(b_{1n_1}, \lambda_1 b_{1n_1}, \ldots, \lambda_1^{n-1} b_{1n_1})$ и $(b_{2n_2}, \lambda_2 b_{2n_2}, \ldots$

$\ldots, \lambda_2^{n-1} b_{2n_2})$ и при $\lambda_1 = \lambda_2$ являются линейно зависимыми. Поэтому в этом случае система $\mathscr{L}$ не может быть сведена к обладающей свойством управляемости системе $\mathscr{L}_1$.

Обратно, предположим, что все клетки $A_1, \ldots, A_k$ соответствуют различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Выберем действительный постоянный вектор c так, чтобы для вектора

$$\bar{B}c = b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \ldots \\ b_{1n_1} \\ \ldots \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{2n_2} \\ \ldots \end{bmatrix}$$

выполнялись неравенства $b_{1n_1} \neq 0$, $b_{2n_2} \neq 0, \ldots, b_{kn_k} \neq 0$. (Этого можно добиться, взяв, например, элементы вектора b алгебраически независимыми над полем, порожденным элементами матрицы $\bar{B}$.) Покажем, что тогда столбцы матрицы $[\bar{b}, \bar{A}\,\bar{b}, \ldots, \bar{A}^{n-1}\bar{b}]$ будут линейно независимыми.

Отметим прежде всего, что векторы

$$\bar{b},\ (A - \lambda_k I)\,\bar{b},\quad (\bar{A} - \lambda_k I)^2 \bar{b}, \ldots, (\bar{A} - \lambda_k I)^{n_k - 1} \bar{b}$$

определяют в точности то же самое подпространство, что и векторы

$$\bar{b},\ \bar{A}\,\bar{b},\ \bar{A}^2\,\bar{b}, \ldots, \bar{A}^{n_k - 1}\,\bar{b}.$$

Положим

$$h = (\bar{A} - \lambda_k I)^{n_k} \bar{b} = \begin{bmatrix} h_{11} \\ \ldots \\ h_{1n_1} \\ \ldots \\ h_{21} \\ \ldots \\ h_{2n_2} \\ \ldots \end{bmatrix},$$

т. е.

$$h = \bar{A}^{n_k}\bar{b} + \text{линейная комбинация векторов } \{\bar{b}, \bar{A}\,\bar{b}, \ldots, \bar{A}^{n_k - 1}\,\bar{b}\}.$$

Тогда векторы

$$h,\ (\bar{A} - \lambda_{k-1} I)\,h, \ldots, (\bar{A} - \lambda_{k-1}\, I)^{n_{k-1} - 1}\,h$$

определяют то же самое подпространство, что и векторы

$$h,\ \bar{A}h,\ \bar{A}^2 h, \ldots, \bar{A}^{n_{k-1} - 1}\,h.$$

Такими же вычислениями получим, что векторы

$$\bar{b},\ (\bar{A}-\lambda_k I)\bar{b},\ (\bar{A}-\lambda_k I)^2\bar{b},\ \ldots,\ (\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k-1}\bar{b},$$
$$(\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k}\bar{b},\ (\bar{A}-\lambda_{k-1})(\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k}\bar{b},\ \ldots,\ (\bar{A}-\lambda_{k-1}I)^{n_{k-1}-1}(\bar{A}-\lambda_k)^{n_k}\bar{b},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\bar{A}-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k}\bar{b},\ (\bar{A}-\lambda_1 I)(\bar{A}-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k}\bar{b},$$
$$\ldots,\ (A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(\bar{A}-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k}\bar{b}$$

определяют то же пространство, что и столбцы матрицы

$$[\bar{b},\ \bar{A}\bar{b},\ \bar{A}^2\bar{b},\ \ldots,\ \bar{A}^{n-1}\bar{b}].$$

Последние n_k строк векторов

$$(\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k-1}\bar{b},\ \ldots,\ (\bar{A}-\lambda_k I)^2\bar{b},\ (\bar{A}-\lambda_k I)\bar{b},\ \bar{b}$$

образуют матрицу

$$\begin{bmatrix} b_{kn_k} & & & & \\ 0 & b_{kn_k} & & & \\ 0 & 0 & b_{kn_k} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{kn_k} \end{bmatrix},$$

у которой $b_{kn_k}\neq 0$, а элементы под главной диагональю равны нулю. Заметим, что у вектора h последние n_k элементов нули, и что

$$h_{k-1,\,n_{k-1}}=(\lambda_{k-1}-\lambda_k)^{n_k}b_{k-1,\,n_{k-1}}\neq 0.$$

Тогда легко вычислить, что векторы-столбцы

$$(\bar{A}-\lambda_1 I)^{n_1-1}(\bar{A}-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(\bar{A}-\lambda_k I)^{n_k}\bar{b},\ \ldots,\ (\bar{A}-\lambda_k I)\bar{b},\ \bar{b}$$

образуют треугольную матрицу с ненулевыми диагональными элементами

$$(\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda_1-\lambda_k)^{n_k}b_{1n_1}\neq 0,\ \ldots,\ b_{kn_k}\neq 0.$$

Поскольку определитель такой треугольной матрицы не равен нулю, то

$$\det[\bar{b},\ \bar{A}\bar{b},\ \ldots,\ \bar{A}^{n-1}\bar{b}]\neq 0.$$

Так как $\bar{A}=PAP^{-1}$ и $\bar{b}=\bar{B}c=PBc$, то находим, что

$$\det[Bc,\ ABc,\ A^2Bc,\ \ldots,\ A^{n-1}Bc]\neq 0,$$

так что система

$$(\mathscr{L}_1)\qquad \dot{x}=Ax+(Bc)u$$

обладает свойствами управляемости при $\mu(t)\subset R^1$. Теорема доказана.

В следующей теореме получена физически содержательная и с математической точки зрения удобная каноническая форма для управляемых процессов со скалярными управлениями.

Теорема 7. *Автономный линейный процесс*

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=u, \quad u\in R^1$$

или соответствующая линейная система в фазовом пространстве

$$(\mathscr{D})\qquad \begin{aligned}&\dot{x}^1=x^2\\ &\dot{x}^2=x^3\\ &\ldots\ldots\\ &\dot{x}^n=-a_nx^1-a_{n-1}x^2-\ldots-a_1x^n+u\end{aligned}$$

обладают свойством управляемости. Любая обладающая свойством управляемости система в R^n вида

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

при управлениях $u\in R^1$ линейно эквивалентна системе вида $\mathscr{D}$.

Доказательство. Легко проверить, что для матриц

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \ldots 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & \ldots -a_1\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad b_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \ldots\\1\end{bmatrix}$$

условия вполне управляемости теоремы 5 выполняются. Рассмотрим теперь вполне управляемый процесс $\mathscr{L}$. Определим действительную невырожденную $(n\times n)$-матрицу:

$$P=[A^{n-1}b,\ A^{n-2}b,\ \ldots,\ A^2b,\ Ab,\ b].$$

Введем новые координаты в R^n преобразованием $\bar{x}=P^{-1}x$, так что система $\mathscr{L}$ примет вид

$$\dot{\bar{x}}=P^{-1}AP\bar{x}+P^{-1}bu.$$

Непосредственным перемножением матриц проверяем, что

$$b=[A^{n-1}b,\ldots,Ab,b]\begin{bmatrix}0\\0\\ \ldots\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{или} \quad P^{-1}b=\begin{bmatrix}0\\0\\ \ldots\\0\\1\end{bmatrix}=b_1$$

и $AP=PN$ или $P^{-1}AP=N$, где

$$N=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \alpha_2 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1\\ \alpha_n & 0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}.$$

Постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ однозначно определяются из разложения

$$A^n b = \alpha_1 A^{n-1} b + \alpha_2 A^{n-2} b + \ldots + \alpha_n b.$$

Для системы $\mathscr{D}$ характеристическое уравнение соответствующей матрицы A_1 имеет вид

$$A_1^n = -a_1 A_1^{n-1} - a_2 A_1^{n-2} - \ldots - a_n I.$$

Аналогично, применяя описанное выше преобразование координат к системе $\mathscr{D}$, получим матрицы N и $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}$, если положить $-a_1 = \alpha_1$, $-a_2 = \alpha_2, \ldots, -a_n = \alpha_n$. Поэтому система $\mathscr{L}$ линейно эквивалентна системе $\mathscr{D}$. Теорема доказана.

В следствиях из теоремы 5 мы изучали области нуль-управляемости $\mathscr{C}$ для автономного линейного процесса $\mathscr{L}$ в пространстве R^n, причем управления удовлетворяли условию $u(t) \subset \Omega \subset R^m$. В следующей ниже теореме дается исчерпывающее описание того важного случая, когда область нуль-управляемости совпадает со всем пространством, т. е. когда можно, исходя из любой точки пространства, попасть в начало координат. Поскольку это будет уже не локальный, а глобальный анализ, то нам придется ввести некоторые предположения глобального характера относительно $\mathscr{L}$ и Ω.

Теорема 8. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu, \quad u \in \Omega$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^1$, *содержащим точку* $u = 0$. *Тогда область нуль-управляемости* $\mathscr{C}$ *совпадает с* R^n, *если и только если выполнены следующие условия*:

(a) *система* $\mathscr{L}$ *обладает свойством управляемости*;

(b) *все собственные значения* λ *матрицы* A *удовлетворяют условию* $\operatorname{Re} \lambda \leqslant 0$.

Доказательство. Если $\mathscr{L}$ не обладает свойством управляемости, то в соответствии со следствием 2 из теоремы 5 существуют точки пространства R^n, из которых нельзя попасть в начало координат.

Предположим, что матрица A системы $\mathscr{L}$ имеет собственное значение λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Тогда существует вещественное невырожденное преобразование координат в R^n, $y = Px$ такое, что система $\mathscr{L}$ принимает вид

$$y = PAP^{-1} y + Pbu,$$

где

$$\dot{y}^1 = \lambda y^1 + b_1 u, \quad \text{если} \quad \lambda > 0,$$

или

$$\dot{y}^1 = \alpha y^1 + \beta y^2 + b_1 u, \qquad \dot{y}^2 = -\beta y^1 + \alpha y^2 + b_2 u,$$

если $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\alpha > 0$. Выберем начальную точку $y_0 \in R^n$ так, чтобы y_0^1 было очень большим положительным числом (или чтобы число $y_0^{1^2} + y_0^{2^2}$ было очень большим, во втором случае). Тогда $\frac{dy^1}{dt} > 0$ $\left(\text{или } \frac{d}{dt}(y^{1^2} + y^{2^2}) > 0\right.$ при $t > 0$ и любом управлении u из множества Ω. Таким образом, из точки y_0 нельзя попасть в начало координат под действием управления $u(t) \subset \Omega$. Поэтому условие $\mathscr{C} = R^n$ влечет за собой выполнение условий (a) и (b).

Предположим теперь, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости и что для каждого собственного значения λ матрицы A выполняется условие $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. Покажем сначала, что можно ограничиться рассмотрением лишь случая, когда все собственные значения матрицы A чисто мнимые.

Можно считать, что система $\mathscr{L}$ линейным невырожденным преобразованием координат в R^n приведена к виду

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p \\ b_q \end{bmatrix} u,$$

где каждое собственное значение λ_p матрицы A_p является чисто мнимым, а каждое собственное значение λ_q матрицы A_q удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}\lambda_q < 0$. При нулевом управлении $u(t) = 0$ решения асимптотически устойчивой системы

$$\dot{x}_q = A_q x_q$$

стремятся к $x_q = 0$ при $t \to +\infty$. Далее, если координаты x_q выбраны соответствующим образом, то радиальная составляющая скорости будет отрицательна,

$$x_q' \dot{x}_q = x_q' A_q x_q \leqslant -\zeta x_q' x_q \quad \text{для} \quad 0 < \zeta < -\operatorname{Re}\lambda_q,$$

и если в дальнейшем использовать управления $u(t)$ с достаточно малыми нормами, то решение $x_q(t)$ будет оставаться внутри достаточно малой окрестности N_q точки $x_q = 0$. Таким образом, если нам удастся, исходя из произвольной начальной точки, перевести обладающую свойством управляемости систему

$$\dot{x}_p = A_p x_p + b_p u$$

в достаточно малую окрестность N_p точки $x_p = 0$ с помощью управлений $u(t)$ с достаточно малыми нормами $|u(t)|$, то тогда из свойства управляемости системы $\mathscr{L}$ будет следовать, что $\mathscr{C} = R^n$. Поэтому можно свести нашу задачу к изучению такой вполне управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

где матрица A имеет лишь чисто мнимые собственные значения. Нам надо показать, что такая система может быть переведена из произвольной точки $x_0 \in R^n$ в некоторую заданную заранее окрестность N точки $x=0$ при помощи управления $u(t)$ такого, что $|u(t)| < \varepsilon$ для заданного $\varepsilon > 0$. Этим завершится доказательство нашей теоремы.

В соответствии с теоремой 7, система $\mathscr{L}$ является линейно эквивалентной в R^n системе $\mathscr{D}$, определяемой следующим образом:

$$(\mathscr{D}) \qquad D^s(D^2+\gamma_1)(D^2+\gamma_2)\ldots(D^2+\gamma_r)x=u,$$

где $s \geqslant 0$, $r \geqslant 0$ — порядки дифференцирования, а $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — положительные постоянные; состояние системы определяется каждым из векторов $(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ или $(x, x', \ldots, x^{n-1})$.

Рассмотрим сначала случай $r=0$, $s \geqslant 1$. Если $s=1$, то искомое управление легко построить (см. пример 1 главы 1). Более того, можно выбрать управление $u(t) \in C^\infty$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему из начальной точки x_0 в точку $x_1=0$ так, что

1) $u(t)=0$ в некоторой окрестности концевых точек $t=t_0$ и $t=t_1$;

2) $x(t)=0$ в некоторой окрестности точки t_1.

Эти ограничения накладываются на управления для того, чтобы можно было составить из них последовательность, сходящуюся к дифференцируемой функции. В оставшейся части доказательства мы будем называть такие управления *приемлемыми*. Введем σ-норму для управлений из C^∞:

$$|u(t)|_\sigma = |u(t)| + |\dot{u}(t)| + \ldots + |u^{(\sigma)}(t)|;$$

построение *приемлемого* управления $u(t)$ с $|u(t)|_\sigma \leqslant \varepsilon$ для заданных $\sigma \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$, переводящего систему $Dx=u$ из произвольной начальной точки x_0 в точку $x_1=0$, мы предоставляем читателю в качестве упражнения. Далее, считая, что такое приемлемое управление построено для системы $Dx=u$, применим математическую индукцию, и будем считать, что существуют такие приемлемые управления и для всех систем

$$D^j x = u, \qquad j=1, 2, \ldots, s-1.$$

Рассмотрим систему

$$D^s x = u,$$

которую мы разложим на две системы $D^{s-1}z=\xi$ и $D\xi=u$. Пусть $u(t)$ — некоторое управление из C^∞, а $x(t)$, $\xi(t)$ и $z(t)$ — соответствующие ему решения с начальными условиями $\xi_0 = x_0^{(s-1)}$ и $z_0 = x_0$, $z_0^{(1)} = x_0^{(1)}, \ldots, z_0^{(s-2)} = x_0^{(s-2)}$. Заметим, что $z(t) \equiv x(t)$.

Выберем сначала приемлемое управление $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ с ограничением $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$, переводящее систему $D\xi = u$

из начального состояния $\xi_0 = x_0^{(s-1)}$ в конечное состояние $\xi_1 = 0$. Это управление определяет также некоторое решение $x(t)$ системы $D^s x = u$, и переводит систему из состояния $(x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{s-1})$ в некоторое состояние $(x_1, x_1^1, \ldots, x_1^{s-2}, 0)$. Пользуясь предположением индукции, найдем допустимое управление $\xi(t)$, определенное на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ с ограничением $|\xi(t)|_{\sigma+1} < \varepsilon$, переводящее систему $D^{s-1} z = \xi$ из состояния $(x_1, x_1^1, \ldots, x_1^{s-2})$ в состояние $(0, 0, \ldots, 0)$. Положим теперь $u(t) = D\xi(t)$ на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$; тогда $u(t)$ будет приемлемым управлением на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_2$, переводящим вектор $x(t)$ из начального положения $(x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{s-1})$ в конечное положение $(0, 0, \ldots, 0)$, причем $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$. Итак, заключаем, что для системы

$$D^s x = u, \quad s \geqslant 1$$

всегда существует приемлемое управление $u(t)$, для которого $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$, переводящее ее из любой начальной точки в начало координат ($\sigma \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ — наперед заданные числа).

Теперь рассмотрим случай $r \geqslant 1$, $s = 0$, так что система примет вид

$$(D^2 + \gamma_1)(D^2 + \gamma_2) \ldots (D^2 + \gamma_r) x = u.$$

Для $r = 1$ используем метод, изложенный в примере 1 (раздел 1.2) и следствие 1 из теоремы 5 (глава 2) для построения приемлемого управления $u(t)$ с ограничением $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$, переводящего систему из заданного начального состояния в состояние покоя. Построение такого приемлемого управления мы вновь предлагаем в качестве упражнения. Пусть теперь $r > 1$, $s = 0$; снова применим метод индукции.

Запишем систему $\mathscr{D}$ в виде

$$(D^2 + \gamma_2) \ \ldots \ (D^2 + \gamma_r) z = \xi, \quad (D^2 + \gamma_1) \xi = u,$$

и рассмотрим некоторое управление $u(t) \in C^\infty$ и соответствующие ему решения $x(t)$, $z(t)$, $\xi(t)$ с подходящими начальными условиями

$$z_0 = x_0, \quad z_0^1 = x_0^1, \quad \ldots, \quad z_0^{2r-3} = x_0^{2r-3},$$

$$\xi_0 = (D^2 + \gamma_2) \ldots (D^2 + \gamma_r) x(0), \quad \xi_0^1 = (D^2 + \gamma_2) \ \ldots \ (D^2 + \gamma_r) x_0^1(0),$$

так что $z(t) = x(t)$. Выберем сначала приемлемое управление $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ с ограничением $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$, переводящее систему $(D^2 + \gamma_1)\xi = u$ из положения (ξ_0, ξ_0^1) в положение $(0, 0)$. Это управление определяет решение $x(t)$ системы $\mathscr{D}$ и переводит ее из состояния $(x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{2r-1})$ в некоторое состояние $(x_1, x_1^1, \ldots, x_1^{2r-1})$. Используя предположение индукции, найдем приемлемое управление $\xi(t)$ на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ с ограничением $|\xi(t)|_{\sigma+2} < \dfrac{\varepsilon}{1+\gamma_1}$, переводящее вектор $z(t)$ из начального

положения $(x_1, x_1^1, \ldots, x^{2r-3})$ в положение $(0, 0, \ldots, 0)$. Положим $u(t) = (D^2 + \gamma_1)\xi(t)$ на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$; тогда $u(t)$ является приемлемым управлением на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_2$, и переводит вектор $x(t)$ из положения $(x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{2r-1})$ в положение $(0, 0, \ldots, 0)$. Кроме того, $|\xi(t)|_{\sigma+2} + \gamma_1 |\xi(t)|_\sigma < \varepsilon$, откуда сразу следует, что $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$. Таким образом, при любых $r \geqslant 1$, $s = 0$ для системы $\mathscr{D}$ существует приемлемое управление $u(t)$.

Наконец, рассмотрим общий случай системы $\mathscr{D}$ для $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$. Здесь положим

$$(D^2 + \gamma_1) \ldots (D^2 + \gamma_r) z = \xi, \quad D^s \xi = u$$

и используем подходящие начальные условия для заданного управления $u(t) \in C^\infty$ и соответствующих ему решений $x(t)$, $\xi(t)$, $z(t)$:

$$\begin{gathered} z_0 = x_0, \quad z_0^1 = x_0^1, \quad \ldots, \quad z_0^{2r-1} = x_0^{2r-1}, \\ \xi_0 = (D^2 + \gamma_1) \ldots (D^2 + \gamma_r) x(0), \ldots, \\ \xi_0^{s-1} = D^{s-1} (D^2 + \gamma_1) \ldots (D^2 + \gamma_r) x(0), \end{gathered}$$

так что $z(t) = x(t)$. Сначала выберем приемлемое управление $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ с ограничением $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$, переводящее вектор $\xi(t)$ из положения $(\xi_0, \ldots, \xi_0^{s-1})$ в конечное положение $(0, 0, \ldots, 0)$. Это управление переводит конец вектора $x(t)$ из точки $(x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{2r+s-1})$ в некоторую точку $(x_1, x_1^1, \ldots, x_1^{2r+s-1})$. Выберем $\xi(t)$ в качестве приемлемого управления на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, переводящего вектор $z(t)$ из положения $(x_1, x_1^1, \ldots, x_1^{2r-1})$ в положение $(0, 0, \ldots, 0)$ и удовлетворяющего ограничению $|\xi(t)|_{\sigma+s} < \varepsilon$. Положим $u(t) = D^s \xi(t)$ на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Тогда $u(t)$ является приемлемым управлением на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_2$ с ограничением $|u(t)|_\sigma < \varepsilon$, переводящим систему $\mathscr{D}$ из состояния $(x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{2r+s-1})$ в состояние $(0, 0, \ldots, 0)$. Теорема доказана для всех случаев.

Следствие. *Рассмотрим автономную линейную систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, содержащим точку $u = 0$ внутри себя. Предположим, что никакие две жордановы клетки матрицы A не содержат одинаковых собственных значений матрицы A. Тогда область нуль-управляемости $\mathscr{C}$ совпадает со всем пространством R^n в том и только том случае, если выполнены следующие условия:

(a) *система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости;*

(b) *все собственные значения λ матрицы A удовлетворяют условию* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Доказательство. Если $\mathscr{C} = R^n$, то доказательство теоремы проводится совершенно так же, как и в случае $m = 1$. Обратно, если система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, и $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$,

то по теореме 6 мы можем заменить ограничивающее множество Ω некоторым компактным интервалом пространства R^1, содержащим точку $u=0$. А тогда можно применить теорему 8, из которой следует, что $\mathscr{C}=R^n$.

Если система

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

обладает свойством управляемости в R^n, то ее можно, исходя из произвольной начальной точки x_0, перевести в нулевую точку за конечный промежуток времени с помощью некоторого управления $u(t)\subset R^m$. Поведение такой системы резко отличается от ее поведения в случае, когда $B=0$, т. к. тогда в силу устойчивости системы (все собственные значения λ матрицы A имеют $\operatorname{Re}\lambda<0$) все решения ее стремятся к началу координат при $t\to+\infty$.

Определение. Автономная линейная система в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

называется *стабилизируемой*, если существует такое линейно зависящее от x управление $u=Dx$, что система

$$\dot{x}=Ax+BDx=(A+BD)x$$

устойчива, т. е. если найдется такая постоянная действительная $m\times n$-матрица D, что действительные части собственных значений матрицы $A+BD$ отрицательны.

Если $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ — линейно эквивалентные системы, так что $\overline{A}=PAP^{-1}$ и $\overline{B}=PB$, и если $\mathscr{L}$ — стабилизируемая система, то и система $\overline{\mathscr{L}}$ будет стабилизируемой. Действительно, если матрица $(A+BD)$ устойчива, то и матрица

$$P(A+BD)P^{-1}=\overline{A}+\overline{B}\,\overline{D} \qquad (\overline{D}=DP^{-1})$$

также устойчива.

Теорема 9. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

с управлением $u(t)\subset R^1$. *Если система* $\mathscr{L}$ *обладает свойством управляемости, то она стабилизируема.*

Доказательство. По теореме 7 систему $\mathscr{L}$ можно заменить линейно эквивалентной системой вида

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=u,$$

или

$$\dot{x}^1=x^2, \quad \dot{x}^2=x^3, \quad \ldots, \quad \dot{x}^n=-a_nx^1-a_{n-1}x^2-\ldots-a_1x^n+u.$$

Возьмем произвольный постоянный вектор

$$D=(d_n,\ d_{n-1},\ \ldots,\ d_1)$$

и пусть

$$u = d_n x^1 + d_{n-1} x^2 + \ldots + d_1 x^n.$$

Тогда наша система $\mathscr{D}$ становится системой с обратной связью:

$$x^{(n)} + (a_1 - d_1) x^{(n-1)} + \ldots + (a_n - d_n) x = 0.$$

В частности, можно получить устойчивую систему, если выбрать вектор D таким образом, чтобы характеристический многочлен имел вид

$$\lambda^n + (a_1 - d_1) \lambda^{n-1} + \ldots + (a_n - d_n) = (\lambda + 1)^n;$$

это можно сделать, полагая

$$a_i - d_i = \binom{n}{i} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Теорема доказана.

В последних двух теоремах этого раздела мы вновь вернемся к общему случаю многомерных управлений $u(t) \subset R^m$, $m \geqslant 1$. Мы изучим здесь некоторые, не обладающие свойством управляемости, системы, пытаясь либо выделить из них части, обладающие управляемостью, либо аппроксимировать системами, обладающими управляемостью.

Теорема 10. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu.$$

Существует единственное линейное подпространство C пространства R^n, такое, что

(a) *C — инвариантное подпространство для $\mathscr{L}$, т. е. каждая траектория системы, исходящая из точки, принадлежащей подпространству C, целиком лежит в C и никакая траектория, начинающаяся вне C, не может привести в C.*

(b) *если рассматривать $\mathscr{L}$ только в подпространстве C, то система $\mathscr{L}$ будет обладать свойством управляемости.*

Доказательство. Пусть C — множество всех тех точек в R^n, в которые система может быть переведена из начала координат за конечный промежуток времени с помощью управлений $u(t) \subset R^m$. Покажем сначала, что C является линейным пространством.

Пусть $0 < t_1 < t_2$; рассмотрим точки C:

$$x_1(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - s)} B u_1(s)\, ds,$$

$$x_2(t_2) = \int_0^{t_2} e^{A(t_2 - s)} B u_2(s)\, ds.$$

В первом интеграле положим $\sigma = s + t_2 - t_1$ и определим управление следующим образом:

$$U_1(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{на } \ 0 \leqslant t \leqslant t_2 - t_1, \\ u_1(\sigma - t_2 + t_1) & \text{на } \ t_2 - t_1 < \sigma \leqslant t_2. \end{cases}$$

Тогда

$$x_1(t_1) = \int_0^{t_2} e^{A(t_2 - \sigma)} BU_1(\sigma)\, d\sigma$$

и, следовательно, точки $x_1(t_1)$ можно достичь из начала координат за время t_2. Таким образом, линейной комбинации управлений $U_1(t)$ и $u_2(t)$ на $0 \leqslant t \leqslant t_2$ соответствует аналогичная линейная комбинация точек $x_1(t_1)$ и $x_2(t_2)$. Следовательно, C является линейным пространством.

Заметим, что множество C состоит из одной нулевой точки в том и только том случае, если $\mathscr{L}$ полностью неуправляемая система, т. е. если $B = 0$. В этом случае теорема верна, поэтому условимся считать, что размерность k подпространства C строго больше нуля.

В силу конструкции пространства C никакая траектория системы $\mathscr{L}$ из C не выводит. Ясно, что существует система координат $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ в R^n такая, что подпространство C в R^n задается уравнениями $\bar{x}^{k+1} = 0, \ \ldots, \ \bar{x}^n = 0$, а система $\mathscr{L}$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1 u, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \phantom{A_{11}\bar{x}_1 + {}} A_{22}\bar{x}_2, \end{aligned}$$

где

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^k \end{bmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}^{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{bmatrix}.$$

Здесь мы использовали, что $\dot{\bar{x}}_2 = 0$ на C. Заметим теперь, что никакая точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, для которой $\bar{x}_2 \neq 0$, не может быть переведена в C, следовательно C — инвариантное подпространство.

Будем теперь рассматривать систему $\mathscr{L}$ лишь на C, т. е. положим

$$(\mathscr{L}_c) \qquad \dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + B_1 u, \quad \bar{x}_2 = 0.$$

Поскольку из начала координат можно попасть в любую точку C то на основании следствия 2 из теоремы 5 система $\mathscr{L}_c$ обладает свойством управляемости в C.

Пусть, наконец, C' есть любое инвариантное линейное подпространство в R^n, в котором система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости. Поскольку C' инвариантно, то оно должно включать все точки, в которые можно попасть из начала координат, так что $C \subset C'$. Поскольку система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости в C', то из каждой точки C' можно попасть в начало координат и, следовательно, $C' \subset C$. Поэтому $C' = C$, и мы доказали единственность подпространства C, удовлетворяющего условиям (a) и (b) нашей теоремы. Тем самым теорема полностью доказана.

Инвариантное подпространство C называется *подпространством управляемости* для системы $\mathscr{L}$, а система $\mathscr{L}_c$ — *вполне управляемой* частью системы $\mathscr{L}$.

Следствие. *Пусть C — подпространство управляемости для системы*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu.$$

Тогда существуют координаты $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ в R^n такие, что подпространство C определяется в R^n уравнением $\bar{x}_2 = 0$, а система $\mathscr{L}$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1 u, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \qquad\quad\;\; A_{22}\bar{x}_2, \end{aligned}$$

причем размерность подпространства C совпадает с рангом матрицы $[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$.

Доказательство. Доказывая теорему, мы установили существование требуемых координат $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$. (Заметим, что $\bar{x}_1 = 0$, если $C = 0$, т. е. если $B = 0$ и $\mathscr{L}$ полностью неуправляема.)

Поскольку система $\mathscr{L}_c$ обладает свойством управляемости в C, то

$$\dim C = \operatorname{rank}[B_1, A_{11}B_1, A_{11}^2B_1, \ldots, A_{11}^{k-1}B_1] = k.$$

Кроме того,

$$\operatorname{rank}[B_1, A_{11}B_1, \ldots, A_{11}^{k-1}B_1] = \operatorname{rank}[B_1, A_{11}B_1, \ldots, A_{11}^{n-1}B_1].$$

Однако

$$\bar{A}^l\bar{B} = \begin{bmatrix} A_{11}^l B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant n,$$

где

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\dim C = \operatorname{rank}\,[\overline{B}, \overline{A}\overline{B}, \overline{A}^2\overline{B}, \ldots, \overline{A}^{n-1}\overline{B}]$$

и из инвариантности ранга матрицы управляемости относительно линейной эквивалентности следует утверждение следствия.

Теорема 11. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}_0) \qquad \dot{x} = A_0 x + B_0 u.$$

Если система $\mathscr{L}_0$ *обладает свойством управляемости, то существует такое* $\varepsilon_1 > 0$, *что любая автономная линейная система*

$$(\mathscr{L}) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \text{ для которой } |A - A_0| < \varepsilon_1,\ |B - B_0| < \varepsilon_1$$

будет также обладать свойством управляемости.

Если система $\mathscr{L}$ *не является вполне управляемой, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует обладающая свойством управляемости система*

$$(\mathscr{L}_1) \quad \dot{x} = A_1 x + B_1 u, \text{ такая, что } |A_1 - A_0| < \varepsilon,\ |B_1 - B_0| < \varepsilon.$$

Таким образом, множество обладающих свойством управляемости систем открыто и всюду плотно в метрическом пространстве всех автономных линейных систем в R^n, *где расстояние между системами определяется по формуле* $|A_1 - A_0| + |B_1 - B_0|$.

Доказательство. Если система $\mathscr{L}_0$ обладает свойством управляемости в R^n, то строки матрицы $[B_0, A_0B_0, \ldots, A_0^{n-1}B_0]$ образуют систему из n линейно независимых векторов в пространстве R^{nm}. Если $|A - A_0| < \varepsilon_1$ и $|B - B_0| < \varepsilon_1$ для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$, то строки матрицы $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ должны аппроксимировать эти n векторов, и поэтому также должны быть линейно независимыми. Но тогда система

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

также будет вполне управляемой.

С другой стороны, предположим, что система $\mathscr{L}_0$ не является вполне управляемой. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такие матрицы A_1 и B_1, чтобы $|A_1 - A_0| < \varepsilon$, $|B_1 - B_0| < \varepsilon$ и чтобы элементы матриц A_1 и B_1 были алгебраически независимы над полем рациональных чисел (т. е. чтобы не существовало полиномиальной (имеется в виду полином с рациональными коэффициентами) связи между элементами матриц A_1 и B_1 — существование таких матриц A_1 и B_1 есть стандартное свойство арифметики вещественных чисел). Тогда

$$\operatorname{rank}\,[B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{n-1}B_1] = n,$$

поскольку ни один из $(n \times n)$-миноров матрицы не может равняться нулю, так как каждый из них представляет собой

многочлен от элементов матриц A_1 и B_1. Следовательно, система $\mathscr{L}_1$ обладает свойством управляемости. Теорема доказана.

Несмотря на некоторую искусственность построений при доказательстве теоремы 11, она имеет важный физический смысл. Из нее следует, что, вообще говоря, произвольно взятая автономная линейная система $\mathscr{L}$ скорее всего будет обладать свойством управляемости, т. е. управляемость является типичным свойством автономной линейной системы. В частности, для описания реальной физической системы с приближенно известными параметрами всегда можно подобрать вполне управляемую систему $\mathscr{L}$. Однако иногда время, требуемое для приведения так подобранной системы в желаемое состояние, может быть столь велико, что выгоднее в качестве математической модели использовать систему $\mathscr{L}$, не обладающую свойством управляемости.

Упражнения

1. Для системы $\ddot{x}=u$, с ограничением $|u(t)|\leqslant 1$ вычислить и изобразить множество достижимости $K(t_1)$ для $t_1=1$ и $t_1=2$ с начальным положением $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$; с начальным положением $x_0=0$, $\dot{x}_0=4$.

Указание: использовать теорему 2 и пример 2 главы 1.

2. Рассмотрите линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=A(t)x+B(t)u+v(t)$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$ и начальной точкой x_0 в момент t_0. Точка $P\in\partial K(t_1)$ называется вершиной множества $K(t_1)$, если через нее проходит несколько гиперплоскостей, опорных для $K(t_1)$. Покажите, что если точка $x(t_1)=P$ является вершиной множества $K(t_1)$, то точка $x(\tau)$ будет вершиной множества $K(\tau)$ для всех τ таких, что $t_0<\tau\leqslant t_1$

3. Рассмотрите автономную линейную систему

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=\beta_m u^{(m)}+\ldots+\beta_0 u,\quad \beta_m\neq 0.$$

Покажите, что ее можно из любого начального состояния $(x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(n-1)})$ перевести в состояние $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ за конечное время с помощью управления $u(t)\in C^m$.

4. Рассмотрим автономную линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

с ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$, содержащим точку $u=0$.

(a) Покажите, что $K(t_1)\subset K(t_2)$ для $0<t_1<t_2$, если в качестве начальной точки принять $x_0=0$. [Указание: см. теорему 10.]

(b) Покажите, что если множество Ω выпукло и имеет непустую внутренность, то внутренность множества $K(t_1)$ содержится в $K_\infty(t_1)$. Здесь под $K_\infty(t_1)$ понимается множество достижимости для исходной точки x_0 и управлений $u(t)\in C_\infty$ в Ω. [Указание: управление $u(t)\subset\Omega$ можно слабо аппроксимировать управлением из C^∞, лежащим внутри Ω.]

5. Для каких значений действительного параметра ρ система

$$\begin{bmatrix}\dot{x}^1\\ \dot{x}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & \rho-3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ \rho^2-\rho & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^1\\ u^2\end{bmatrix}$$

будет обладать свойством управляемости? Для каких ρ эту систему можно свести к обладающей свойством управляемости системе со скалярным управлением?

6. Рассмотрим автономную линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad u \in R^m.$$

Если существует такой ненулевой m-мерный вектор w, что векторы

$$Bw, \; ABw, \; A^2Bw, \; \ldots, \; A^{n-1}Bw$$

линейно независимы, то система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости. Докажите это утверждение и приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

7. Рассмотрим автономную линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu, \quad u \in R^1.$$

Пусть $\overline{A} = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ — каноническая жорданова форма матрицы A, и пусть

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdots \\ b_{1n_1} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

— соответствующий вектор $\overline{b}$, записанный, как в теореме 6. Докажите, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(a) никакие две клетки A_{k_1} и A_{k_2} не имеют одинаковых собственных значений;

(b) $$b_{1n_1} \neq 0, \quad b_{2n_2} \neq 0, \; \ldots, \; b_{kn_k} \neq 0.$$

8. В задаче Лурье—Летова из теории автоматического регулирования рассматривается линейная система в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu$$

с матрицей $A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, где все собственные значения λ_i различны. Покажите, что система $\mathscr{L}$ линейно эквивалентна линейной системе $\mathscr{L}$ с матрицей $\overline{A} = A$ и матрицей

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

в том и только том случае, если система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости.

9. В критерии устойчивости Рауса—Гурвица утверждается, что каждый корень λ действительного многочлена

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

имеет отрицательную вещественную часть тогда и только тогда, когда $D_k > 0$,

$k=1, 2, \ldots$ Здесь

$$D_1=a_1, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \ldots, D_k=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \ldots & a_{2k-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k \end{vmatrix},$$

где $a_k \geqslant 0$.

(a) Покажите, что если $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ для всех корней λ, то $a_k \geqslant 0$ и $D_k \geqslant 0$ для $k=1, 2, \ldots, n$.

(b) Покажите, что если $a_k \geqslant 0$ и $D_k \geqslant 0$ для $k=1, \ldots, n$, то при $n \leqslant 3$ все корни λ имеют отрицательную вещественную часть. Пример $\lambda^4+\lambda^2+1=0$ показывает, что это утверждение неверно при $n=4$.

10. Покажите, что системы

$$Dx=u \quad \text{и} \quad (D^2+1)\,x=u$$

обладают приемлемыми управлениями $u(t)$ (в смысле теоремы 8), удовлетворяющими ограничению $|u(t)|<\varepsilon$, которые переводят их из произвольной начальной точки в начало координат.

11. Покажите, что автономные линейные системы

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

обладающие свойством управляемости относительно скалярных управлений[1]) являются типичными в смысле теоремы 11.

12. Автономная линейная система в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+bu, \quad u \in R^1$$

называется управляемой со сколь угодно малым управлением, если для любого $\varepsilon>0$ и любых двух точек x_0 и x_1 из R^n существует управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничению $|u(t)| \leqslant \varepsilon$, которое переводит систему из состояния x_0 в состояние x_1 за конечный промежуток времени. Покажите, что система $\mathscr{L}$ будет управляемой со сколь угодно малым управлением в том и только том случае, если

(a) $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости;

(b) каждое собственное значение λ матрицы A является чисто мнимым.

13. Система из двух сцепленных пружин совершает в горизонтальной плоскости колебательное движение около положения равновесия. (Трение отсутствует.) Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}=-k_1x+k_2(y-x), \quad \ddot{y}=-k_2(y-x)+u,$$

где x и y — отклонения свободных концов от их положений равновесия, $k_1>0$ и $k_2>0$ — коэффициенты жесткости пружин, а $u(t)$ — управляющая сила, приложенная к концу второй пружины. Покажите, что такая система является управляемой со сколь угодно малым управлением (считать что движение происходит вблизи положения равновесия $x=\dot{x}=0$, $y=\dot{y}=0$).

14. Рассмотрим автономную линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

---

[1]) См. теорему 6. (*Прим. ред.*)

с начальным положением x_0 в момент $t_0=0$ и с компактным ограничивающим множеством Ω. В предположении, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, множество $H(\Omega)$ имеет непустую внутренность в R^m, а ранг матрицы B равен m, покажите, что компактное подмножество $Z\subset\Omega$ обладает свойством «релейности», т. е.

$$K_Z(t_1)\equiv K_\Omega(t_1) \quad \text{для всех} \quad t_1\geqslant 0$$

тогда и только тогда, когда

$$H(Z)=H(\Omega).$$

[Указание: в теореме 4 утверждается, что из условия $H(Z)=H(\Omega)$ следует наличие у множества Z свойства «релейности». Для доказательства обратного утверждения предположим, что $H(Z)\neq H(\Omega)$ и рассмотрим опорную гиперплоскость π к $H(\Omega)$, не пересекающую множества $H(Z)$. Пусть $\eta_1 B$ — внешняя единичная нормаль к плоскости π при некотором η_1. Возьмем точку $P_0\in\partial K_\Omega(t_1)$, в которой внешняя нормаль совпадает с η_1. Это возможно, так как $K_\Omega=K_{H(\Omega)}$ есть выпуклое тело и ранг матрицы B равен m. Тогда любое управление $u_0(t)\subset H(\Omega)$, переводящее систему из точки x_0 в точку P_0, должно удовлетворять принципу максимума, а отсюда следует, что управление $u_0(t)$ находится вне множества $H(Z)$ для всех t, близких к t_1].

15. Пусть система $\dot{x}=Ax+bu$ обладает свойством управляемости, как в теореме 9. Покажите, что управление $u=Dx$ можно выбрать таким образом, чтобы собственные значения матрицы $A+bD$ равнялись заранее заданным величинам (однако таким, чтобы матрица $A+bD$ оставалась действительной).

2.4. Управляемость и наблюдаемость

Рассмотрим действительную автономную линейную систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

где $u\in R^m$ — входной сигнал, или вектор управления, а $x\in R^n$ — решение, или вектор состояния системы. Может случиться, что лишь некоторые из составляющих вектора состояния или линейная комбинация его компонент имеют физический смысл, или вообще наблюдаемы. В этом случае описание системы дополняется уравнением наблюдения

$$(\mathscr{O}) \qquad \omega=Hx.$$

Здесь H — действительная постоянная $(r\times n)$-матрица, определяющая наблюдаемый выход системы — r-мерный вектор ω, зависящий от n-мерного вектора состояния x. Совокупность уравнений $\mathscr{L}$ и $\mathscr{O}$, полностью описывающая зависимость выхода от входа, называется *автономной линейной наблюдаемой системой*.

Пример. Рассмотрим систему

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=u,$$

в которой наблюдаемым является лишь сам выход, но не его производные. Чтобы описать соответствующий процесс наблюдения,

надо к системе уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \vdots \\ \\ \dot{x}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

добавить уравнение

$$\omega = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Для линейной наблюдаемой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \omega = Hx$$

зависимость между входом и выходом дается формулой

$$\omega(t) = He^{At} \int_0^t e^{-As} Bu(s)\, ds,$$

при начальных условиях $x_0 = 0$, $t = 0$. Если все составляющие вектора управления, кроме $u^j(t)$, равны нулю, т. е.

$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} e_j$$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ и $u(t) = 0$ при остальных значениях t,

то

$$\omega(t) = He^{At} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-As} Be_j\, ds \quad \text{при} \quad t \geqslant \varepsilon > 0.$$

В предельном случае, при $\varepsilon \to 0$, данная формула определяет решение, соответствующее единичному импульсу на входе системы, т. е. сигналу $u(t) = \delta(t)\, e_j$ ($\delta(t)$-функцию можно представить как

некоторую идеализацию ступенчатой функции, или, точнее, как некоторую меру с весом $+1$, сосредоточенную в точке $t=0$). В пределе решение примет вид

$$\omega(t) = He^{At}Be_j \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Иначе говоря, элемент (i, j)-матрицы

$$W(t) = He^{At}B \quad \text{при} \quad t \geqslant 0$$

дает составляющую $\omega^i(t)$ решения $\omega(t)$, соответствующего импульсному сигналу $u(t) = \delta(t)e_j$. Матрицей $W(t)$ полностью определяются все связи между входом и выходом наблюдаемой системы. Действительно, для произвольного управления $u(t)$ имеем

$$\omega(t) = \int_0^t W(t-s)\,u(s)\,ds \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

где $x_0 = 0$ при $t = 0$.

Поскольку соотношение между $u(t)$ и $\omega(t)$ имеет вид свертки, то удобно применить преобразование Лапласа к функциям $u(t)$ и $\omega(t)$. Обозначая их изображения через $U(p)$ и $\Omega(p)$, получим матричную передаточную функцию

$$Z(p) = L(W(t)) = \int_0^\infty W(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Тогда соотношение, связывающее вход с выходом системы, примет вид

$$\Omega(p) = Z(p)\,U(p).$$

Определение. Для автономной линейной наблюдаемой системы

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad \omega = H(x)$$

матрица

$$W(t) = \begin{cases} He^{At}B & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

называется *импульсно-переходной матрицей*, или *весовой матричной функцией*.

Матрица, определяющая зависимость выхода от входа,

$$Z(p) = L(W(t)) = \int_0^\infty W(t)\,e^{-pt}\,dt,$$

называется *матричной передаточной функцией* системы.

В этом разделе мы убедимся, что весовая функция, так же как и передаточная функция, полностью характеризует все аспекты задачи наблюдения. В основной теореме 14 дается строгое оказательство точного соответствия между матрицами вида $Z(p)$

и процессами наблюдения. Сначала мы исследуем, какие из матриц $Z(p)$ могут служить передаточными функциями; затем выделим два важных для приложений класса линейных процессов, а именно: класс вполне управляемых процессов, и класс вполне наблюдаемых процессов, а затем покажем, что эти классы в определенном смысле двойственны друг другу.

В силу известных свойств матрицы e^{At} для постоянной $(n\times n)$-матрицы A можно заключить, что $He^{At}B$ представляет собой $(r\times m)$-матрицу с элементами вида $t^\sigma e^{\alpha t}\cos\beta t$ или $t^\sigma e^{\alpha t}\sin\beta t$ $(\sigma=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots)$ и действительными α, β, или конечными линейными комбинациями таких членов. Назовем такие $(r\times m)$-матрицы экспоненциально-полиномиальными матрицами.

Теорема 12. *Действительная $r\times m$-матрица*

$$W(t)=\begin{cases} W_0(t) & \text{при} \quad t\geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t<0 \end{cases}$$

является матричной весовой функцией для некоторого действительного автономного линейного наблюдаемого процесса в том и только том случае, если $W_0(t)$ является экспоненциально-полиномиальной матрицей.

Далее, $(r\times m)$-матрица $Z(p)$ есть матричная передаточная функция для некоторой действительной автономной линейной наблюдаемой системы в том и только том случае, если каждый элемент матрицы $Z(p)$ является действительной дробно-рациональной функцией от p, степень числителя которой меньше степени знаменателя.

Доказательство. Применяя элементарные формулы для преобразования Лапласа

$$L(t^\sigma e^{\alpha t}\cos\beta t)=(-1)^\sigma\frac{d^\sigma}{dp^\sigma}\left[\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\right],$$

$$L(t^\sigma e^{\alpha t}\sin\beta t)=(-1)^\sigma\frac{d^\sigma}{dp^\sigma}\left[\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}\right]$$

и обратные формулы

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)=1,$$

$$L^{-1}\left(\frac{p^\rho}{(p-a)^\sigma}\right)=\frac{d^\rho}{dt^\rho}\left[\frac{t^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!}e^{at}\right] \text{ для } \sigma\geqslant 1,\ 0\leqslant\rho<\sigma,$$

а также правила разложения на элементарные дроби, получаем, что $W_0(t)$ будет экспоненциально-полиномиальной матрицей тогда и только тогда, когда все элементы матрицы $Z(p)$ являются дробно-рациональными функциями, у которых степень числителя меньше степени знаменателя. Таким образом надо доказать лишь первую часть теоремы.

Поскольку весовая матрица для любой действительной автономной наблюдаемой системы имеет вид $He^{At}B\,(t \geqslant 0)$, то матрица $W_0(t)$ и ее преобразование Лапласа $Z(p)$ должны иметь вид, указанный в теореме.

Пусть теперь $W_0(t)$ есть экспоненциально-полиномиальная матрица. Для доказательства теоремы мы должны построить автономную наблюдаемую систему, весовая функция которой выражается через $W_0(t)$, как указано в теореме.

Пусть $W_0(t) = (l_{ij}(t))$, где $l_{ij}(t)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant m$, представляет собой конечную линейную комбинацию членов вида $t^{\sigma}e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $t^{\sigma}e^{\alpha t}\sin\beta t$. Каждый элемент $l_{ij}(t)$ является решением некоторого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, например уравнения некоторого достаточно высокого порядка N. Следовательно, каждая из функций $l_{ij}(t)$ представляет собой элемент фундаментальной $(N \times N)$-матрицы решений $e^{A_{ij}t}C_{ij}$, и если выбрать постоянные матрицы A_{ij} и C_{ij} соответствующим образом, то элемент $l_{ij}(t)$ будет стоять в левом верхнем углу.

Построим теперь систему дифференциальных уравнений порядка Nrm,

$$\dot{x} = Ax,$$

где

$$A = \operatorname{diag}\{A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1m}, A_{21}, \ldots, A_{2m}, \ldots, A_{r1}, \ldots, A_{rm}\}.$$

Положим

$$C = \operatorname{diag}\{C_{11}, \ldots, C_{1m}, \ldots, C_{r1}, \ldots, C_{rm}\}$$

и рассмотрим матрицу

$$e^{At}C = \operatorname{diag}\{e^{A_{11}t}C_{11}, \ldots, e^{A_{rm}t}C_{rm}\},$$

содержащую каждый из элементов $l_{ij}(t)$ в верхнем левом углу соответствующей клетки $e^{A_{ij}t}C_{ij}$. Теперь остается выбрать постоянные матрицы H и B_1 так, чтобы имело место равенство

$$W_0(t) = He^{At}CB_1 = He^{At}B.$$

В качестве таковых можно взять, например, матрицы, состоящие из 0 и 1, расположенных определенным образом. Так, для случая $r = 2$, $m = 3$ надо взять

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 10\ldots0 & 10\ldots0 & 10\ldots0 & 00\ldots0 & 00\ldots0 & 00\ldots0 \\ 00\ldots0 & 00\ldots0 & 00\ldots0 & 10\ldots0 & 10\ldots0 & 10\ldots0 \end{array}\right),$$

так, что

$$He^{At}C = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} l_{11}*\ldots* & l_{12}*\ldots* & l_{13}*\ldots* & 0\ \ldots0 & 0\ \ldots0 & 0\qquad 0 \\ 0\ \ldots0 & 0\ \ldots0 & 0\ \ldots0 & l_{21}*\ldots* & l_{22}*\ldots* & l_{23}*\ldots* \end{array}\right).$$

Затем возьмем

$$B_1=\left[\begin{array}{c|c|c}
1 & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 1 & 0\\
\dots & 0 & \dots\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 1\\
\dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0\\
\hline
1 & 0 & 0\\
0 & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 1 & 0\\
\dots & 0 & \dots\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 1\\
\dots & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

так, что

$$He^{At}CB_1=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\end{bmatrix},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Рассмотрим автономную линейную наблюдаемую систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu, \quad \omega=Hx.$$

Постоянное линейное невырожденное преобразование в R^n

$$\bar{x}=Px$$

позволяет преобразовать систему $\mathscr{L}$ к такому виду:

$$(\overline{\mathscr{L}}) \qquad \dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u, \quad \omega=\bar{H}\bar{x},$$

где $\bar{A}=PAP^{-1}$, $\bar{B}=PB$, и $\bar{H}=HP^{-1}$. Системы $\mathscr{L}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ являются линейно эквивалентными относительно линейного преобразования

$\bar{x}=Px$; линейно эквивалентные наблюдаемые системы имеют одни и те же характерные свойства. Например, весовые матрицы таких систем совпадают, поскольку они не зависят от координат x в R^n, т. е.

$$W(t)=He^{tA}B=HP^{-1}e^{tPAP^{-1}}PB=\bar{H}e^{t\bar{A}}\bar{B}, \quad t \geqslant 0.$$

Из теоремы 10 следует, что любая линейная автономная система, наблюдаемая в R^n,

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu, \quad \omega=Hx,$$

линейно эквивалентна наблюдаемой системе канонического вид

$$\begin{gathered}\dot{\bar{x}}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{A}_{12}\bar{x}_2+\bar{B}_1u,\\ \dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2\end{gathered}$$

и

$$\omega=\bar{H}_1\bar{x}_1+\bar{H}_2\bar{x}_2.$$

Здесь $\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix}$ — координаты в R^n, а уравнение $\bar{x}_2=0$ определяет обладающую свойством управляемости часть системы $\mathscr{L}$, причем система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости тогда и только тогда, когда совокупность координат $\bar{x}_2$ пуста, т. е. $\bar{x}_1$ определяет все пространство R^n. Наблюдаемая система $\mathscr{L}$ называется *полностью неуправляемой* (или *свободной*), если пусто множество координат $\bar{x}_1$, т. е. $B=0$. Каждую систему $\mathscr{L}$ можно разложить на систему, определенную на $\bar{x}_2=0$: $\dot{\bar{x}}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{B}_1u$ (эта система обладает свойством управляемости), и на систему $\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2$ — проекцию системы $\mathscr{L}$ на подпространство $\bar{x}_1=0$, которая полностью неуправляема. Таким образом, вполне управляемую наблюдаемую систему можно определить, как систему, не содержащую полностью неуправляемой части.

Аналогично можно назвать *полностью ненаблюдаемой* систему вида

$$\dot{x}=Ax+Bu, \quad \omega=0,$$

т. е. систему, у которой $H=0$. Наблюдаемую систему, не имеющую такой полностью ненаблюдаемой части, естественно назвать *вполне наблюдаемой*.

Определение. Автономная линейная наблюдаемая система в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu, \quad \omega=Hx$$

называется *вполне наблюдаемой*, если она не является линейно

эквивалентной никакой системе вида

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1 u,$$
$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2 u$$

и

$$\omega = \bar{H}_2\bar{x}_2,$$

где $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ и множество $\bar{x}_1$ непусто.

Заметим, что если система $\mathscr{L}$ допускает такое представление с непустой группой координат $\bar{x}_1$, то сужение системы $\mathscr{L}$ на подпространство $\bar{x}_2 = 0$ (например, для $u = 0$), имеет вид

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1, \quad \omega = 0.$$

Последняя система является полностью ненаблюдаемой. Ниже мы определим разложение произвольной линейной автономной системы на вполне наблюдаемую и полностью ненаблюдаемую часть, и покажем, что система $\mathscr{L}$ будет вполне наблюдаемой лишь в том случае, если свободная система с $u \equiv 0$ не имеет нетривиального решения $x(t)$, для которого бы $\omega(t) \equiv 0$.

Теорема 13. *Автономная линейная наблюдаемая система в R^n*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad \omega = Hx$$

является вполне наблюдаемой в том и только том случае, если двойственная динамическая система

$$(\mathscr{L}') \qquad \dot{x} = A'x + H'u, \quad \omega = B'x$$

будет вполне управляемой. А это будет тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}[H', A'H', A'^2H', \ldots, A'^{n-1}H'] = n.$$

Доказательство. Система $\mathscr{L}$ не является вполне наблюдаемой лишь в том случае, если существует такое преобразование координат $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = Px$ (с непустой совокупностью координат $\bar{x}_1$), что

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \text{ и } \bar{H} = HP^{-1} = (0, \ \bar{H}_2).$$

Но тогда под действием преобразования $\tilde{x}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}=(P^{-1})'x$ коэффициенты системы $\mathscr{L}'$ примут вид

$$P^{-1\prime}A'P'=\begin{bmatrix}\bar{A}'_{11} & 0\\ \bar{A}'_{12} & \bar{A}'_{22}\end{bmatrix},$$

$$P^{-1\prime}H'=\begin{bmatrix}0\\ \bar{H}'_2\end{bmatrix} \text{ и } B'P'=[\bar{B}'_1,\ \bar{B}'_2],$$

так что система $\mathscr{L}'$ будет неуправляемой. Аналогично можно показать, что если система $\mathscr{L}'$ неуправляема, то система $\mathscr{L}$ будет ненаблюдаемой.

Итак, система $\mathscr{L}$ вполне наблюдаема в том и только том случае, если система $\mathscr{L}'$ вполне управляема, т. е. если

$$\operatorname{rank}[H', A'H', A'^2H', \ldots, A'^{n-1}H']=n.$$

Теорема доказана.

Заметим, что система $\mathscr{L}'$ является двойственной к системе $\mathscr{L}$ и поэтому она вполне управляема тогда и только тогда, когда система $\mathscr{L}$ вполне наблюдаема. Отмеченное здесь свойство двойственности показывает, что теоремам об управляемости должны соответствовать двойственные к ним теоремы о наблюдаемости (см. ниже упражнение 4). Например, следующая лемма определяет ненаблюдаемую часть свободной наблюдаемой системы.

Лемма 1. *Рассмотрим линейную автономную систему*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax, \quad \omega=Hx,$$

которая является полностью неуправляемой в R^n. Тогда существует единственное линейное подпространство $\mathscr{U}$ некоторой максимальной размерности l $(0\leqslant l\leqslant n)$ такое, что

(a) *подпространство $\mathscr{U}$ инвариантно;*

(b) *сужение системы $\mathscr{L}$ на подпространство $\mathscr{U}$ есть полностью ненаблюдаемая система.*

Система $\mathscr{L}$ будет вполне наблюдаемой тогда и только тогда, когда $\mathscr{U}=0$. В соответствующей системе координат $\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix}$, в которой подпространство $\mathscr{U}$ задается уравнением $\bar{x}_2=0$, данная система описывается так:

$$\dot{\bar{x}}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{A}_{12}\bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2$$

и

$$\omega=\bar{H}_2\bar{x}_2.$$

На подпространстве $\overline{x}_1=0$, *которое будет нулевым при* $l=n$, *система*

$$\dot{\overline{x}}_2=\overline{A}_{22}\overline{x}_2,\quad \omega=H_2\overline{x}_2$$

будет вполне наблюдаемой.

Доказательство. Если $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ — два инвариантных подпространства, на которых система $\mathcal{L}$ полностью ненаблюдаема, то $\omega=Hx$ будет тождественно равняться нулю на подпространстве $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$. Следовательно, $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ также будет инвариантным подпространством системы $\mathcal{L}$, на котором она полностью ненаблюдаема. Определим линейное пространство $\mathcal{U}$ как сумму всех инвариантных линейных подпространств, на которых система $\mathcal{L}$ полностью ненаблюдаема. Такое пространство $\mathcal{U}$ по построению будет инвариантным подпространством, на котором $\mathcal{L}$ полностью ненаблюдаема, причем любое другое подпространство с теми же свойствами будет иметь размерность, меньшую, чем $\mathcal{U}$.

В соответствующих координатах $\overline{x}=\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}$, в которых подпространство $\mathcal{U}$ задается уравнением $\overline{x}_2=0$, система примет вид, указанный в формулировке леммы. Если $l<n$, то совокупность координат $\overline{x}_2$ непуста, и спроектированная на это подпространство система

$$\dot{\overline{x}}_2=\overline{A}_{22}\overline{x}_2,\quad \omega=\overline{H}_2\overline{x}_2$$

будет вполне наблюдаемой; действительно, в противном случае пространство $\mathcal{U}$ допускало бы дальнейшее разложение $\overline{x}_2=\begin{bmatrix}\overline{x}_3\\ \overline{x}_4\end{bmatrix}$, что противоречило бы его свойству максимальности.

Итак, размерность l будет равняться n лишь в случае, когда $H=0$, т. е. когда система $\mathcal{L}$ полностью ненаблюдаема, и $l=0$ лишь в случае, когда совокупность координат $\overline{x}_1$ пуста, т. е. система $\mathcal{L}$ является вполне наблюдаемой.

Таким образом, из равенства $\mathcal{U}=0$ следует полная наблюдаемость системы $\mathcal{L}$. Обратно, если система $\mathcal{L}$ вполне наблюдаема, то в разложении, указанном в формулировке леммы, совокупность координат $\overline{x}_1$ — пуста, т. е. $\mathcal{U}=0$. Лемма доказана.

Ниже мы дадим удобную каноническую форму для линейных вполне наблюдаемых и вполне управляемых систем. Она потребуется нам для построения примеров таких систем. Мы будем рассматривать здесь лишь случай $m=1$, т. е. системы со скалярными управлениями $u(t)$, так как для этого случая теорема 7 дает основную каноническую форму линейной вполне управляемой системы.

Лемма 2. *Рассмотрим наблюдаемую автономную систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu, \quad u \in R^1, \quad \omega = Hx.$$

Предположим, что $\mathscr{L}$ вполне управляемая система и что

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} b_{1n} & b_{1,\,n-1} & \dots & b_{11} \\ b_{2n} & b_{2,\,n-1} & \dots & b_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{rn} & b_{r,\,n-1} & \dots & b_{r1} \end{bmatrix}.$$

Тогда система $\mathscr{L}$ будет вполне наблюдаемой в том и только том случае, если многочлены

$$D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

и

$$N_1(p) = b_{11}p^{n-1} + b_{12}p^{n-2} + \dots + b_{1n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$N_r(p) = b_{r1}p^{n-1} + b_{r2}p^{n-2} + \dots + b_{rn}$$

не имеют общих корней.

Доказательство. В силу теоремы двойственности система $\mathscr{L}$ будет вполне наблюдаемой тогда и только тогда, когда система

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

будет вполне управляемой. Здесь

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{bmatrix} = A',$$

$$G = \begin{bmatrix} b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{rn} \\ b_{1,\,n-1} & b_{2,\,n-1} & \dots & b_{r,\,n-1} \\ \vdots \\ b_{11} & b_{21} & \dots & b_{r1} \end{bmatrix} = H'.$$

Таким образом, система $\mathscr{S}$ вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}[G, FG, F^2G, \ldots, F^{n-1}G] = n.$$

Введем обозначение

$$\Delta[P, Q] = [Q, PQ, P^2Q, \ldots, P^{n-1}Q],$$

где P — $(n \times m)$-матрица, а Q — n-вектор-столбец. Тогда $\Delta[P, Q]$ есть матричнозначная функция двух матричных аргументов P и Q, линейная по Q. Вычислим значение этой функции при $P = F$ и $Q = \beta_j$, где β_j — столбец матрицы G.

Рассмотрим сначала последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторов-столбцов единичной матрицы I. Заметим, что $e_{i+1} = Fe_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Ясно, что

$$\Delta[F, e_1] = [e_1 e_2 \ldots e_n] = I$$

и

$$\Delta[F, e_i] = \Delta[F, F^{i-1}e_1] = F^{i-1}\Delta[F, e_1] = F^{i-1}$$

для $1 \leqslant i \leqslant n$. Запишем j-й столбец матрицы G в виде

$$\beta_j = b_{jn}e_1 + b_{jn-1}e_2 + \ldots + b_{j1}e_n.$$

Имеем

$$\Delta[F, \beta_j] = b_{jn}I + b_{jn-1}F + \ldots + b_{j1}F^{n-1} = N_j(F).$$

Таким образом, ранг матрицы $[G, FG, \ldots, F^{n-1}G]$ равен рангу матрицы $[N_1(F), N_2(F), \ldots, N_r(F)]$, поскольку эти две матрицы отличаются друг от друга лишь расположением столбцов.

При вычислении ранга матрицы $[N_1(F), \ldots, N_r(F)]$ для заданных многочленов $N_1, \ldots, N_r$ удобно воспользоваться той системой (возможно, комплексных) координат, в которой матрица F имеет треугольный вид, например,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot \\ * & \ldots & & * & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A, и следовательно, корни многочлена $D(p)$. Тогда ранг матрицы $[N_1(F), \ldots, N_r(F)]$ совпадает с рангом следующей матрицы:

$$M = \begin{bmatrix} N_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & N_1(\lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_2(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & N_2(\lambda_n) \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} N_r(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & N_r(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Предположим, что среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ многочлена $D(p)$ имеется корень, скажем, λ_1, являющийся также корнем каждого из многочленов $N_1(p), N_2(p), \ldots, N_r(p)$. Тогда первая строка матрицы $[M]$ будет состоять из нулей, и значит, ранг ее меньше n, т. е. система $\mathscr{L}$ является ненаблюдаемой. Таким образом, если система $\mathscr{L}$ вполне наблюдаема, то многочлены $D, N_1, N_2, \ldots, N_r$ не имеют общих корней.

Обратно, предположим, что многочлены $D, N_1, N_2, \ldots, N_r$ не имеют общих корней. Тогда λ_1 не обращает в нуль хотя бы один из многочленов N_j, например, N_{j1}. Выберем тот столбец матрицы $[M]$, который содержит элемент $N_{j1}(\lambda_1) \neq 0$ на главной диагонали соответствующей $(n \times n)$-субматрицы матрицы $[M]$. Выберем такие столбцы матрицы $[M]$ для каждого значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; ясно, что полученные таким образом n-столбцов будут линейно независимы. Значит, матрица $[M]$ имеет ранг n, и система $\mathscr{L}$ вполне наблюдаема. Лемма доказана.

Следующая теорема, являющаяся основным результатом настоящего раздела, объединяет два подхода в линейной теории управления: теорию передаточных функций и описание наблюдаемых систем с помощью дифференциальных уравнений.

Теорема 14. *Пусть $Z(p)$ — ненулевая $(r \times m)$-матрица, элементы которой есть правильные дробно-рациональные функции (степени числителей меньше степеней знаменателей). Тогда существует действительная автономная линейная система*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad \omega = Hx$$

вполне управляемая и вполне наблюдаемая, для которой $Z(p)$ служит передаточной матричной функцией. При $m = 1$ такая система единственна с точностью до линейной эквивалентности.

Доказательство. На основании теоремы 12 матрицу $Z(p)$ можно представить в качестве передаточной функции некоторой автономной линейной наблюдаемой системы в R^N:

$$(\tilde{\mathscr{L}}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu, \quad \omega = Hx.$$

Если выбрать в R^N систему координат $x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$, обладающую свойством, сформулированным в следствии из теоремы 10, то вполне управляемая часть системы $\tilde{\mathscr{L}}$ получится сужéнием ее на подпространство $x_b = 0$, а вся наблюдаемая система запишется в виде

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a u,$$
$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b$$

и

$$\omega = H_a x_a + H_b x_b.$$

Заметим, что совокупность координат x_a непуста, так как иначе матрица B равнялась бы нулю, т. е. система $\tilde{\mathscr{L}}$ была бы полностью неуправляемой, а ее передаточная функция — нулевой. Далее, система $\tilde{\mathscr{L}}$, рассматриваемая лишь на подпространстве $x_b=0$, обладает свойством управляемости и записывается в виде

$$(\mathscr{L}_a) \qquad \dot{x}_a = A_{aa}x_a + B_a u \quad \text{и} \quad \omega = H_a x_a.$$

Система $\mathscr{L}_a$ имеет ту же весовую матрицу, что и система $\tilde{\mathscr{L}}$, ибо

$$He^{tA}B = (H_a, H_b)\begin{bmatrix} e^{tA_{aa}} & * \\ 0 & e^{tA_{bb}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_a \\ 0 \end{bmatrix} = H_a e^{tA_{aa}} B_a.$$

Тем самым передаточной функцией системы $\mathscr{L}_a$ будет матрица $Z(p)$.

Определим теперь систему координат $x_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, как указано в лемме 1, с тем, чтобы выделить вполне наблюдаемую часть системы $\mathscr{L}_a$. Тогда система $\mathscr{L}_a$ запишется в виде

$$(\mathscr{L}_a) \qquad \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u, \quad \dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2 u$$

и

$$\omega = H_2 x_2.$$

Здесь множество координат x_2 непусто, ибо в противном случае $H_a=0$, система $\mathscr{L}_a$ полностью ненаблюдаема и, следовательно, имеет нулевую передаточную матричную функцию. Далее проекция системы $\mathscr{L}_a$ на подпространство $x_1=0$ вполне наблюдаема (в лемме 1 рассматривался случай, когда $B_a=0$, однако свойство наблюдаемости системы не зависит от B_a)

$$(\mathscr{L}) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + B_2 u, \\ \omega &= H_2 x_2. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости. Система $\mathscr{L}_a$ порядка n_a вполне управляема и, следовательно,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ B_2, & A_{22}B_2, & A_{22}^2B_2, & \dots, & A_{22}^{n_a-1}B_{22} \end{bmatrix} = n_a.$$

Таким образом, строки матрицы

$$[B_2\, A_{22}\, B_2 A_{22}^2 B_2 \ \dots \ A_{22}^{n_a-1} B_2]$$

линейно независимы. Из теоремы Гамильтона — Кэли следует, что

$$\operatorname{rank}[B_2, A_{22}B_2, A_{22}^2B_2, \dots, A_{22}^{n-1}B_2] = n,$$

где n — порядок системы $\mathscr{L}$. Поэтому система $\mathscr{L}$ вполне управляема и вполне наблюдаема. Весовая матричная функция системы $\mathscr{L}$ в точности совпадает с весовой функцией системы $\mathscr{L}_a$,

так как

$$H_a e^{tA_{aa}} B_a = (0,\ H_2) \begin{bmatrix} e^{tA_{11}} & * \\ 0 & e^{tA_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = H_2 e^{tA_{22}} B_2.$$

Таким образом, система $\mathscr{L}$ имеет требуемую передаточную функцию $Z(p)$.

Наконец, покажем, что, с точностью до линейной эквивалентности, система $\mathscr{L}$ единственна в R^n. Доказательство проведем для случая $m = 1$. В этом случае система $\mathscr{L}$ может быть записана в удобной эквивалентной форме:

$$(\mathscr{L}') \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a'_n & -a'_{n-1} & & & \dots & -a'_2 & -a'_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

и

$$\omega = \begin{bmatrix} b'_{1n} & b'_{1,\,n-1} & \dots & b'_{11} \\ b'_{2n} & b'_{2,\,n-1} & \dots & b'_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b'_{rn} & b'_{r,\,n-1} & \dots & b'_{r1} \end{bmatrix} x.$$

Матричная передаточная функция системы $\mathscr{L}'$ имеет вид

$$Z(p) = \frac{1}{D'(p)} \begin{bmatrix} N'_1(p) \\ \vdots \\ N'_r(p) \end{bmatrix},$$

где

$$D'(p) = p^n + a'_1 p^{n-1} + \dots + a'_n,$$
$$N'_1(p) = b'_{11} p^{n-1} + \dots + b'_{1n},$$
$$\vdots$$
$$N'_r(p) = b'_{r1} p^{n-1} + \dots + b'_{rn}.$$

Поскольку система $\mathscr{L}'$ вполне наблюдаема, то многочлены D', N'_1, ..., N'_r не имеют общих корней (обратите внимание на то, что знак (′) не означает здесь дифференцирования).

Мы докажем, что матричная передаточная функция

$$Z(p) = \frac{1}{D(p)} \begin{bmatrix} N_1(p) \\ \vdots \\ N_r(p) \end{bmatrix}$$

определяет соответствующую вполне управляемую и вполне наблюдаемую систему единственным образом. При этом многочлены, входящие в передаточную функцию, взаимно просты и имеют вид

$$D(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n,$$
$$N_1(p)=b_{11}p^{n-1}+\ldots+b_{1n},$$
$$\vdots$$
$$N_r(p)=b_{r1}p^{n-1}+\ldots+b_{rn}.$$

Тем самым мы покажем, что две вполне управляемые и вполне наблюдаемые системы в R^n, обладающие одной и той же передаточной функцией, будут эквивалентны. Имеем

$$\frac{N_j(p)}{D(p)}=\frac{N_j'(p)}{D'(p)}, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r$$

и, значит,

$$D(p)\,N_j'(p)=D'(p)\,N_j(p).$$

Если $p=\lambda_1$ есть корень многочлена $D(p)$, то имеется многочлен $N_{j1}(p)$, для которого λ_1 не будет корнем. Следовательно, число λ_1 должно быть корнем многочлена $D'(p)$. Отсюда следует, что многочлены $D(p)$ и $D'(p)$ имеют одни и те же корни, а поскольку коэффициенты при их старших членах равны $+1$, то $D(p)\equiv D'(p)$ (степени многочленов равны по условию). Аналогично доказывается, что

$$N_j(p)\equiv N_j'(p) \qquad (1\leqslant j\leqslant r).$$

Поэтому размерности r и n системы $\mathscr{L}'$ определяются размерами матрицы $Z(p)$ и степенью общего знаменателя $D(p)$ в матрице $Z(p)$ однозначно. Также определены и сами коэффициенты вполне наблюдаемой системы $\mathscr{L}'$. Итак, $\mathscr{L}'$ есть единственная каноническая форма вполне управляемой, вполне наблюдаемой автономной линейной системы с передаточной функцией $Z(p)$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим случай $r=m=1$ и построим вполне управляемую и вполне наблюдаемую систему, имеющую в качестве передаточной матрицы дробно-рациональную функцию

$$\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_1p^{n-1}+b_2p^{n-2}+\ldots+b_n}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n},$$

где многочлены $N(p)$ и $D(p)$ действительны и взаимно просты, причем $N(p)\not\equiv 0$. Систему, соответствующую такой передаточной функции, можно описать дифференциальным уравнением, в правую часть которого управление входит под знаком дифференциального оператора:

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=b_1u^{(n-1)}+b_2u^{(n-2)}+\ldots+b_nu.$$

Однако такое уравнение непосредственно не определяет наблюдаемой системы, поскольку оно содержит производные от управляющей функции $u(t)$. Здесь можно использовать разрывные релейные управления, однако при этом не обойтись без применения методов теории обобщенных функций. Но так как соответствующая теория нами не была предварительно развита, то мы обратимся к другому методу построения наблюдаемой системы, соответствующей данной передаточной функции.

Рассмотрим систему

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=u,\quad \omega=b_1x^{(n-1)}+\ldots+b_nx,$$

т. е. положим

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\;0\;\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\;0\;\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0\;0\;\ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и

$$H=(b_n, b_{n-1},\ \ldots,\ b_2, b_1).$$

Такая система является вполне управляемой и вполне наблюдаемой, а ее передаточной функцией будет $N(p)/D(p)$.

Напоминаем, что доказательство единственности системы, соответствующей данной передаточной функции и обладающей свойствами управляемости и наблюдаемости, проведено нами лишь для случая $m=1$ и опущено для более сложного случая $m>1$. Отметим также, что теорию управляемости и наблюдаемости можно распространить и на неавтономные линейные системы (см. упражнения), однако в этом случае удобные критерии, сформулированные в теоремах 5 и 13, будут непригодны.

Последней темой, обсуждаемой в этом разделе, будет задача следующего типа: найти такое управление, чтобы система из некоторого начального состояния x перешла за конечный промежуток времени в заданное непустое целевое множество G, и в дальнейшем оставалась в этом множестве. Наиболее интересным здесь будет случай, когда наблюдаемыми являются несколько компонентов вектора состояния — x^1, x^2, ..., x^r и их требуется привести к нулю и далее сохранять их нулевые значения. В этом случае целевое множество G будет линейным подпространством $x^1=0$, $x^2=0$, ..., $x^r=0$ пространства R^n.

Определение. Рассмотрим линейную автономную систему в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$ и целевым множеством $G \subset R^n$. Назовем *ядром множества* G и обозначим через core (G) *совокупность всех точек* $x_1 \in G$, для которых существует допустимое управление $u(t) \subset \Omega$ на $0 \leqslant t < \infty$, такое, что под его воздействием система из точки x_1 перемещается далее по траектории $x_1(t) \subset G$ на $0 \leqslant t < \infty$.

Из этого определения следует, что если требуется перевести систему в желаемую область G и затем удерживать ее в этой области, то можно просто сказать, что требуется перевести систему в область, являющуюся ядром области G. Таким образом, задача приведения системы из точки x_0 в область G с дальнейшим удерживанием траектории системы в G может быть сведена к задаче приведения системы в ядро области G без какого-либо рассмотрения дальнейшего поведения системы.

Теорема 15. *Рассмотрим автономную линейную управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$ *и замкнутым выпуклым целевым множеством* G. *Тогда* core (G) *есть замкнутое выпуклое подмножество множества* G. *Более того,*

$$\operatorname{core}(\operatorname{core}(G)) = \operatorname{core}(G).$$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — начальные состояния системы, из которых она переводится в область G с помощью управлений $u_1(t)$ и $u_2(t) \in \Omega$ на $0 \leqslant t < \infty$ соответственно. Тогда

$$x_i(t) = e^{At}x_i + e^{At}\int_0^t e^{-As}Bu_i(s)\,ds, \qquad i = 1, 2.$$

Если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то

$$\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t) = e^{At}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \\ + e^{At}\int_0^t e^{-As}B(\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s))\,ds,$$

и поэтому управление $[\lambda u_1(t) + (1-\lambda)u_2(t)] \subset \Omega$ на $0 \leqslant t \leqslant \infty$ переводит систему из точки $[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]$ в область G. Таким образом, core (G) есть выпуклое множество.

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность точек из ядра множества G и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \in G$. Пусть $u_1(t), u_2(t), \ldots$ — соответствующие им управления, удерживающие $x_1, x_2, \ldots$ в G. Выберем такую подпоследовательность точек (мы будем обозначать ее снова $x_1, x_2, \ldots$), чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(t) = \bar{u}(t) \subset \Omega$ в смысле слабой сходимости на любом

конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда решение, соответетвующее предельному управлению, будет

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x} + e^{At}\int_0^t e^{-As}B\bar{u}(s)\,ds$$

и

$$\bar{x}(t) = \lim_{k \to \infty} x_k(t)$$

для любого фиксированного $t \geqslant 0$. Поскольку G—замкнутое множество, то $\bar{x}(t) \subset G$ для всех $t \geqslant 0$. Поэтому $\bar{x} \in \operatorname{core}(G)$ и $\operatorname{core}(G)$ является замкнутым множеством.

Если точка x_0 принадлежит ядру G, то некоторому управлению $u(t) \subset \Omega$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$ соответствует решение $x_0(t) \subset G$. Но тогда для любого фиксированного $t \geqslant 0$ $x_0(t)$ служит начальной точкой некоторой траектории, целиком лежащей в G с управлением $u(t) \subset \Omega$. Следовательно, $x_0(t) \in \operatorname{core}(G)$ для любого $t \geqslant 0$. Таким образом, $x_0 \in \operatorname{core}(\operatorname{core}(G))$ и, значит,

$$\operatorname{core}(\operatorname{core}(G)) = \operatorname{core}(G).$$

Теорема доказана.

Часто бывает затруднительно установить, компактно ли ядро G, даже если G является линейным подпространством пространства R^n (см. пример в разделе 1.3). Однако в задачах на быстродействие наиболее отдаленные части области G обычно исключаются из рассмотрения. Поэтому задачи с компактным целевым множеством встречаются достаточно часто.

В случае, когда множество G является линейным подпространством, соответствующую управляемую систему называют *системой с регулированием по многим компонентам*. Следующая теорема показывает, что такие задачи чаще всего можно свести к задачам с регулированием по одной компоненте.

Теорема 16. *Рассмотрим автономную линейную управляемую систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu$$

с компактным ограничивающим интервалом $\Omega \subset R^1$, содержащим точку $u = 0$. Предположим, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, и возьмем некоторое подпространство π пространства R^n. Тогда существует такая гиперплоскость $\hat{\pi}$ размерности $n-1$, что

$$\operatorname{core}(\hat{\pi}) = \operatorname{core}(\pi).$$

Доказательство. $\operatorname{core}(\pi)$ является замкнутым выпуклым подмножеством множества π, непустым, так как оно должно содержать точку $x = 0$; следовательно, оно имеет непустую внутренность, порождающую некоторое линейное подпространство

$\pi_1 \subset \pi$ размерности $(n-r)$. core(π_1) должно совпадать с core(π). Выберем координаты $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ в R^n так, чтобы подпространство π_1 задавалось уравнениями $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^r \end{bmatrix} = 0$ (если π_1 состоит из одной точки — начала координат, то совокупность координат $\bar{x}_2$ пуста). Запишем систему $\mathscr{L}$ в виде

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2\bar{b}_1 u, \quad \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{b}_2 u.$$

Предположим, что $\bar{b}_1 = 0$. Тогда в тех точках core(π_1), где $\bar{x}_1 = 0$, имеем $\dot{\bar{x}} = 0$ и $\bar{A}_{12}\bar{x}_2 = 0$. Поскольку в подпространстве π_1 имеются внутренние точки core(π_1), то $\bar{A}_{12} = 0$. Но это означает, что

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1,$$

что противоречит управляемости системы. Поэтому $\bar{b}_1 \neq 0$.

Определим новые координаты в пространстве R^n так, чтобы подпространство π_1 задавалось соотношением $\bar{x}_1 = 0$, причем

$$\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

и запишем

$$\bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} a^1_{r+1} & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \\ a^r_{r+1} & \dots & a^r_n \end{bmatrix}.$$

Предположим, что k-я строка матрицы $\bar{A}_{12}$, $1 \leqslant k \leqslant r$ содержит ненулевые элементы. Тогда

$$\dot{\bar{x}}^k = a^k_{r+1}\bar{x}^{r+1} + \dots + a^k_n \bar{x}^n = 0$$

во всех точках core(π_1). Но это означает, что core(π_1) содержится в пересечении подпространств

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^2 = \dots = \bar{x}^r = 0 \quad \text{и} \quad a^k_{r+1}\bar{x}^{r+1} + \dots + a^k_n \bar{x}^n = 0,$$

что противоречит предположению о том, что размерность core(π_1) равна $(n-r)$. Таким образом,

$$\bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^r_{r+1} & & \dots & a^r_n \end{bmatrix}.$$

Для любых двух точек $(\bar{x}_{1a}, 0)$ и $(\bar{x}_{1b}, 0)$ в R^n существует управление $u(t) \subset R^1$, переводящее систему из первой точки во вторую вдоль траектории $\bar{x}(t)$. Но тогда управление

$$\bar{u}(t) = a^r_{r+1}\bar{x}^{r+1}(t) + \ldots + a^r_n\bar{x}^n(t) + u(t)$$

переводит систему из $\bar{x}_{1a}$ в $\bar{x}_{1b}$ в подпространстве R^r вдоль решения системы

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{b}_1\bar{u}(t).$$

Таким образом, система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости в R^r и

$$P = [\bar{A}^{r-1}_{11}\bar{b}_1,\ \bar{A}^{r-2}_{11}\bar{b}_1,\ \ldots,\ \bar{A}_{11}\bar{b}_1,\ b_1]$$

является невырожденной $(r \times r)$-матрицей.

Введем новые координаты в подпространстве $\bar{x}_2 = 0$:

$$\bar{x}_1 = Py.$$

Тогда система $\mathscr{L}$ запишется в таком виде:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}\bar{A}_{11}Py + P^{-1}\bar{A}_{12}\bar{x}_2 + P^{-1}\bar{b}_1u, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{21}Py + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{b}_2u. \end{aligned}$$

Теперь, так же как в теореме 6, непосредственным вычислением можно показать, что система $\mathscr{L}$ принимает простой вид:

$$\dot{y}^1 = \alpha_1y^1 + y^2,\ \dot{y}^2 = \alpha_2y^1 + y^3,\ \dot{y}^3 = \alpha_3y^1 + y^4,\ \ldots,\ \dot{y}^{r-1} = \alpha_{r-1}y^1 + y^r,$$

$$\dot{y}^r = \alpha_ry^1 + a^r_{r+1}\bar{x}^{r+1} + \ldots + a^r_n\bar{x}^n + u,$$

и

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{21}Py + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{b}_2u,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — некоторые действительные постоянные. Рассмотрим теперь гиперплоскость $\hat{\pi}$, определяемую уравнением $y^1 = 0$ в R^n. Тогда $\pi_1 \subset \hat{\pi}$, а значит, $\operatorname{core}(\pi_1) \subset \operatorname{core}(\hat{\pi})$. Возьмем точку Q, принадлежащую $\operatorname{core}(\hat{\pi})$. Существует решение, исходящее из точки Q, соответствующее управлению $u(t) \subset \Omega$, такое, что

$$\dot{y}^1 = 0, \quad \text{и значит,} \quad y^2 = 0;$$

но тогда

$$\dot{y}^2 = 0, \quad \text{и значит,} \quad y^3 = 0.$$

Продолжая эти рассуждения, получим, что $y^1 = 0,\ y^2 = 0, y^3 = 0, \ldots$ $\ldots, y^r = 0$ для решения, исходящего из точки Q. Таким образом, $Q \in \operatorname{core}(\hat{\pi}_1)$ и

$$\operatorname{core}(\hat{\pi}) = \operatorname{core}(\pi_1) = \operatorname{core}(\pi).$$

Теорема доказана.

Упражнения

1. Для автономной наблюдаемой системы с весовой функцией $W(t)$ показать, что если на входе системы действует управление $u(t)$, где $u(t)=0$ при $t<0$, то выходной сигнал системы при начальном состоянии $x_0=0$ будет иметь вид

$$\omega(t)=\int_{-\infty}^{\infty} W(s)\,u(t-s)\,ds \quad \text{при} \quad t\geqslant 0.$$

2. Построить линейную автономную систему, обладающую свойствами управляемости и наблюдаемости, и имеющую передаточную матричную функцию

$$Z(p)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{p^2-1} \\ \dfrac{p}{p^2+p} \\ \dfrac{p}{p^2-p} \end{bmatrix}.$$

3. Показать, что для автономной наблюдаемой системы передаточная матричная функция $Z(p)$ может быть интерпретирована как амплитудно-частотная характеристика периодических колебаний, возникающих на выходе системы под действием синусоидального входного сигнала с единичной амплитудой.

4. Рассмотрим линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u$$

с управлениями $u(t)\subset R^m$ и матрицами $A(t)$, $B(t)$, имеющими непрерывные элементы на всей оси t. Будем называть $\mathscr{L}$ *вполне управляемой системой*, если для любой пары точек x_0, x_1 из R^n и для любого начального момента t_0 существует управление $u(t)$ на некотором интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, переводящее систему из x_0 в x_1.

В следующих упражнениях развивается теория управляемости для неавтономных систем $\mathscr{L}$. Для простоты будем обозначать начальное состояние x_0 в момент времени t_0, через $\{x_0, t_0\}$.

(a) Пусть $C(t_0)$ — совокупность точек $x_0\in R^n$ таких, что из начального состояния $\{x_0, t_0\}$ система может быть переведена в начало координат.

Показать, что $C(t_0)$ есть линейное подпространство R^n, и что существует момент времени $\overline{t_0}>t_0$, такой, что из любой точки $\{x_0, t_0\}\in\{C(t_0), t_0\}$ система может быть переведена в $\{0, \overline{t_0}\}$.

(b) Из любой точки $\{x_0, t_0\}\in\{C(t_0), t_0\}$ система может быть переведена в любую точку $\{x_1, t_1\}\in\{C(t_1), t_1\}$ для $t_1\geqslant\overline{t_0}$.

(c) $\mathscr{L}$ будет вполне управляемой в том и только том случае, если каждое из множеств $C(t_0)$ совпадает с R^n.

(d) Определим симметричную полуопределенную положительную матрицу

$$W(t_0, t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0, t)\,B(t)\,B'(t)\,\Phi'(t_0, t)\,dt,$$

где $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальное матричное решение уравнения $\dot{x}=A(t)\,x$, а $\Phi(t_0, t_0)=I$. Показать, что преобразование W при $t_1=\overline{t_0}$ переводит пространство R^n в область $R[W(t_0, \overline{t_0})]=C(t_0)$. Поэтому необходимым и достаточным

условием полной управляемости системы $\mathscr{L}$ будет невырожденность матрицы $W(t, \overline{t_0})$ при любом $t_0 \in R^1$.

(e) Говорят, что наблюдаемая система

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad \omega = H(t)x$$

в пространстве R^n вполне наблюдаема при $t \leqslant t_0$, если двойственная к ней система

$$(\mathscr{L}') \qquad \dot{x} = -A'(t_0 - t)x - H'(t_0 - t)u, \quad \omega = B'(t_0 - t)x$$

обладает свойством управляемости при $t \geqslant t_0$ (т. е. $C(t_0) = R^n$). Будем называть $\mathscr{L}$ *полностью наблюдаемой*, если это верно при всех $t_0 \in R^1$. Показать, используя эти определения, что автономная система будет полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}[H', A'H', \ldots, A'^{n-1}H'] = n.$$

5. Рассмотрим линейную систему вида

$$(\mathscr{D}) \qquad x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = b_1(t)u^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)u,$$

где коэффициенты $a_1(t), \ldots, b_n(t)$ — гладкие функции, принадлежащие C^∞ на всей оси t. Тогда, если заданы начальные условия $x = \dot{x} = \ldots = x^{(n-1)} = 0$ при $t = 0$ и входной сигнал $u(t)$ $(t \geqslant 0)$ есть гладкая функция, то существует вполне определенное решение системы, или выходной сигнал $x(t)$. Рассмотрим наблюдаемую систему:

$$(\mathscr{L}) \quad \dot{x}^1 = x^2 + G_1(t)u, \quad \dot{x}^2 = x^3 + G_2(t)u, \ \ldots, \ \dot{x}^{n-1} = x^n + G_{n-1}(t)u,$$
$$\dot{x}^n = -a_n(t)x^1 - \ldots - a_1(t)x^n + G_n(t)u$$

и

$$\omega = x^1.$$

Пусть $a_0 \equiv 1$, $G_0 \equiv 0$,

$$G_1(t) = b_1(t),$$

а для $2 \leqslant i \leqslant n$

$$G_i(t) = b_i(t) - \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{i-k} \binom{n+s-i}{n-i} a_{i-k-s}(t) \frac{d^s G_k}{dt^s}.$$

(a) Показать, что коэффициенты $G_i(t)$ можно вычислить, исключая последовательно из $\mathscr{L}$ неизвестные $x^2, x^3, \ldots, x^n$ и требуя, чтобы оставшееся уравнение для x^1 совпадало с уравнением $\mathscr{D}$.

(b) Показать, что решение системы уравнений $\mathscr{L}$ $\omega = x^1(t)$ с начальной точкой $x_0 = 0$, $t = 0$ и входным сигналом $u(0) = \dot{u}(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0$ в точности совпадает с соответствующим решением $x(t)$ уравнения $\mathscr{D}$.

(c) Обычно утверждается, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством полной управляемости, если $G_n(t) \not\equiv 0$. Исследовать управляемость системы $\dot{x}^1 = x^2 + tu$, $\dot{x}^2 = u$ при этом условии.

6. Рассмотрим управляемую систему в R^2, определенную уравнением $\ddot{x} = u$ с ограничением $|u(t)| \leqslant 1$. Пусть целевое множество G есть прямая $x^1 + x^2 = 0$; определить $\operatorname{core}(G)$.

7. Рассмотрим множество всех автономных наблюдаемых систем в R^n с управлениями $u \in R^m$ и $\omega \in R^r$:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \omega = Hx.$$

Показать, что типичная система (в смысле теоремы 11) будет вполне управляемой и вполне наблюдаемой.

2.5. Оптимальное по быстродействию управление для линейных систем

В этом разделе мы докажем основные теоремы существования и единственности оптимального управления для линейных систем. Далее, мы установим принцип максимума, который определяет оптимальное управление как экстремальное управление, и используем его для построения оптимального управления с помощью метода кривых переключения. В каждом случае мы вначале будем излагать общую теорию для систем, коэффициенты которых зависят от времени, а затем будем более подробно останавливаться на автономных системах, давая для них критерии, удобные для вычислений.

Мы будем изучать задачу об оптимальном по быстродействию управлении для линейной системы в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u + v(t),$$

где матрицы коэффициентов $A(t)$, $B(t)$ и $v(t)$ интегрируемы на каждом конечном интервале оси t, в соответствии с предположением первого раздела этой главы. Ограничивающее множество Ω будет непустым компактным подмножеством в R^m, а целевое множество $G(t)$ — непустым компактным, непрерывно меняющимся во времени при $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$. Предполагается, что класс допустимых управлений Δ состоит из всех измеримых вектор-функций $u(t) \subset \Omega$, определенных на различных конечных промежутках времени $\tau_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \tau_1$ и переводящих систему из начального состояния x_0 при $t = \tau_0$ в целевое множество $G(t_1)$ при $t = t_1$.

Теорема 17. *Рассмотрим линейную управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t) + v(t)$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, начальным состоянием $x_0 \in R^n$ и компактным целевым множеством $G(t)$, непрерывно меняющимся по времени на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$. Если существует управление $u(t) \subset \Omega$ на $\tau_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \tau_1$, переводящее систему из состояния x_0 в область $G(t_1)$, то существует и оптимальное по быстродействию управление $u^*(t) \subset \Omega$ на $\tau_0 \leqslant t \leqslant t^* \leqslant \tau_1$, переводящее систему из состояния x_0 в область $G(t^*)$.

Доказательство. Если $x_0 \in G(\tau_0)$, то будем считать время управления равным нулю, т. е. $t^* = \tau_0$. Предположим теперь, что $x_0 \notin G(\tau_0)$, и рассмотрим управления $u(t)$ на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $\tau_0 < t_1 \leqslant \tau_1$. Рассмотрим множество достижимости $K(t_1)$, соответствующее начальной точке x_0 в момент времени τ_0. Обозначим через t^* точную нижнюю грань значений t_1, таких, что множество $K(t_1)$ пересекается с $G(t_1)$. В силу непрерывной зависимости множеств $K(t_1)$ и $G(t_1)$ от времени t_1 совокупность моментов времени t_1, таких, что пересечение множеств $K(t_1)$ и $G(t_1)$ непусто, представ-

ляет собой замкнутое подмножество в R^1. Поэтому t^* $(\tau_0 < t^* \leqslant \tau_1)$ есть первый момент времени, когда произошло пересечение $K(t)$ и $G(t)$, и он определяет минимальное время управления. Пусть $u^*(t) \subset \Omega$ $(\tau_0 \leqslant t \leqslant t^*)$ — некоторое управление, переводящее систему из x_0 в $K(t^*) \cap G(t^*)$. Тогда $u^*(t)$ и является искомым оптимальным управлением. Теорема доказана.

В доказанной выше теореме существования (теорема 17) мы отыскивали оптимальное по быстродействию управление $u^*(t) \subset \Omega$ на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant t^*$, переводящее систему из начального состояния x_0 при $t = \tau_0$ в целевое множество $G(t^*)$. Если не фиксировать начального момента времени, а просто искать оптимальное управление на некотором конечном интервале $\tau_0 \leqslant t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^* \leqslant \tau$, то можно доказать существование такого управления, рассматривая предел t_0^* последовательности начальных моментов времени $t_0^{(\nu)}$ таких, что время управления $t^{*(\nu)} - t_0^{(\nu)}$ монотонно убывает.

Сформулированное ниже следствие дает критерий существования оптимального управления для автономной системы.

Следствие. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, *начальным состоянием* x_0 *и началом координат в качестве целевого множества системы. Предположим, что*

((a) *точка* $u = 0$ *лежит внутри* Ω;

(b) *система* $\mathscr{L}$ *обладает свойством управляемости;*

c) *матрица* A *устойчива, т. е. каждое собственное значение* λ *матрицы* A *удовлетворяет условию* $\operatorname{Re}\lambda < 0$. *Тогда существует оптимальное по быстродействию управление* $u^*(t) \subset \Omega$, *переводящее систему из начального состояния* x_0 *в начало координат на интервале времени* $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Доказательство. В силу следствия 3 из теоремы 5 область нуль-управляемости для системы $\mathscr{L}$ совпадает со всем пространством R^n. Таким образом, существует управление $u(t) \subset \Omega$ на $0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящее систему из точки x_0 в начало координат. По теореме 17 существует и оптимальное управление $u^*(t) \subset \Omega$ на $0 \leqslant t \leqslant t^* \leqslant t_1$, переводящее систему из x_0 в начало координат, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Если $m = 1$, т. е. $\Omega \subset R^1$, то условие (с) можно заменить более слабым предположением:

(c′) *все собственные значения* λ *матрицы* A *удовлетворяют условию* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ (см. теорему 8).

Для неавтономных линейных систем имеется полезный критерий глобальной устойчивости (см. упражнение 6), однако непосредственно установить требуемую в нем управляемость системы бывает затруднительно.

Следующая теорема, известная как *принцип максимума для линейных систем*, устанавливает важные экстремальные свойства оптимального управления. Фактически, при достаточно общих предположениях относительно нормальности системы, эти экстремальные свойства полностью определяют оптимальное управление. Во всех последующих теоремах этого раздела мы будем предполагать, что целевое множество системы есть компакт, непрерывно меняющийся во времени. Необходимо лишь предположить, что это множество замкнуто и меняется по времени непрерывно в том смысле, что его пересечение с любым постоянным компактным множеством меняется непрерывно.

Теорема 18. *Рассмотрим линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u + v(t)$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, *начальной точкой* $x_0 \in R^n$ *и непрерывно меняющимся на интервале* $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ *компактным целевым множеством* $G(t)$. *Пусть* $u^*(t) \subset \Omega$ *на интервале* $\tau_0 \leqslant t \leqslant t^*$ — *оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему из состояния* x_0 *в целевое множество* $G(t^*)$ *вдоль траектории* $x^*(t)$. *Тогда управление* $u^*(t)$ *является экстремальным, т. е.*

$$m(t) \equiv \max_{u \in \Omega} \eta(t)\,B(t)\,u = \eta(t)\,B(t)\,u^*(t),$$

а значит,

$$M(t) \equiv \max_{u \in \Omega} \eta(t)\,[A(t)\,x^*(t) + B(t)\,u + v(t)] = \\ = \eta(t)\,[A(t)\,x^*(t) + B(t)\,u^*(t) + v(t)]$$

почти всюду на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant t^*$. *Здесь под* $\eta(t)$ *понимается нетривиальное решение сопряженной системы*

$$\dot{\eta} = -\eta A(t),$$

а $\eta(t^*)$ — *внешняя единичная нормаль к гиперплоскости, опорной для множества достижимости* $K(t^*)$ *в точке* $x^*(t^*)$, *лежащей на границе* $\partial K(t^*)$.

Далее, если $G(t) = G$, *т. е. целевое множество неизменно во времени, то точка* $x^*(t^*)$ *лежит на новой границе множества* $K(t^*)$. *В этом случае, если матричные функции* $A(t)$, $B(t)$ *и* $v(t)$ *непрерывны, то нормаль* $\eta(t^*)$ *можно выбрать так, чтобы*

$$M(t^*) \geqslant 0.$$

Если, кроме того, множество G *выпукло, то* $\eta(t^*)$ *можно выбрать так, чтобы удовлетворялось условие трансверсальности, а именно, чтобы вектор* $\eta(t^*)$ *был нормалью к опорной гиперплоскости, разделяющей множества* $K(t^*)$ *и* G.

Доказательство. Конечная точка траектории $x^*(t^*)$ должна лежать на границе $\partial K(t^*)$. Действительно, если бы $x^*(t^*)$ лежала внутри $K(t^*)$, то по теореме 1 некоторая открытая окрестность N точки $x^*(t^*)$ лежала бы внутри $K(t)$ для всех t, достаточно близких к t^*. Но тогда из непрерывности $G(t)$ следует, что $G(t_1)$ пересекается с N при некотором $t_1 < t^*$, а это противоречит оптимальности $u^*(t)$. Следовательно, $x^*(t^*) \in \partial K(t^*)$, а это означает, что $u^*(t)$ — экстремальное управление.

По теореме 2 для экстремального управления $u^*(t)$ существует нетривиальное решение сопряженного уравнения $\eta(t)$, такое, что

$$m(t) = \eta(t) B(t) u^*(t)$$

и

$$M(t) = \eta(t)[A(t) x^*(t) + B(t) u^*(t) + v(t)]$$

почти всюду на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant t^*$. В качестве $\eta(t)$ можно выбрать любое решение системы

$$\dot{\eta} = -\eta A(t),$$

такое, что вектор $\eta(t^*)$ является внешней нормалью к опорной гиперплоскости области $K(t^*)$ в точке $x^*(t^*)$.

Будем считать теперь $G(t) = G$ постоянным непустым компактным множеством в R^n. Тогда из оптимальности управления $u^*(t)$ по быстродействию следует, что $x^*(t^*) \in K(t^*) \cap G$ лежит на новой границе $K(t^*)$. Поскольку вектор-функция $x^*(t)$ может и не быть дифференцируемой при $t = t^*$, то для доказательства того, что $M(t^*) \geqslant 0$, придется применить предельный переход.

Для любого момента времени t найдется гиперплоскость $\hat{\pi}(t)$, лежащая посередине между $K(t)$ и концом траектории $x^*(t^*)$, иначе говоря, гиперплоскость, проходящая через середину кратчайшей хорды между $x^*(t^*)$ и $K(t)$, и перпендикулярная к ней. Если выбрать t_1 из интервала $\tau_0 \leqslant t_1 < t^*$, то гиперплоскость $\hat{\pi}(t_1)$ будет разделять точки $x^*(t_1)$ и $x^*(t^*)$. Таким образом, в некоторый момент $\hat{t}_1 > t_1$, составляющая скорости $\dot{x}^*(\hat{t}_1) = A(\hat{t}_1) x^*(\hat{t}_1) + B(\hat{t}_1) u^*(\hat{t}_1) + v(\hat{t}_1)$, направленная вдоль единичной нормали $\hat{\eta}(t_1)$ к гиперплоскости $\hat{\pi}(t_1)$, смотрящей из полупространства, содержащего $K(t_1)$, будет положительна. Выберем теперь t_2 из интервала $\hat{t}_1 < t_2 < t^*$, и пусть $\hat{t}_2 > t_2$ таково, что $\hat{\eta}(t_2)\dot{x}^*(\hat{t}_2) > 0$. Таким образом, определим последовательность моментов времени

$$\tau_0 \leqslant t_1 < \hat{t}_1 < t_2 < \hat{t}_2 < \ldots < t_\nu < \hat{t}_\nu < \ldots < t^*,$$

для которых

$$\hat{\eta}(t_\nu)[A(\hat{t}_\nu) x^*(\hat{t}_\nu) + B(\hat{t}_\nu) u^*(\hat{t}_\nu) + v(\hat{t}_\nu)] > 0.$$

Воспользуемся теперь компактностью целевого множества Ω и

сферы единичных направлений, чтобы выбрать подпоследовательность, которую мы по-прежнему будем обозначать t_ν, такую, что существуют следующие пределы:

$$\lim_{\nu\to\infty} u^*(\hat{t}_\nu) = \bar{u} \in \Omega, \quad \lim_{\nu\to\infty} \hat{\pi}(t_\nu) = \pi(t^*), \quad \lim_{\nu\to\infty} \hat{\eta}(t_\nu) = \eta(t^*).$$

Тогда $\pi(t^*)$ является гиперплоскостью, опорной к $K(t^*)$ в точке $x^*(t^*)$, с внешней единичной нормалью $\eta(t^*)$. Из непрерывности матричных и векторных функций $A(t)$, $B(t)$, $v(t)$ и $x^*(t)$ следует, что

$$\eta(t^*)[A(t^*)x^*(t^*) + B(t^*)\bar{u} + v(t^*)] \geqslant 0,$$

поэтому

$$M(t^*) \geqslant 0,$$

что и требовалось.

Если целевое множество G выпукло, то можно повторить все предыдущие рассуждения, считая $\hat{\pi}(t)$ плоскостью, перпендикулярной к кратчайшей хорде между G и $K(t)$ и делящей ее пополам. Тогда предельная гиперплоскость $\pi(t^*)$ и единичная нормаль $\eta(t^*)$ удовлетворяют условию трансверсальности.

Для автономных линейных систем принцип максимума может быть дополнен таким следствием:

Следствие. *Рассмотрим автономную линейную систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu + v,$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. Пусть $u(t) \subset \Omega$ $(\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1)$ — любое экстремальное управление, т. е.

$$M(t) \equiv \max_{u\in\Omega} \eta(t)[Ax(t) + Bu + v] = \eta(t)[Ax(t) + Bu(t) + v]$$

почти всюду для соответствующих решений $x(t)$ и $\eta(t)$. Тогда вектор-функция $M(t)$ постоянна на $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$.

Доказательство. В силу леммы 2А приложения к настоящей главе вектор-функция $M(t)$ абсолютно непрерывна и имеет производную почти всюду. Вычислим производную $\dot{M}(t)$ в некоторый момент $t = t_1$, для которого она существует. Для $t_2 > t_1$ имеем

$$\frac{M(t_2) - M(t_1)}{t_2 - t_1} \geqslant \frac{\eta(t_2)[Ax(t_2) + Bu(t_2) + v] - \eta(t_1)[Ax(t_1) + Bu(t_1) + v]}{t_2 - t_1}$$

в предположении, что вектор $\dot{x}(t)$ удовлетворяет системе $\mathscr{L}$ и вектор-функция $M(t)$ удовлетворяет принципу максимума в момент t_1. Прибавляя и вычитая в числителе правой части $\eta(t_2)Ax(t_1)$, а

затем переходя к пределу при $t_2 \to t_1$, находим

$$\frac{dM}{dt}(t_1) \geqslant \eta(t_1) A\dot{x}(t_1) + \dot{\eta}(t_1) Ax(t_1) + \dot{\eta}(t_1)[Bu(t_1) + v]$$

и

$$\dot{M}(t_1) \geqslant \eta A[Ax + Bu + v] - \eta AAx - \eta A[Bu + v] = 0.$$

Аналогичным вычислением можно показать, что $\dot{M}(t_1) \leqslant 0$, а следовательно, $\dot{M}(t) = 0$ почти всюду на $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, т. е. функция $M(t)$ постоянна. Теорема доказана.

В следующей теореме доказывается, что при условиях нормальности, наложенных на систему, принцип максимума является как необходимым, так и достаточным условием оптимальности. Для этого достаточно показать, что оптимальное управление представляет собой единственное экстремальное управление, переводящее систему из состояния x_0 в выпуклое целевое множество G и удовлетворяющее условиям трансверсальности. Используя результаты этой теоремы, мы получим возможность построить оптимальное управление как функцию положения x системы в пространстве R^n.

Теорема 19. *Рассмотрим линейную систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t),$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, начальным состоянием системы $x_0 \in R^n$ и постоянным целевым множеством G. Пусть матричные и векторные функции $A(t)$, $B(t)$ и $v(t)$ непрерывны при $t \geqslant \tau_0$ и

(a) *задача $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, \tau_0, t)$ нормальна при $t > \tau_0$;*

(b) *G — компактное выпуклое множество в R^n;*

(c) *для любой точки $\bar{x}(\bar{t}) \in G$ и момента времени $\bar{t} \geqslant \tau_0$ имеется управление $\bar{u}(t) \subset \Omega$ на интервале $\bar{t} \leqslant t < \infty$ с соответствующим решением $\bar{x}(t) \subset G$, не экстремальное на любом интервале $\bar{t} < t < \bar{t}_1$.*

Пусть $u_1(t) \subset \Omega$ $(\tau_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ и $u_2(t) \subset \Omega$ $(\tau_0 \leqslant t \leqslant t_2)$ — экстремальные управления, удовлетворяющие условию трансверсальности, а именно, для соответствующих сопряженных решений $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ векторы $\eta_1(t_1)$ и $\eta_2(t_2)$ являются внутренними единичными нормалями к гиперплоскостям, опорным в G. Тогда

$$t_1 = t_2 = t^*$$

и

$$u_1(t) = u_2(t) \text{ почти всюду при } \tau_0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

и, следовательно, $u_1(t) = u^*(t)$ является единственным оптимальным по быстродействию управлением, переводящим систему из точки x_0 в G.

Доказательство. Если $t_1 = t_2$, то область достижимости $K(t_1)$ пересекается с выпуклым множеством G в точках $x_1(t_1)$ и $x_2(t_1)$, конечных точках траекторий, соответствующих управлениям $u_1(t)$ и $u_2(t)$ соответственно. В силу нормальности системы область $K(t_1)$ является строго выпуклой и не может содержать в своей границе никакого отрезка прямой. (Если $t_1 = \tau_0$ или если множество Ω состоит из одной точки, то справедливость теоремы очевидна, и потому эти случаи опускаются).

Однако в силу условия трансверсальности существует опорная гиперплоскость π, разделяющая множества $K(t_1)$ и G. Если $x_1(t_1) \neq x_2(t_1)$, то отрезок, соединяющий эти точки, должен лежать в множестве $K(t_1) \cap G$. Следовательно, этот отрезок должен принадлежать гиперплоскости π, а значит, и множеству $\partial K(t_1)$. Но это противоречит строгой выпуклости $K(t_1)$, и следовательно, $x_1(t_1) = x_2(t_1)$. А тогда из нормальности системы следует, что $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Предположим, что $t_1 < t_2$. Тогда строго выпуклое множество $K(t_2)$ отделяется от множества G общей опорной гиперплоскостью. Однако из предположения (с) следует, что внутренность множества $K(t)$ пересекается с G при всех $t > t_1$, и в частности, при $t = t_2$. Но в этом случае множество $K(t_2)$ не может иметь опорной гиперплоскости, отделяющей его от G. Отсюда следует, что $t_1 = t_2$.

Итак, мы показали, что каждое экстремальное управление, удовлетворяющее условию трансверсальности, а в частности, и оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant t^*$, должно совпадать с $u_1(t)$ почти всюду на $\tau_0 \leqslant t \leqslant t_1 = t^*$. Теорема доказана.

Ниже мы приведем три следствия, в которых рассматриваются автономные линейные системы. Для таких систем предположения (а) и (с) можно заменить другими, легко проверяющимися гипотезами. Мы займемся также случаем, когда единственность оптимального управления имеет место лишь при фиксированном начальном моменте времени, например, при $0 \leqslant t \leqslant t^*$, и даже при этом условии управление $u^*(t)$ определено лишь почти всюду.

Следствие 1. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu + v,$$

с выпуклым многогранником $\Omega \subset R^m$ *в качестве ограничивающего множества и начальным состоянием* $x_0 \in R^n$. *Предположим, что выполнено условие нормальности:*

(а) *векторы* $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ *линейно независимы для любого ненулевого вектора* w, *направленного вдоль ребра многогранника* Ω (*или просто вдоль* Ω, *если это отрезок*).

Тогда задача $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, 0, t)$ *нормальна для всех* $t > 0$. *Если* $u_1(t) \subset \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ *есть экстремальное управление, то управле-*

ние $u_1(t)$ должно быть (почти всюду) кусочно-постоянной функцией, значения которой лежат в вершинах многогранника Ω, и которая может иметь лишь конечное число разрывов, называемых переключениями.

Если выполнено условие (a), *и кроме того,*

(b) *целевое множество G выпукло и компактно;*

(c) *для любой точки $\bar{x}\in G$ существует управление $\bar{u}(t)\subset\Omega$ на интервале $0\leqslant t<\infty$, с соответствующей ему траекторией $\bar{x}(t)\subset G$, причем $\bar{u}(t)$ не является экстремальным управлением на открытом интервале $0<t<\bar{t}_1$,*

тогда любое экстремальное управление $u_1(t)\subset\Omega$ на интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, переводящее систему из состояния x_0 в целевое множество G и удовлетворяющее условию трансверсальности, должно совпадать почти всюду на $0\leqslant t\leqslant t_1=t^*$ с единственным оптимальным управлением $u^*(t)$.

Доказательство. Сначала мы должны показать, что из условия (a) следует нормальность задачи на любом интервале $0\leqslant t\leqslant\tau_1$. Предположим, что задача $(\mathscr{L},\ \Omega,\ x_0,\ 0,\ \tau_1)$ не является нормальной. Тогда существуют два различных управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, такие, что

$$\eta(t)\,Bu_1(t)=\eta(t)\,Bu_2(t)=\max_{u\in\Omega}\eta(t)\,Bu$$

почти всюду на $0\leqslant t\leqslant\tau_1$, где $\eta(t)=\eta_0e^{-At}$, и $u_1(t)\neq u_2(t)$ на некотором ненулевом подынтервале S интервала $0\leqslant t\leqslant\tau_1$.

Для каждого фиксированного момента t рассмотрим действительную линейную функцию от u, $F_t(u)=\eta(t)\,Bu$. Поскольку Ω есть выпуклый многогранник, то функция $F_t(u)$ достигает максимума при $u\in\Omega$, лежащем на той из граней Ω, где u постоянно (здесь под гранью многогранника понимается либо пересечение опорной гиперплоскости с $\partial\Omega$ либо само Ω). Таким образом, в каждый момент $t\in S$ линейная функция $F_t(u)$ принимает свое максимальное значение на некотором (возможно, на нескольких) ребре e_t. Поскольку Ω имеет конечное число ребер, то существует такой положительный промежуток времени $S_1\subset S$, в течение которого функция $F_t(u)$ принимает максимальное значение, например, на ребре e_1. Пусть $w\neq 0$ — вектор, параллельный ребру e_1; тогда

$$\eta_0e^{-tA}Bw=0\quad\text{при}\quad t\in S_1.$$

Так как левая часть дифференцируема всюду, за исключением, быть может, счетного множества изолированных точек в S_1, то

$$-\eta_0e^{-tA}ABw=0\quad\text{почти всюду на } S_1.$$

Повторяя этот процесс, находим, что

$$\eta_0e^{-tA}Bw=0,\ \eta_0e^{-tA}ABw=0,\ \ldots,\ \eta_0e^{-tA}A^{n-1}Bw=0.$$

Но отсюда следует, что векторы

$$Bw,\ ABw,\ A^2Bw,\ \ldots,\ A^{n-1}Bw$$

все ортогональны к вектору $\eta_0 e^{-tA} \neq 0$, а значит, они линейно зависимы. Это противоречит предположению (а); отсюда заключаем, что рассматриваемая задача нормальна.

Переопределим экстремальное управление $u_1(t)$ на множестве меры нуль так, чтобы

$$\eta(t) Bu_1(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) Bu$$

всюду на $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда значения $u_1(t)$ будут почти всегда лежать в вершинах многогранника Ω, поскольку максимум $F_t(u)$ достигается лишь в вершинах в силу нормальности системы.

Совокупность моментов t, когда $F_t(u)$ достигает максимума на некоторой вершине, представляет собой открытое множество в R^1, в то время как дополнение его, включающее в себя множество переключений, есть замкнутое множество. Если $u_1(t)$ имеет бесконечное число разрывов, то выражение $\eta(t_\nu) Bu$ достигает максимума на целом ребре e многогранника Ω,в каждый из бесконечного числа моментов времени $\{t_\nu\}$. Отсюда следует, что $\eta(t_\nu) Bw = 0$, где w — единичный вектор, параллельный ребру e. Поскольку $\eta(t) Bw$ является действительной аналитической функцией с бесконечным числом нулей, то отсюда можно заключить, что $\eta(t) Bw \equiv 0$ для всех t из интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Но тогда

$$\eta_0 e^{-tA} Bw = 0, \quad \eta_0 e^{-tA} ABw = 0, \ \ldots, \ \eta_0 e^{-tA} A^{n-1} Bw = 0,$$

что противоречит условию нормальности. Итак, у экстремального управления $u_1(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ может быть лишь конечное число переключений. Из предположений (b) и (c) следует, что $t_1 = t^*$ и $u_1(t) = u^*(t)$ почти всюду на $0 \leqslant t \leqslant t_1 = t^*$, как и в теореме 19, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из следствия 1, но мы сформулируем его отдельно в силу его важности для приложений.

Следствие 2. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$\dot{x} = Ax + Bu + v,$$

с m-мерным кубом $|u^j| \leqslant 1$ в качестве ограничивающего множества Ω. Пусть выполнено условие нормальности: Bw, ABw, ..., $A^{n-1}Bw$ линейно независимы при любом единичном векторе w, направленном вдоль ребра Ω, или вдоль Ω, при $m = 1$. Тогда любое экстремальное управление $u(t) \subset \Omega$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ будет иметь вид

$$u(t) = \operatorname{sgn}(\eta(t) B)' \qquad (\textit{почти всюду}),$$

где $\eta(t)=\eta_0 e^{-tA}$ — *нетривиальное сопряженное решение. Таким образом,* $u(t)$ *представляет собой релейное управление, т. е.* $u(t)$ *кусочно-постоянно и каждая компонента вектора* $u(t)$ *принимает лишь значения* ± 1, *и имеет конечное число переключений.*

Требование, чтобы векторы

$$Bw,\ ABw,\ \ldots,\ A^{n-1}Bw$$

были линейно независимыми при любом единичном векторе w, параллельном ребру выпуклого многогранника Ω (либо самому Ω, если это отрезок), называется *условием нормальности*. Если

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu, \quad \text{где } u\subset\Omega$$

удовлетворяет условию нормальности, то система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости. Действительно, из существования хотя бы одного единичного вектора w, такого, что векторы Bw, ABw, ..., $A^{n-1}Bw$ линейно независимы, следует, что векторы

$$[B,\ AB,\ \ldots,\ A^{n-1}B]\,w^{(i)}, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

линейно независимы, где через $w^{(i)}$ обозначены nm-мерные векторы-столбцы, у которых на местах с номерами $(i-1)m+1$, ..., im стоят компоненты вектора w, а на остальных местах — нули. Если $m=1$, т. е. Ω есть отрезок оси R^1, то условие нормальности является необходимым и достаточным условием управляемости системы $\mathscr{L}$.

Следствие 3. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

с многогранником в качестве ограничивающего множества $\Omega\subset R^m$, *содержащим внутри себя управление* $u=0$, *и началом координат* $x=0$ *в качестве целевого множества* G.

Предположим, что система $\mathscr{L}$ *удовлетворяет условию нормальности. Тогда для любой точки* x_0 *из области нуль-управляемости* $\mathscr{C}$ *существует единственное экстремальное управление* $u^*(t)$, *переводящее систему из* x_0 *в начало координат, и это управление* $u^*(t)$ *будет оптимальным.*

Если матрица A *устойчива, то* $\mathscr{C}=R^n$, *и поэтому из любой точки* $x_0\in R^n$ *систему можно перевести в начало координат с помощью единственного экстремального, а именно, оптимального управления.*

Доказательство. Существование единственного экстремального управления, переводящего систему из x_0 в начало координат, следует из теоремы 17 и следствия 1. Утверждение, что $\mathscr{C}=R^n$, если A устойчива, верно в силу следствия 3 теоремы 5.

Теперь мы можем использовать теорему 19 для синтеза оптимального управления с помощью кривых переключения и попятного движения от целевого множества (для автономных управляемых систем, подобных тем, которые рассматривались в следствии 1). Для синтеза оптимального управления надо проделать следующее:

1. Рассмотреть систему дифференциальных уравнений нашей задачи и сопряженную систему с обратным отсчетом времени

$$\dot{x} = -Ax - Bu(t) - v,$$
$$\dot{\eta} = \eta A,$$

с начальными условиями $x(0) \subset \partial G$ и с вектором $\eta(0)$ — в качестве внутренней единичной нормали к опорной гиперплоскости множества G в точке $x(0)$. Используются лишь те начальные условия, для которых $M \equiv \max\limits_{u \in \Omega} \eta(0)[Ax(0) + Bu + v] \geqslant 0$. Управление $u(t)$ определяется из принципа максимума

$$\eta(t) Bu(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) Bu.$$

2. Найти единственные начальные условия $(x(0), \eta(0))$, которым соответствует решение $x(t)$, $\eta(t)$, проходящее через начальную точку $x(0)$ в некоторый момент $t^* > 0$.

3. Снова вернуться к прежнему отсчету времени и положить

$$x^*(t) = x(t^* - t) \text{ и } \eta^*(t) = \eta(t^* - t)$$

на $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Тогда управление $u^*(t)$, определяемое из соотношения

$$\eta^*(t) Bu^*(t) = \max_{u \in \Omega} \eta^*(t) Bu \text{ на } 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

будет оптимальным управлением, а $x^*(t)$ — соответствующей ему траекторией, по которой система переходит из начальной точки x_0 в G.

Вычисления на этапах (1) и (2) могут выполняться на аналоговых или цифровых вычислительных машинах, если заданы уравнения системы и ограничения. Тогда для каждой начальной точки $x_0 \in R^n$ соответствующее оптимальное управление может сохраняться в запоминающем устройстве машины для дальнейшего использования. Для запоминания информации об оптимальном управлении удобно пользоваться описанием кривой переключений.

Кривая переключений W в $R^n - G$ состоит из всех тех точек $x(t)$, которые соответствуют моментам, когда управление $u(t)$ претерпевает разрыв. Подразумевается, что $\eta(t) Bu(t) = \max\limits_{u \in \Omega} \eta(t) Bu$. Здесь $x(t)$ и $\eta(t)$ — экстремальные решения, удовлетворяющие соответствующим условиям трансверсальности в G, описанным

в п. 1. Для случая $m=1$, когда Ω представляет собой отрезок $|u|\leqslant 1$, кривая переключений имеет сравнительно простой вид — это некоторая кривая на фазовой плоскости (как показано в примерах главы 1), или гиперповерхность в пространстве большей размерности R^n. В этом случае кривая W разделяет $R^n - G$ на два открытых множества: M_+, на котором $u=+1$, и M_-, на котором $u=-1$. Синтезирующая функция

$$\Psi(x)=\begin{cases} +1 \text{ для } x\in M_+, \\ -1 \text{ для } x\in M_- \end{cases}$$

и дает нам искомый синтез оптимального управления для системы $\dot{x}=Ax+B\Psi(x)+v$.

Если $m>1$ и Ω есть m-мерный куб $|u^j|\leqslant 1$ в R^m, то удобно рассматривать кривую переключений отдельно для каждой компоненты экстремального управления

$$u(t)=\operatorname{sgn}(\eta(t)B)'.$$

Изложение общих свойств таких кривых переключений является слишком громоздкой задачей. Однако в следующих двух примерах подробно показан этот важный метод синтеза оптимальных управлений.

Пример 1. Рассмотрим автономную управляемую систему в R^2:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}_1 = x^2+u,$$
$$\dot{x}^2 = -x^2+u,$$

с ограничивающим множеством Ω: $|u|\leqslant 1$ в R^1. Мы хотим синтезировать оптимальное по быстродействию управление, приводящее систему на прямую $x^1=0$, с последующим удерживанием ее на этой прямой. Таким образом, целевым множеством системы будет

$$G=\operatorname{core}\{x^1=0\}.$$

Если траектория системы лежит на прямой $x^1=0$, то $\dot{x}^1(t)\equiv 0$, $x^2(t)=-u(t)$ и, значит, $|x^2|\leqslant 1$. Обратно, из любой точки $x_0^1=0$, $|x_0^2|\leqslant 1$ система может быть переведена в область $|x^2|\leqslant 1$ с помощью управления $u(t)=-x_0^2e^{-2t}$ для $t\geqslant 0$. Таким образом, $G=\{x^1=0,\ |x^2|\leqslant 1\}$. Заметим, что G — компактное выпуклое множество в R^2; кроме того, систему можно из любой точки $(x_0^1,\ x_0^2)\in G$ перевести в G с помощью не экстремального управления $u(t)=-x_0^2e^{-2t}$ $(t\geqslant 0)$. Проверяем, что условие нормальности для матриц

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

и вектора $w=1$, направленного вдоль Ω, выполняется; тем самым система $\mathscr{L}$ вполне управляема, и по теореме 8 областью нуль-управляемости для нее будет все пространство R^2. Тогда из теоремы 17 и следствия 1 из теоремы 19 вытекает, что из любого начального состояния система может быть переведена в область G с помощью единственного экстремального управления, удовлетворяющего условию трансверсальности, а именно, оптимального управления.

Мы воспользуемся методом «попятного» движения от целевого множества. Запишем систему $\mathscr{L}$ и сопряженную систему при обратном отсчете времени:

$$\dot{x}^1 = -x^2 - u \quad \text{и} \quad u = \operatorname{sgn}(\eta_1 + \eta_2),$$
$$\dot{x}^2 = x^2 - u, \quad \dot{\eta}_1 = 0, \quad \dot{\eta}_2 = \eta_1 - \eta_2.$$

Заметим, что вдоль решения сопряженной системы, где $\dot{\eta}_1 = 0$, и

$$\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2 = \dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2 = -\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2, \text{ так что } \eta_1 + \eta_2 = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

Таким образом, экстремальное управление $u(t)$ может иметь не более одного переключения на $0 \leqslant t < \infty$. Рассмотрим все экстремальные управления, удовлетворяющие условию трансверсальности, и попытаемся построить кривую переключений W в $R^2 - G$.

Возьмем начальные условия $x_0^1 = 0$, $|x_0^2| < 1$, $\eta_{10} = \pm 1$, $\eta_{20} = 0$. Тогда $\eta_2 + \eta_1 = \pm 2 \mp e^{-t}$ и, значит, такие управления вовсе не имеют переключений. Возьмем значение $u = -1$, и определим кривую

$$\Gamma_- = \{x^1 = -2e^t + 2t + 2,\ x^2 = 2e^t - 1,\ t \geqslant 0\},$$

исходящую из точки $x_0^1 = 0$, $x_0^2 = +1$. Покажем, что все точки кривой Γ_- принадлежат кривой переключений W. Экстремаль с начальными условиями $x_0^1 = 0$, $x_0^2 = +1$, $\eta_{10} = \cos\theta$, $\eta_{20} = \sin\theta$ при любом фиксированном θ из промежутка $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ совпадает с Γ_- до тех пор, пока $\eta_1(t) + \eta_2(t) < 0$. Но

$$\eta_1(t) + \eta_2(t) = (\sin\theta - \cos\theta)e^{-t} + 2\cos\theta \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Таким образом, для каждого θ из интервала $\pi \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$ находим

$$u(t) = \operatorname{sign}(\eta_1(t) + \eta_2(t)) = -1 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Для каждого θ из интервала $3\pi/2 < \theta < 7\pi/4$ функция $(\sin\theta - \cos\theta)e^{-t} + 2\cos\theta$ имеет лишь один нуль на положительной полуоси $t_1(\theta) > 0$. Легко показать, что функция $t_1(\theta)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0 при возрастании θ. Таким образом, существуют экстремальные управления, удовлетворяющие условию трансверсальности в G, имеющие переключение с $u = +1$ на $u = -1$ в заранее заданной точке кривой Γ_-, и далее ведущие систему вдоль траектории Γ_- в целевое множество G.

Определим Γ_+ как кривую, симметричную кривой Γ_- относительно начала координат. Тогда получаем кривую переключения $W=\Gamma_+\cup\Gamma_-$. Заметим, что соответствующая кривая $x^2=W(x^1)$ разбивает множество R^2-G на две части. Определим синтезирующую функцию

$$\Psi(x^1, x^2)=\begin{cases}-1 \text{ для } x^2>W(x^1) \text{ и на } x^2=\Gamma_-(x^1),\\ +1 \text{ для } x^2<W(x^1) \text{ и на } x^2=\Gamma_+(x^1).\end{cases}$$

Оптимальные траектории, соответствующие различным начальным состояниям из R^2-G, изображены на рис. 2.1.

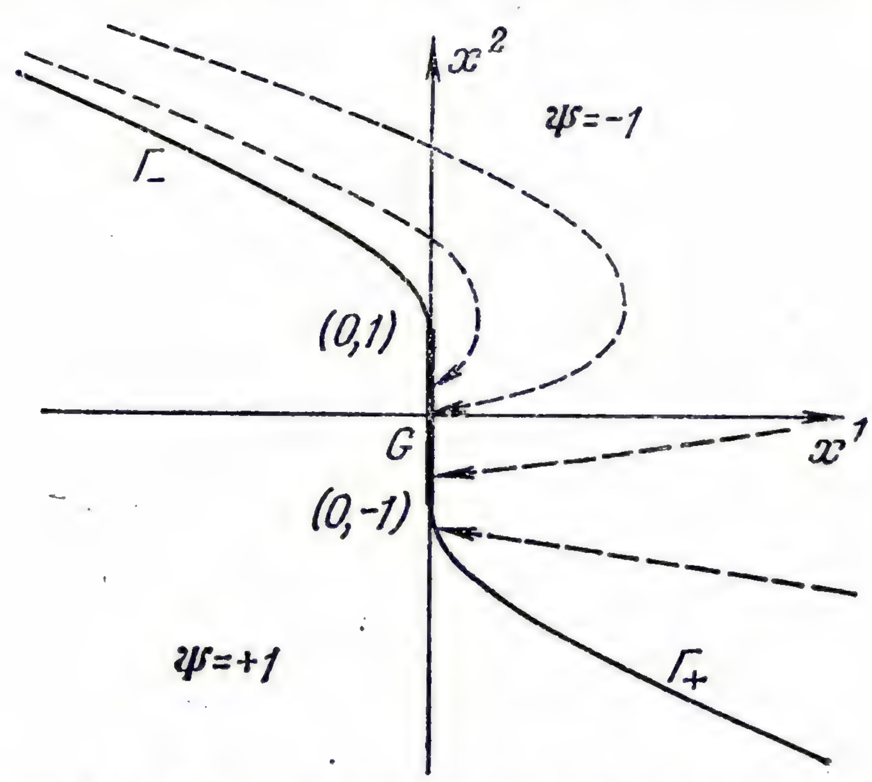

Рис. 2.1. Кривая переключения и синтез оптимальных управлений для системы $\dot{x}^1=x^2+u$, $\dot{x}^2=-x^2+u$, $|u|\leqslant 1$; целевое множество G; $x^1=0$, $|x^2|\leqslant 1$.

Пример 2. Рассмотрим автономную управляемую систему в R^3

$$\dddot{x}=u$$

или

$$(\mathscr{L})\ \dot{x}^1=x^2,\ \dot{x}^2=x^3,\ \dot{x}^3=u,$$

с ограничивающим множеством $\Omega:|u|\leqslant 1$ в R^1. Требуется найти оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему в начало координат. Теоремы 8 и 17 гарантируют существование такого управления для любого начального состояния из R^3, а следствие 3 из теоремы 19 показывает, что это оптимальное управление и есть единственное экстремальное управление, переводящее систему в начало координат.

Для построения кривой переключений снова применим метод «попятного» движения. Запишем систему $\mathscr{L}$ и сопряженную систему при обратном отсчете времени:

$$\dot{x}^1=-x^2,\quad \dot{x}^2=-x^3,\quad \dot{x}^3=-u,\ \text{где } u=\operatorname{sgn}\eta_3(t),$$

$$\dot{\eta}_1=0,\quad \dot{\eta}_2=\eta_1,\quad \dot{\eta}_3=\eta_2.$$

Заметим, что $\dddot{\eta}_3=0$, так что $\eta_3(t)=\eta_{30}+\eta_{20}t+\eta_{10}t^2/2$; поэтому каждое экстремальное управление имеет не более двух переключений, соответствующих нулям функции $\eta_3(t)$, расположенным на положительной полуоси. Определим кривую Γ_+ как траекторию, исходящую из начала координат при $u=+1$, т. е. $x^1=-\frac{t^3}{6}$,

$x^2=\frac{t^2}{2}$, $x^3=-t$ при $t>0$. Поскольку начальные условия η_{10}, η_{20}, η_{30} можно выбрать так, чтобы $\eta_3(t)>0$ при $0<t<t_1$, $\eta_3(t)<0$ при $t_1<t<t_2\leqslant+\infty$ и $\eta_3(t)>0$ при $t>t_2$ для произвольных $0<t_1<t_2\leqslant+\infty$, то каждая точка кривой Γ_+ может оказаться точкой переключения управления с $u=-1$ на управление $u=+1$ для экстремального управления, переводящего систему в начало координат вдоль траектории Γ_+.

Для каждой точки Γ_+, определяемой некоторым значением $t>0$, вычисляем решения системы дифференциальных уравнений с обратным отсчетом времени, соответствующие значению управления $u=-1$. Обозначая независимую переменную через s ($s\geqslant 0$), запишем эти решения в виде

$$x^1=\frac{s^3}{6}-\frac{s^2t}{2}-\frac{st^2}{2}-\frac{t^3}{6},\quad x^2=-\frac{s^2}{2}+st+\frac{t^2}{2},\quad x^3=s-t.$$

Для $t>0$, $s\geqslant 0$ эти уравнения определяют поверхность переключений W_-, содержащую кривую переключений Γ_+.

Определим теперь кривую Γ_- как траекторию, исходящую из начала координат и соответствующую управлению $u=-1$:

$$x^1=\frac{t^3}{6},\quad x^2=-\frac{t^2}{2},\quad x^3=t \text{ при } t>0.$$

Теперь интегрируем нашу систему с обратным отсчетом времени, используя в качестве начальной точки любую точку Γ_-, а в качестве управления $u=+1$. Тогда получим поверхность переключений W_+:

$$x^1=\frac{t^3}{6}+\frac{t^2s}{2}+\frac{ts^2}{2}-\frac{s^3}{6},\quad x^2=-\frac{t^2}{2}-ts+\frac{s^2}{2},\ x^3=t-s$$

при $s\geqslant 0$, $t>0$. Полная поверхность переключений $W=W_-\cup W_+$ будет содержать полную кривую переключений $\Gamma=\Gamma_+\cup\Gamma_-$. Покажем, что поверхность W разбивает пространство R^3, а кривая Γ разбивает поверхность W (в Γ включается начало координат). Действительно, W есть однозначная функция переменных $(x^1,\ x^3)$. Чтобы проверить это, возьмем произвольную точку $(\bar{x}^1, \bar{x}^3)$ и убедимся, что единственное значение параметров $(s,\ t)$ определяет точку $(\bar{x}^1,\ \bar{x}^2,\ \bar{x}^3)$ на поверхности W.

На W_- имеем

$$x^1=\frac{(x^3)^3}{6}-st^2 \qquad (s\geqslant 0,\ t>0),$$

а на W_+

$$x^1=\frac{(x^3)^3}{6}+st^2 \qquad (s\geqslant 0,\ t>0).$$

Таким образом, если $\bar{x}=(\bar{x}^3)^3/6$, то $s=0$. Если $\bar{x}^1<0$, то следует

выбрать точку на Γ_-, где $\bar{x}^2=(\bar{x}^3)^2/2$; в противном случае выбираем точку на Γ_+, где $\bar{x}^2=-(\bar{x}^3)^2/2$. Если $\bar{x}^1<(\bar{x}^3)^3/6$, то ищем точку на W_-, если же $\bar{x}^1>(\bar{x}^3)^3/6$, то на W_+. Пусть, например, $\bar{x}^1<(\bar{x}^3)^3/6$, тогда ищем корень $t>0$ уравнения

$$st^2+\left[x^1-\frac{(\bar{x}^3)^3}{6}\right]=0 \text{ или } (\bar{x}^3+t)\,t^2+\left[\bar{x}^1-\frac{(\bar{x}^3)^3}{6}\right]=0.$$

Поскольку левая часть этого уравнения представляет собой многочлен третьей степени от t и в точке $t=0$ касательная к его графику горизонтальна, то легко видеть, что этот многочлен имеет лишь один положительный корень. Аналогичным образом можно показать, что и на W_+ имеется лишь одна точка, в которой $\bar{x}^1>(\bar{x}^3)^3/6$.

Таким образом, поверхность W разбивает пространство R^3 на две области: M_+, где $x^2\to+\infty$, и M_-, где $x^2\to-\infty$. Поскольку кривая Γ_- соответствует границе W_-, где параметры принимают значения $t=0$, $s>0$ и, аналогично, Γ_+ соответствует границе W_+, то ясно, что Γ разбивает поверхность W на две части.

Если начальная точка $(x_0^1,\ x_0^2,\ x_0^3)$ лежит в M_+, то мы применяем управление $u=+1$, пока траектория не достигнет W_+. Затем производим переключение, и используем управление $u=-1$, пока не достигнем Γ_+, затем переключаемся на $u=+1$, и вдоль Γ_+ переводим систему в начало координат. Если начальная точка принадлежит M_-, то всюду в переключениях будут обратные знаки. Таким образом, синтезирующая функция имеет вид

$$\Psi(x^1,\ x^2,\ x^3)=\begin{cases} +1 & \text{в } M_+, \\ -1 & \text{в } M_-, \\ -1 & \text{на } W_- - \Gamma_+, \\ +1 & \text{на } W_+ - \Gamma_-, \\ +1 & \text{на } \Gamma_+, \\ -1 & \text{на } \Gamma_-. \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим автономную управляемую систему в R^n, определяемую уравнением

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+\ldots+a_nx=u,$$

с ограничением на управления $|u|\leqslant 1$ в R^1. Требуется перевести систему из начального состояния $(x_0,\ x_0^{(1)},\ \ldots,\ x_0^{(n-1)})$ в $x=0$ за минимальное время и в дальнейшем удерживать ее в этом состоянии. Соответствующая система дифференциальных уравнений в R^n будет иметь вид

$$(\mathscr{L})\qquad\qquad \dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+bu,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\;0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1\;0 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\;0 \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что множество $\operatorname{core}(x^1=0)$ есть начало координат; оно является целевым множеством нашей задачи. Система $\mathscr{L}$ вполне управляема, а следовательно, нормальна. В этом случае область нуль-управляемости $\mathscr{C}$ является открытым связным подмножеством R^n и мы предположим, что начальная точка $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{C}$. Тогда существует единственное экстремальное управление, переводящее систему из $\mathbf{x}_0$ в начало координат, и оно является оптимальным управлением $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$ с соответствующим решением $\mathbf{x}^*(t)$ и сопряженным решением $\eta^*(t)$.

Здесь под $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ понимается нетривиальное решение системы

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -\boldsymbol{\eta} A \text{ или } \dot{\boldsymbol{\eta}}' = -A'\boldsymbol{\eta}', \text{ где } \boldsymbol{\eta}=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Имеем

$$\dot{\eta}_1 = a_n\eta_n, \quad \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + a_{n-1}\eta_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{\eta}_{n-1} = -\eta_{n-2} + a_2\eta_n, \quad \dot{\eta}_n = -\eta_{n-1} + a_1\eta_n.$$

Последовательно исключая переменные, получим дифференциальное уравнение относительно $\eta_n(t)$:

$$\eta_n^{(n)} - a_1\eta_n^{(n-1)} + a_2\eta_n^{(n-2)} - a_3\eta_n^{(n-3)} + \dots + (-1)^n a_n\eta_n = 0.$$

Оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума

$$\boldsymbol{\eta}^*(t)\, b u^*(t) = \max \boldsymbol{\eta}^*(t)\, b u,$$

так что

$$u^*(t) = \operatorname{sgn}\eta_n(t) \text{ почти всюду на интервале } 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Заметим, однако, что при рассмотрении общего вида системы n-го порядка практическое применение метода кривых переключений и изучение геометрии множества $\mathscr{C}$ сопряженно с большим трудностями.

Эти трудности в исследовании кривых переключений и запоминании их описаний (в вычислительных устройствах) указывают на нецелесообразность применения описанных методов для управляемых систем порядка выше третьего. В приложении А мы опишем метод, позволяющий непосредственно определять оптимальное управление системы без рассмотрения этих геометрических тонкостей.

Однако, хотя в общем случае полное описание кривой переключений для систем высокого порядка весьма затруднительно, существуют два важных случая, для которых легко установить некоторые свойства, относящиеся к переключениям управлений системы.

Теорема 20. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu,$$

с ограничивающим множеством $\Omega: |u| \leqslant 1$ *в* R^1. *Предположим, что система* $\mathscr{L}$ *вполне управляема, а значит, нормальна.*

Если все собственные значения матрицы A действительны, то любое экстремальное управление имеет не более $n-1$ *переключений на полуоси* $0 \leqslant t < \infty$.

Если все собственные значения матрицы A имеют ненулевую мнимую часть, то любое экстремальное управление имеет бесконечное число переключений на полуоси $0 \leqslant t < \infty$. *Таким образом, для любого положительного числа* $N > 0$ *существует такое начальное состояние* $x_0 \in R^n$, *для которого соответствующее оптимальное управление, переводящее систему из* x_0 *в начало координат, имеет более N переключений.*

Доказательство. Поскольку система $\mathscr{L}$ вполне управляема, то по теореме 7 можно ввести такую систему координат, в которой матрицы коэффициентов системы $\mathscr{L}$ примут такой вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда систему $\mathscr{L}$ можно описать с помощью одного уравнения n-го порядка:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = u, \quad |u| \leqslant 1.$$

Экстремальное управление $u(t)$ имеет вид

$$u(t) = \operatorname{sgn} \eta(t),$$

где $\eta(t)$ есть последняя компонента нетривиального решения системы

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n \end{bmatrix} = -A' \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что функция $\eta_n(t)$ является решением уравнения

$$\eta^{(n)} - a_1 \eta^{(n-1)} + a_2 \eta^{(n-2)} - \dots + (-1)^n a_n \eta = 0.$$

Собственные значения $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ матрицы $-A'$ равняются собственным значениям матрицы A, взятым с обратными знаками, следовательно, они будут действительными или комплексными одновременно с собственными значениями матрицы A.

Предположим, что все собственные значения матрицы A действительны. Тогда

$$\eta(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + P_r(t)e^{\lambda_r t},$$

где действительные многочлены $P_j(t)$ имеют степени $\leqslant n_j - 1$, а n_j—кратность собственного значения λ_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Но $n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots + n_r = n$ и в силу известного свойства экспоненциальных многочленов (см. ниже упражнение 13) функция $\eta(t)$ может иметь не более $n-1$ действительных нулей $(-\infty < t < \infty)$. Отсюда следует, что экстремальное управление $u(t)$ имеет не более $n-1$ переключения на $0 \leqslant t < \infty$.

Предположим теперь, что все собственные значения матрицы A имеют ненулевые мнимые части, а значит, то же самое верно и для собственных значений $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ матрицы $-A'$. В этом случае

$$\eta(t) = e^{\alpha_1 t}[P_1(t)\cos\beta_1(t) + Q_1(t)\sin\beta_1 t] + \ldots$$
$$\ldots + e^{\alpha_r t}[P_r(t)\cos\beta_r t + Q_r(t)\sin\beta_r t],$$

где $P_1(t)$, $Q_1(t)$, $\ldots$, $P_r(t)$, $Q_r(t)$—действительные многочлены, не все равные нулю. Для простоты обозначим через α_1 наибольшее из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, входящих с ненулевыми коэффициентами в выражение для $\eta(t)$. Тогда

$$\eta(t) = e^{\alpha_1 t}t^k \sum_{j=1}^{r} (a_j \cos\beta_j t + b_j \sin\beta_j t) + R(t).$$

Здесь $k \geqslant 0$ и тригонометрическая сумма

$$T(t) = \sum_{j=1}^{r} (a_j \cos\beta_j t + b_j \sin\beta_j t)$$

не равняется тождественно нулю. Остаточный член $R(t)$ таков, что

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha_1 t}t^{-k}R(t) = 0.$$

Заметим, что $T(t)$ является конечной тригонометрической суммой с нулевым средним значением на интервале $0 \leqslant t < \infty$. Кроме того, для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такое $L > 0$, что сумма $T(t)$ принимает значения, большие, чем ε и меньшие, чем $-\varepsilon$, на каждом интервале длины L. (Это следует из теории почти-периодических функций, или из непосредственного изучения выражения $T(t)$.) Пусть $\bar{t} > 0$ таково, что

$$|e^{-\alpha_1 t}t^{-k}R(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $t \geqslant \bar{t}$. Тогда функция

$$e^{-\alpha_1 t} t^{-k} \eta(t) = T(t) + e^{-\alpha_1 t} t^{-k} R(t)$$

должна иметь нуль в каждом интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + L$ при $t_1 > \bar{t}$. Тем самым функция $\eta(t)$ имеет бесконечное число нулей, а управление $u(t)$ имеет бесконечное число переключений на интервале $0 \leqslant t < \infty$.

Поскольку оптимальное управление для заданного начального состояния x_0 получается из экстремального управления с помощью попятного движения из начала координат, то существуют такие точки $x_0 \in R^n$, для которых оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$ имеет число переключений, большее наперед заданного числа N. Теорема доказана.

Другой метод синтеза оптимального управления основан на применении изохронных гиперповерхностей в R^n. Пусть $T(x)$ — минимальное время, требуемое для перевода системы из начального состояния x в целевое множество; тогда геометрическое место точек в R^n, для которых

$$T(x) = t \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

называется *изохронной гиперповерхностью, отвечающей значению параметра* t. Вдоль оптимальной траектории $x^*(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant 0$ имеем

$$T(x^*(t)) = -t$$

и

$$\nabla T(x^*(t))\, \dot{x}^*(t) = -1$$

всюду, где существуют вектор-строка $\nabla T = \operatorname{grad} T$ и производная $\dot{x}^*(t)$.

Ниже мы покажем, что вектор $-\nabla T(x)$ можно использовать вместо сопряженного решения $\eta(t)$ при синтезе оптимального управления $u^*(t)$. Чтобы упростить доказательство этого факта, будем предполагать, что целевое множество G есть начало координат, и что существует единственное экстремальное управление, переводящее систему из начального состояния в начало координат, как в следствии 3 из теоремы 19.

Теорема 21. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, *содержащим внутри себя точку* $u = 0$. *Предположим, что система* $\{\mathscr{L}, \Omega\}$ *нормальна на любом интервале, а область нуль-управляемости совпадает со всем пространством* R^n. *Пусть* $T(x)$ — *минимальное время, требуемое для перевода системы из начального состояния* $x \in R^n$ *в начало координат. Тогда* $T(x)$ *непрерывна в* R^n, *а изохронные*

гиперповерхности

$$T(x)=t \quad \textit{для каждого} \quad t>0$$

образуют семейство замкнутых выпуклых гиперповерхностей, монотонно и неограниченно «раздувающихся» с ростом t.

Доказательство. Рассмотрим множество достижимости $K(t_1)$ для $t_1>0$, начального состояния $x_0=0$ и управлений из Ω. Каждое из множеств $K(t_1)$ является компактным строго выпуклым, причем $K(t_1)\subset K(t_2)$ для $0<t_1\leqslant t_2$ (см. замечания после теоремы 3, а также упражнение 4 к разделу 3). Мы докажем, что геометрическое место точек, для которых $T(x)=t_1$, в точности совпадает с границей множества $K(t_1)$ в R^n.

Пусть $x_1\in\partial K(t_1)$ так, что существует лишь одно экстремальное управление $u_1(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, переводящее систему из состояния x_0 в состояние x_1. Поскольку $u_1(-t)$ есть оптимальное управление, переводящее систему из x_1 в x_0, то $T(x_1)=t_1$. Обратно, точка x^*, для которой $T(x^*)=t_1$, является концом оптимальной траектории $x^*(t)$, по которой система переходит из x_0 в $x^*(t_1)=x^*$. Таким образом, точка x^* принадлежит границе множества $K(t_1)$, и мы показали, что изохронная поверхность $T(x)=t_1$ есть не что иное, как замкнутая выпуклая граница множества $K(t_1)$ в R^n. Заметим, что изохронные гиперповерхности семейства

$$T(x)=t_1 \quad \text{для} \quad t_1>0$$

не пересекаются, и каждая из них замыкается вокруг начала координат. Кроме того, эти гиперповерхности монотонно и неограниченно расширяются с ростом t_1 от 0 до ∞, поскольку также меняются множества $K(t_1)$.

Для доказательства непрерывности вектор-функции $T(x)$ в R^n положим $T(x_1)=t_1$. Далее, для некоторого $\varepsilon>0$ рассмотрим слой, заключенный между гиперповерхностями $T(x)=t_1-\varepsilon$ и $T(x)=$ $=t_1+\varepsilon$. (Если $x_1=0$, то $T(x_1)=0$ и рассуждения не меняются.) Тогда для достаточно малого $\delta>0$ окрестность $|x-x_1|<\delta$ лежит внутри этого слоя, а значит, $|T(x)-t_1|<\varepsilon$. Таким образом, $T(x)$ непрерывна в точке x_1, а следовательно, в каждой точке R^n. Теорема доказана.

Следствие. *Предположим, что $T(x)\in C^1$ в некотором открытом подмножестве $\mathfrak{G}\subset R^n$, не пересекающемся с кривой переключений автономной системы*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu.$$

Тогда

$$\max_{u\in\Omega}[-\nabla T(x)][Ax+Bu]=1 \quad \text{в} \quad \mathfrak{G}.$$

Если, кроме того, ограничивающее множество Ω есть m-мерный

куб $|u^j| \leqslant 1$, *то для каждой точки* $x \in \mathfrak{G}$ *оптимальное управление имеет значение* $\Psi(x)$, *где*

$$\Psi(x) = -\operatorname{sgn}[\nabla T(x) B].$$

Доказательство. Пусть $x^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ — оптимальная траектория, по которой движется система, переходя из точки $x_1 \in \mathfrak{G}$ в начало координат под воздействием управления $u^*(t)$. Тогда

$$T(x^*(t)) = -t$$

и, значит,

$$\nabla T(x^*(t)) \dot{x}^*(t) = \nabla T(x^*(t)) [Ax^*(t) + Bu^*(t)] = -1$$

при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $x^*(t) \subset \mathfrak{G}$. Таким образом, вектор $\nabla T(x_1)$ на множестве $\mathfrak{G}$ не обращается в нуль, а значит, определяет вектор внешней нормали к гиперплоскости, касательной к изохронной гиперповерхности в точке x_1. Отсюда ясно, что вектор $\nabla T(x_1)$ отличается лишь на положительный множитель от вектора $\eta(t^*)$ сопряженного решения, соответствующего оптимальному управлению $u^*(t^* - t)$, которое переводит систему из точки $x_0 = 0$ в точку x_1. Тогда вектор $-Bu^*(0)$ имеет максимальную возможную проекцию на направление $\nabla T(x_1)$, или

$$-\nabla T(x_1) Bu^*(0) = \max_{u \in \Omega} [-\nabla T(x_1) Bu].$$

Отсюда

$$\max_{u \in \Omega} \{-\nabla T(x_1)[Ax_1 + Bu]\} = -\nabla T(x_1)[Ax + Bu^*(0)] = 1.$$

Поэтому в каждой точке $x \in \mathfrak{G}$ имеем

$$\max_{u \in \Omega} [-\nabla T(x)][Ax + Bu] = 1.$$

Наконец, рассмотрим в качестве Ω m-мерный куб $|u^j| \leqslant 1$. Тогда оптимальное управление, переводящее систему из точки $x_0 = 0$ в точку $x_1 \in \mathfrak{G}$, будет иметь вид

$$u^*(t^* - t) = \operatorname{sgn}[-\eta(t) B]$$

и поэтому в каждой точке $x_1 \in \mathfrak{G}$

$$\Psi(x_1) = \operatorname{sgn}[-\eta(t^*) B] = -\operatorname{sgn}[\nabla T(x_1) B],$$

что и требовалось доказать.

Из этого следствия вытекает метод синтеза оптимального управления $u^*(t)$, использующий изохронную функцию $T(x)$. Сформулируем его следующим образом:

1. Найти явно функцию $T(x)$, решив систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\nabla T[Ax + B] = -1 \text{ в } M_+,$$
$$\nabla T[Ax - B] = -1 \text{ в } M_-.$$

Здесь под Ω понимается интервал $|u| \leqslant 1$, а M_+ и M_- — области, где оптимальное управление принимает значения соответственно $+1$ и -1.

2. Определить синтезирующую функцию $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = -\operatorname{sgn}[\nabla T(x) B] \quad \text{для} \quad x \in M_+ \cup M_-.$$

Этот метод, однако, содержит все те трудности, с которыми мы сталкивались в методе кривых переключений. Действительно, ведь для определения областей M_+ и M_- необходимо найти кривую переключений. Затем придется решать задачу Коши для уравнений в частных производных относительно $T(x)$, где краевые условия есть значения функции $T(x)$, вычисленные на кривой переключений. Оптимальные траектории являются характеристиками этих уравнений в частных производных, поэтому для вычисления $T(x)$ должны быть вычислены и оптимальные траектории.

Метод изохронных поверхностей интересен теоретически; иногда он представляет интерес и с вычислительной точки зрения, однако было бы затруднительно дать достаточно полное и общее изложение этого метода.

Мы завершим эту главу об управлении линейными системами доказательством того факта, что минимальное оптимальное время t^* и оптимальное управление $u^*(t)$ в некотором смысле непрерывно зависят от всех условий задачи управления $\{\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, G\}$. Эта непрерывная зависимость позволяет заменять сложные физические задачи их идеализированными математическими моделями, и получать при этом достаточно близкие к действительности приближенные оптимальные управления. Для простоты будем рассматривать автономные системы с началом координат в качестве целевого множества G и многогранную область Ω в качестве ограничивающего множества. Поскольку ребра многогранника Ω играют важную роль в условии нормальности, мы обозначим через E_Ω множество всех единичных векторов в R^m, параллельных ребрам Ω (или самому Ω, если это отрезок).

Теорема 22. *Рассмотрим автономную линейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с выпуклым ограничивающим многогранником $\Omega \subset R^m$, *содержащим* $u = 0$ *внутри себя. Пусть выполняется условие нормальности*:

$$\text{векторы } Bw,\ ABw,\ \ldots,\ A^{n-1}Bw$$

линейно независимы для любого $w \in E_\Omega$. *Пусть далее* x_0 — *начальная точка из области* $\mathscr{C}$ *нуль-управляемости, а* $u^*(t) \subset \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ — *оптимальное управление, переводящее систему из состояния* x_0 *в начало координат вдоль траектории* $x^*(t)$.

Рассмотрим возмущенную автономную систему в R^n:

$$(\hat{\mathscr{L}}) \qquad \dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}u,$$

с выпуклым ограничивающим многогранником $\hat{\Omega} \subset R^m$ *и начальным состоянием* $\hat{x}_0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что из неравенства*

$$|A - \hat{A}| + |B - \hat{B}| + |x_0 - \hat{x}_0| + \operatorname{dist}(\Omega, \hat{\Omega}) + \operatorname{dist}(E_\Omega, E_{\hat{\Omega}}) < \delta$$

следует, что точка $\hat{x}_0$ *лежит в области нуль-управляемости* $\hat{\mathscr{C}}$ *системы* $\hat{\mathscr{L}}$, *что система* $\{\hat{\mathscr{L}}, \hat{\Omega}, \hat{x}_0\}$ *нормальна, и что существует единственное оптимальное управление* $\hat{u}^*(t) \subset \hat{\Omega}$ *на интервале* $0 \leqslant t \leqslant \hat{t}^*$, *переводящее систему из состояния* $\hat{x}_0$ *в начало координат вдоль траектории* $\hat{x}^*(t)$.

Далее,

$$|t^* - \hat{t}^*| < \varepsilon$$

и

$$|x^*(t) - \hat{x}^*(t)| < \varepsilon \quad \text{на} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau^* = \min[t^*, \hat{t}^*],$$

$$\int_0^{\tau^*} |u^*(t) - \hat{u}^*(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Доказательство. Поскольку всякий определитель непрерывно зависит от своих элементов, то существует $\delta_1 > 0$, такое, что из неравенства

$$|\mathscr{L} - \hat{\mathscr{L}}| \equiv |A - \hat{A}| + |B - \hat{B}| + |x_0 - \hat{x}_0| + \operatorname{dist}(\Omega, \hat{\Omega}) + \operatorname{dist}(E_\Omega, E_{\hat{\Omega}}) < \delta_1$$

следует, что

$$\det[\hat{B}\hat{w}, \hat{A}\hat{B}\hat{w}, \ldots, \hat{A}^{n-1}\hat{B}\hat{w}] \neq 0 \quad \text{для} \quad \hat{w} \in E_{\hat{\Omega}}.$$

Выберем теперь $\delta_1 > 0$ столь малым, чтобы существовала компактная кубическая окрестность N управления $u = 0$, лежащая внутри всех тех $\hat{\Omega}$, для которых $\operatorname{dist}(\Omega, \hat{\Omega}) \leqslant \delta_1$. Мы будем рассматривать лишь те задачи $\{\hat{\mathscr{L}}, \hat{\Omega}, \hat{x}_0\}$, для которых $|\mathscr{L} - \hat{\mathscr{L}}| < \delta_1$; каждая из них является нормальной, вполне управляемой, и имеет в качестве области нуль-управляемости некоторое открытое множество $\hat{\mathscr{C}} \subset R^n$.

Возьмем любое ε из интервала $0 < \varepsilon < 1$ и пусть $\hat{\mathscr{C}}(\varepsilon/2, N) \subset R^n$ есть множество тех точек, в которые система может быть переведена из начала координат за время $\varepsilon/2$ с помощью управлений $u(t) \subset N$ вдоль траекторий, являющихся решениями системы $\hat{\mathscr{L}}$. В силу управляемости системы $\hat{\mathscr{L}}$ каждое из множеств $\hat{\mathscr{C}}(\varepsilon/2, N)$ должно содержать вписанный шар радиуса $\hat{r} > 0$ с центром в начале координат. Небольшое изменение коэффициентов $\hat{\mathscr{L}}$ приводит к некоторому изменению множества $\hat{\mathscr{C}}(\varepsilon/2, N)$, причем для нового

выпуклого множества радиус вписанного шара будет больше, чем $\hat{r}-\xi$ для заданного $\xi > 0$. Таким образом, $\hat{r}$ является полунепрерывной снизу функцией матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$, а поэтому $\hat{r}$ имеет положительный минимум $r_\varepsilon > 0$ при $|A-\hat{A}|+|B-\hat{B}| \leqslant \delta_1$.

Пусть $u^*(t) \subset \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ — оптимальное управление, переводящее систему из состояния x_0 в начало координат вдоль решения $x^*(t)$ системы $\mathscr{L}$, и пусть $\hat{u}(t) \subset \hat{\Omega}$ — любое управление с решением $\hat{x}(t)$ системы $\hat{\mathscr{L}}$, такое, что $|u^*(t)-\hat{u}(t)| < \delta_2$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*+1$ $(u^*(t) \equiv 0$ для $t > t^*)$. Тогда, если $|\mathscr{L}-\hat{\mathscr{L}}| < \delta_2 < \delta_1$, где $\delta_2 > 0$ достаточно мало́, то мы находим, что $|x^*(t) - \hat{x}(t)| < \frac{r_\varepsilon}{2}\left|e^{\hat{A}\varepsilon/2}\right|^{-1}$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*+1$. Это следует из формулы вариации произвольных постоянных, которая выражает решение $\hat{x}(t)$ как непрерывную функцию от $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{x}_0$ и $\hat{u}(t)$. Но тогда $|\hat{x}(t^*)| < (r_\varepsilon/2|e^{\hat{A}\varepsilon/2}|^{-1}$, а значит, $e^{\hat{A}\varepsilon/2}\hat{x}(t^*) \in \mathscr{C}(\varepsilon/2, N)$. Таким образом, система может быть переведена из точки $\hat{x}(t^*)$ в начало координат с помощью управления из $N \subset \hat{\Omega}$ вдоль траектории системы $\hat{\mathscr{L}}$ в течение промежутка времени $\varepsilon/2$. Отсюда следует, что $\hat{x}_0 \in \hat{\mathscr{C}}$, и оптимальное время управления для перевода системы из начальной точки $\hat{x}_0$ в начало координат будет $\hat{t}^* < t^*+\varepsilon/2$. Если те же рассуждения провести, поменяв местами задачи $\{\mathscr{L}, \Omega, x_0, t^*\}$ и $\{\hat{\mathscr{L}}, \hat{\Omega}, \hat{x}_0, \hat{t}^*\}$, то получим, что $t^* < \hat{t}^*+\varepsilon/2$ и, значит,

$$|t^*-\hat{t}^*| < \varepsilon \quad \text{для} \quad |\mathscr{L}-\hat{\mathscr{L}}| < \delta_2 \qquad (\delta_2 > 0).$$

Пусть теперь $|\mathscr{L}-\hat{\mathscr{L}}| < \delta_2$, $u^*(t) \subset \Omega$, $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ и $\hat{u}^*(t) \subset \hat{\Omega}$, $(0 \leqslant t \leqslant \hat{t}^*)$ — соответствующие оптимальные управления, а $x^*(t)$ и $\hat{x}^*(t)$ — их траектории. Из непрерывной зависимости решений от $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{x}_0$ и $\hat{u}(t)$ вытекает, что существует $\varepsilon_1 > 0$, такое, что из неравенства

$$\int_0^{\tau^*} |u^*(t)-\hat{u}^*(t)|\,dt < \varepsilon_1 < \varepsilon \ \text{для} \ \tau^* = \min(t^*, \hat{t}^*)$$

следует, что (возможно, при меньшем $\delta_2 > 0$)

$$|x^*(t)-\hat{x}^*(t)| < \varepsilon \ \text{на интервале} \ 0 \leqslant t \leqslant \tau^*.$$

Мы докажем, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует такое положительное $\delta < \delta_2$, что из неравенства $|\mathscr{L}-\hat{\mathscr{L}}| < \delta$ следует, что $|u^*(t)-\hat{u}^*(t)| < \varepsilon_2$ вне некоторого промежутка времени длительностью ε_2 из интервала $0 \leqslant t \leqslant \tau^*$. Этим мы завершим доказательство теоремы.

Принцип максимума гласит, что

$$\eta(t) Bu^*(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) Bu$$

для некоторого сопряженного решения $\eta(t)$, так что управление $u^*(t)$ кусочно-постоянно в вершинах множества Ω. Отсюда следует, что существует такое постоянное $\theta > 0$, что решения $x^*(t)$ и $\bar{x}(t)$ системы $\mathscr{L}$, соответствующие управлениям $u^*(t)$ и $\bar{u}(t)$ из Ω, могут удовлетворять неравенству $|x^*(t^*) - \bar{x}(t^*)| < \theta$ лишь при $|u^*(t) - \bar{u}(t)| < \frac{\varepsilon_2}{2}$ вне некоторого промежутка времени длины ε_2 из интервала $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Используя непрерывность оптимального времени управления t^*, доказанную выше, найдем положительное $\delta_3 < \delta_2$, такое, что $|x^*(t^*) - \hat{x}^*(t^*)| < \frac{\theta}{2}$ при $|\mathscr{L} - \hat{\mathscr{L}}| < \delta_3$. Выберем положительное $\delta_4 < \delta_3$ так, чтобы при $|\mathscr{L} - \hat{\mathscr{L}}| < \delta_4$ существовало бы управление $\bar{u}(t) \subset \Omega$, для которого

$$|\hat{u}^*(t) - \bar{u}(t)| < \delta_4 \text{ на } 0 \leqslant t \leqslant \hat{t}^* + 1$$

и

$$|\hat{x}^*(t^*) - \bar{x}(t^*)| < \frac{\theta}{2}.$$

Тогда

$$|u^*(t) - \hat{u}^*(t)| \leqslant |u^*(t) - \bar{u}(t)| + |\hat{u}^*(t) - \bar{u}(t)| < \frac{\varepsilon_2}{2} + \delta_4$$

всюду вне некоторого промежутка длины ε_2 из интервала $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Положим, наконец, $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon_2}{2}, \delta_4\right)$. Тогда из неравенства $|\mathscr{L} - \hat{\mathscr{L}}| < \delta$ следует, что $|u^*(t) - \hat{u}^*(t)| < \varepsilon_2$ всюду вне некоторого промежутка времени длины ε_2 из интервала $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Итак, при подходящим образом выбранном $\varepsilon_2 > 0$ и соответствующем ему $\delta > 0$, имеем

$$\int_0^{\tau^*} |u^*(t) - \hat{u}^*(t)| \, dt < \varepsilon_1 < \varepsilon$$

и

$$|x^*(t) - \hat{x}^*(t)| < \varepsilon \text{ на } 0 \leqslant t \leqslant \tau^*,$$

что и требовалось доказать.

Если от нормальной задачи $\{\mathscr{L}, \Omega, x_0\}$ перейти к некоторой возмущенной задаче $\{\hat{\mathscr{L}}, \hat{\Omega}, \hat{x}_0\}$, такой, что

$$|A - \hat{A}_0| + |B - \hat{B}_0| + |x - \hat{x}_0| + \operatorname{dist}(\Omega, \hat{\Omega}) < \delta,$$

то мы не можем утверждать, что эта возмущенная задача имеет

единственное оптимальное управление $\hat{u}^*(t) \subset \hat{\Omega}$, переводящее систему из $\hat{x}_0$ в начало координат за время $\hat{t}^*$. Однако можно показать, что каждое оптимальное управление $\hat{u}^*(t)$ задачи $\{\hat{\mathscr{L}}, \hat{\Omega}, \hat{x}_0\}$ аппроксимирует управление $u^*(t)$ в смысле теоремы 22.

Упражнения

1. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

с управлениями $u \subset \Omega$. Требуется перевести систему из начального состояния x_0 при $t=0$ за минимальное время в движущуюся точку $x = G(t)$, скользящую по гладкой кривой. Покажите, что подстановка $y = x - G(t)$ сводит эту задачу к задаче о переводе соответствующей системы из точки $y_0 = x_0 - G(0)$ в точку $y = 0$ вдоль траектории, являющейся решением уравнения $\dot{y} = A(t)y + B(t)u + v(t)$. Вычислите $v(t)$.

2. Рассмотрим управление, приводящее за минимальное время в начало координат систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\alpha_1 x^1 + b_1 u, \\ \dot{x}^2 &= -\alpha_2 x^2 + b_2 u, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}^n &= -\alpha_n x^n + b_n u, \end{aligned}$$

где все $b_j \neq 0$, $\alpha_j > 0$ и $|u| \leqslant 1$.

Покажите, что координаты начальной точки x_0 и моменты переключений $t_1 < t_2 < \ldots < t_{r-1}$ экстремального управления u, переводящего эту точку в начало координат за время t_r, связаны системой трансцендентных уравнений:

$$\pm\frac{x_0^j}{b_j} = \frac{2}{\alpha_j}\left[\frac{1}{2} - e^{\alpha_j t_1} + e^{\alpha_j t_2} - e^{\alpha_j t_3} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{r-1} e^{\alpha_j t_{r-1}} + \frac{(-1)^r e^{\alpha_j t_r}}{2}\right] \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Знак $(\pm)$ определяется первоначальным значением управления $u = \pm 1$. Покажите, что можно считать $r \leqslant n$ и определить оптимальное время t^* как минимальное t_r, для которого такое решение $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r)$ указанной системы уравнений существует.

3. Для каких значений действительного параметра ρ управляемая система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \rho \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}$$

с ограничивающим множеством Ω: $|u^1| \leqslant 1$, $|u^2| \leqslant 1$ будет удовлетворять условию нормальности.

4. Вычислите кривую переключений W и наметьте синтез оптимального по быстродействию управления для системы $\ddot{x} = u$ с ограничением $|u| \leqslant 1$ и целевым множеством G: $(x^1)^2 + (x^2)^2 \leqslant 1$ (круг на фазовой плоскости). Проверьте выполнение условий устойчивости, нормальности и трансверсальности.

5. Рассмотрим задачу минимального по быстродействию управления системой

$$\dot{x}^1 = -x^1 - x^2 + u^1, \quad \dot{x}^2 = -x^2 + u^1 + u^2$$

в R^2, с ограничениями $|u^1| \leqslant 1$ и $|u^2| \leqslant 1$ и началом координат в качеств

целевого множества. Найдите кривые переключений W_1 и W_2 для составляющих u^1 и u^2 управления, и наметьте решение задачи синтеза оптимальных управлений. Проверьте выполнение условий устойчивости, нормальности и трансверсальности.

6. Пусть $A(t)$, $t \geqslant 0$ — действительная непрерывная $(n \times n)$-матрица. Предположим, что существует такое $\varepsilon > 0$, что собственные значения симметрической матрицы $A(t) + A'(t)$ в любой момент $t \geqslant 0$ будут меньше, чем $-\varepsilon$. Доказать, что система дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$ устойчива в начале координат, т. е. для любого ее решения $x(t)$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

$$\left[\text{Указание: } \frac{d}{dt}(x'x) = x'(A + A')x \leqslant -\varepsilon(x'x).\right]$$

7. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu + v(t),$$

где A и B — постоянные матрицы, удовлетворяющие условию управляемости

$$\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n,$$

а вектор-функция $v(t)$ непрерывна на R^1. Предположим, что ограничивающее множество $\Omega \subset R^n$ компактно и строго выпукло, а целевое множество G удовлетворяет условиям (b) и (c) теоремы 19. Докажите, что в этом случае управляемая система нормальна и обладает свойством единственности экстремальных управлений, трансверсальных к G, как и в теореме 19. Разберите случай, когда $v \equiv 0$, G есть начало координат, и точка $u = 0$ лежит внутри Ω.

8. Рассмотрим множество всех автономных управляемых систем

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu + v \text{ в } R^n,$$

с фиксированным выпуклым многогранником $\Omega \subset R^m$ в качестве ограничивающего множества. Требуется показать, что, вообще говоря, система $\mathscr{L}$ удовлетворяет условию нормальности; точнее, что пары матриц (A, B), соответствующие нормальным системам, образуют открытое плотное множество в метрическом пространстве, состоящем из всевозможных пар матриц (см. теорему 11).

9. Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + bu$, где A — действительная (2×2)-матрица с комплексными собственными значениями $\alpha \pm i\beta$ $(\beta > 0)$ с ограничивающим множеством $\Omega: |u| \leqslant 1$ в R^1. Предположим, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости. Тогда для $t > 2\pi/\beta$ множество $K(t)$ не имеет вершин, т. е., в каждой граничной точке множества $K(t)$ существует единственная опорная гиперплоскость (см. упражнение 2 к разделу 3).

10. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t) \text{ в } R^n$$

с непрерывными в R^1 $A(t)$, $B(t)$ и $v(t)$, начальным состоянием x_0 и компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. Покажите, что множество $K(t)$ зависит от t непрерывно в смысле Липшица на некотором компактном интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, т. е.

$$\operatorname{dist}(K(t_1), K(t_2)) \leqslant k|t_1 - t_2| \qquad (\tau_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \tau_2)$$

для некоторого постоянного $k > 0$.

11. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t) \text{ в } R^n$$

с непрерывно меняющимся, непустым, компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega(t) \subset R^m$ $(\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1)$. Пусть x_0 — начальное состояние системы,

а $G(t)$ — компактное непрерывно меняющееся целевое множество ($\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$). Докажите, что $K(t)$ есть компактное, выпуклое, непрерывно меняющееся ножество. Получите отсюда теоремы, аналогичные теоремам существования 1 м 17. Докажите аналог теоремы 2 и сформулируйте принцип максимума для икстремальных управлений

$$\eta(t)B(t)u(t) = \max_{u \in \Omega(t)} \eta(t)B(t)u \text{ почти всюду.}$$

12. Рассмотрим линейную управляемую систему в R^n

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t),$$

начальным состоянием x_0 в момент времени τ_0 и фиксированным компактным целевым множеством G. Рассмотрим управления $u(t)$ на различных интервалах времени $\tau_0 \leqslant t \leqslant t_1$ с ограничениями $\|u\|_2 = \int_{\tau_0}^{t_1} u^2(s)\,ds \leqslant 1$, $u(t) \subset \Omega$, где Ω — замкнутое выпуклое множество в R^m, содержащее $u = 0$.

Докажите, что $K(t)$ есть компактное, выпуклое, непрерывно меняющееся множество, и получите отсюда аналоги теорем существования 1 и 17.

Определив новую функцию $x^0(t) = \int_{\tau_0}^{t} u^2(s)\,ds$, получите соответствующую управляемую систему в R^{n+1}:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t),$$
$$\dot{x}^0 = u^2(t),$$

с начальным состоянием $(x_0, 0)$ и компактным цилиндром $G \times [0 \leqslant x^0 \leqslant 1]$ в качестве целевого множества. Единственным ограничением на управления теперь будет $u(t) \subset \Omega$. Принцип максимума для такой нелинейной системы будет обсуждаться ниже.

13. Пусть $P_j(t)$ — действительный многочлен степени $\leqslant n_j - 1$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ и пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$, где λ_j — различные действительные числа. Докажите, что функция

$$\eta(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + P_r(t)e^{\lambda_r t}$$

имеет не более $n_1 + n_2 + \ldots + n_r - 1$ действительных нулей. (Указание использовать индукцию по r. Если функция $\eta(t)e^{-\lambda_r t}$ имеет $n_1 + \ldots + n_r$ действительных нулей, то ее n_r-я производная должна иметь $n_1 + \ldots + n_{r-1}$ действительных нулей.)

14. Рассмотрим автономную систему в R^n, обладающую свойством управляемости

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, содержащим точку $u = 0$ внутри себя.

(a) пусть $u_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ и $u_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_2)$ суть экстремальные управления, переводящие систему из состояния x_0 в начало координат. Покажите, что $t_1 = t_2 = t^*$ — минимальное оптимальное время управления.

(b) Если $\{\hat{\mathscr{L}}, \hat{x}_0, \hat{\Omega}\}$ — любая достаточно близкая управляемая система того же типа, то $\hat{t}^*$ близко к t^*.

15. Рассмотрим линейную систему в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t),$$

с выпуклым многогранником в качестве ограничивающего множества $\Omega \subset R^m$, начальным состоянием x_0 в момент времени $\tau_0 = 0$ и постоянным компактным целевым множеством G. Предположим, что

$$
\begin{aligned}
A(t) &= A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \ldots, \\
B(t) &= B_0 + tB_1 + t^2B_2 + \ldots, \\
v(t) &= v_0 + tv_1 + t^2v_2 + \ldots
\end{aligned}
$$

суть действительные аналитические матрицы при $t \geqslant 0$. Покажите, что если задача нормальна, то оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$ кусочно-непрерывно (если доопределить его на множестве меры нуль), и имеет конечное число переключений между вершинами Ω. Более того, если $n = 2$, то из условия

$$\det | B_0 w, \ (-A_0B_0 + B_1) w | \neq 0$$

для любого ребра w множества Ω следует нормальность задачи управления.

16. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u \ \text{ в } R^n,$$

где $A(t) \in L_1$, $B(t) \in L_q$, $1 \leqslant q < \infty$, на некотором интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Класс приемлемых управлений составляют m-мерные векторы $u(t)$ на различных интервалах $0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant T$, удовлетворяющие условию

$$\left(\int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{m} | u^i(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \leqslant 1,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а при $q = 1$, $p = \infty$ берется ограничение

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant t_1} \ \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} | u^i(t) | \leqslant 1.$$

Покажите, что множество достижимости $K(t_1)$, соответствующее начальному состоянию x_0, будет компактным, выпуклым, непрерывно меняющимся по времени t_1. Для заданного компактного, выпуклого целевого множества G сформулируйте соответствующую теорему существования для оптимального по быстродействию управления $u^*(t)$ системы на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Предположим, что A и B постоянны, и выполнено условие управляемости

$$\operatorname{rank} [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n,$$

а также предположим, что $1 < p < \infty$, так что единичный шар в L_p является строго выпуклым множеством. Докажите, что оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$ является единственным и удовлетворяет принципу максимума

$$u^{i*}(t) = | v^{i*}(t) |^{q/p} \operatorname{sgn} v^{i*}(t) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $v^*(t) = \eta^*(t) B$, а $\eta^*(t) = \eta_0 e^{-At}$ — некоторое нетривиальное сопряженное решение. Кроме того, управление $u^*(t)$ лежит на границе единичного шара в L_p (Указание: использовать слабую компактность и выпуклость единичного шара в L_p для доказательства свойств $K(t_1)$ и теоремы существования. Принцип максимума следует из неравенства Гёльдера и соответствует его крайнему частному случаю — случаю равенства.)

Приложение

Выпуклые множества

Подмножество K действительного векторного пространства V называется *выпуклым*, если отрезок $\lambda P_1+(1-\lambda)P_2$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, соединяющий любые две точки P_1, P_2 множества K, целиком лежит в K. Примерами выпуклых множеств могут служить пустое множество, одна точка $P\in V$, отрезок, соединяющий две точки P_1, $P_2\in V$, а также все пространство V. Пересечение выпуклых подмножеств V есть выпуклое множество.

Мы будем иметь дело в основном с выпуклыми подмножествами действительного n-мерного векторного пространства R^n. Выпуклые подмножества R^n всегда являются связными множествами, однако они могут быть открытыми или замкнутыми, или ни теми и ни другими, как показывают следующие примеры:

1) гиперплоскость π: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i+b=0$, где $a\neq 0$, в декартовых координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ в R^n;

2) замкнутое полупространство $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i+b\geqslant 0$ (или $\leqslant 0$);

3) открытое полупространство $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i+b>0$ (или <0);

4) открытый (или замкнутый) шар $\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i-x_0^i)^2<r^2$ (или $\leqslant r^2$) с радиусом $r>0$ и центром в точке x_0;

5) n-мерный куб $|x^i|\leqslant a$, $i=1, \ldots, n$ с длиной ребра $2a>0$ или n-мерный куб, у которого выброшены некоторые из граничных точек.

Замыкание $\overline{K}$, а также внутренность K ($\operatorname{int} K$) выпуклого множества $K\subset R^n$ являются выпуклыми множествами; более того, $\overline{\operatorname{int} K}=\overline{K}$ и $\operatorname{int}\overline{K}=\operatorname{int} K$. *Размерностью выпуклого множества* $K\subset R^n$ называют размерность $r\leqslant n$ единственного наименьшего линейного многообразия $L(K)\subset R^n$, содержащего K. Непустое выпуклое множество K имеет непустую внутренность относительно $L(K)$; далее, если K компактно, то K топологически эквивалентно замкнутому r-мерному шару.

Для произвольного подмножества $M\subset R^n$ определим его *выпуклую оболочку* $H(M)$ как пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M, т. е. $H(M)$ есть наименьшее из выпуклых множеств, содержащих M. Таким образом, множество M будет выпуклым тогда и только тогда, когда $M=H(M)$. Если множество M компактно, то и множество $H(M)$ компактно, и каждая точка множества $H(M)$ есть выпуклая комбинация некоторых $n+1$ точек из M. Выпуклая оболочка конечного множества точек

$H(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ называется *выпуклым многогранником*. Если точки $P_0, P_1, \ldots, P_k$ линейно независимы в R^n (точнее, векторы $P_1-P_0, P_2-P_0, \ldots, P_k-P_0$ линейно независимы), то $H(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ называется *k-мерным симплексом*. В частности, одномерный симплекс—это отрезок, двумерный симплекс—треугольник, а трехмерный—тетраэдр. Можно доказать, что компактное подмножество $M \subset R^n$ является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда оно представляет собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Произвольное замкнутое выпуклое подмножество $K \subset R^n$ есть пересечение счетного числа замкнутых полупространств.

Говорят, что гиперплоскость π разделяет два множества M_1 и M_2, если M_1 лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных π, а M_2—в другом замкнутом полупространстве. Два непересекающихся выпуклых множества K_1 и K_2 можно разделить гиперплоскостью в R^n, если множество K_1 имеет непустую внутренность, или если K_1 замкнуто, а множество K_2 компактно.

Пусть K—замкнутое выпуклое множество в R^n. Гиперплоскость π, имеющая общие точки с K и такая, что K лежит в одном из полупространств, образованных π, называется опорной гиперплоскостью к K. Через каждую точку множества ∂K проходит гиперплоскость, опорная к замкнутому выпуклому множеству $K \subset R^n$.

Точка P называется *крайней точкой* выпуклого множества $K \subset R^n$, если P не лежит ни на каком из отрезков $H(P_1, P_2)$, соединяющих точки $P_1 \neq P$ и $P_2 \neq P$ из K. Каждая опорная гиперплоскость к компактному выпуклому множеству $K \subset R^n$ содержит по крайней мере одну крайнюю точку K. Более того, K есть выпуклая оболочка множества своих крайних точек.

Замкнутое выпуклое множество K, содержащее более одной точки, называется *строго выпуклым*, если любая его опорная гиперплоскость имеет только одну общую точку с K. Строго выпуклое множество $K \subset R^n$ всегда имеет непустую внутренность, и каждая из его граничных точек является его крайней точкой.

Теперь мы предлагаем несколько лемм, необходимых для доказательства теорем 1 и 2, а также для получения более сильного результата в теореме 1А. Все эти результаты будут затем использованы при исследовании линейных управляемых систем

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u + v(t)$$

с управлениями $u(t)$, определенными на $\mathfrak{I}$: $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и принимающими значения из ограничивающего множества $\Omega \subset R^m$. Здесь $A(t)$, $B(t)$ и $v(t)$—интегрируемые матричные функции.

Лемма 1А. *Пусть Ω—компактное выпуклое множество в R^m, а $\mathscr{F}$—семейство всех измеримых вектор-функций $u(t) \subset \Omega$ на*

действительном компактном интервале $\mathcal{J}$. Тогда множество $\mathcal{F}$ является слабо компактным.

Доказательство. Пусть $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_k(t)$ — последовательность функций из $\mathcal{F}$, и мы хотим выбрать из нее подпоследовательность $u_{k_i}(t)$, слабо сходящуюся к некоторой предельной функции $\bar{u}(t)$ в $\mathcal{F}$, т. е. такую, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{J}} h(t)\,u_{k_i}(t)\,dt = \int_{\mathcal{J}} h(t)\,\bar{u}(t)\,dt$$

для любой ограниченной измеримой n-мерной вектор-функции $h(t)$ на интервале $\mathcal{J}$. Нам требуется лишь доказать слабую сходимость для каждой компоненты $u_{k_i}(t)$. Поэтому рассмотрим последовательность вещественных скалярных функций $w_k(t)$, равномерно ограниченных на интервале $\mathcal{J}$: $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$

$$|w_k(t)| \leqslant C.$$

Ясно, что функции $w_k(t)$ принадлежат гильбертову пространству $L_2(t_0, t_1)$.

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t) \ldots$ — полная ортонормальная система действительных функций (например, тригонометрическая система). Разложим функцию $w_k(t)$ в обобщенный ряд Фурье по этой системе:

$$w_k(t) \sim \alpha_k^1\varphi_1(t) + \alpha_k^2\varphi_2(t) + \ldots$$

Обобщенные коэффициенты Фурье α_k^j равномерно ограничены, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_k^j|^2 = \int_{\mathcal{J}} w_k^2(t)\,dt \leqslant C_1^2 = C^2\,|\mathcal{J}|^2.$$

Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность $w_{k1}(t)$ последовательности $w_k(t)$, что существует предел

$$\lim_{k1\to\infty} \alpha_{k1}^1 = \gamma^1.$$

Далее из последовательности w_{k1} выберем подпоследовательность $w_{k2}(t)$ такую, что существует предел

$$\lim_{k2\to\infty} \alpha_{k2}^2 = \gamma^2.$$

Продолжая аналогично, для каждого j построим подпоследовательность w_{kj} такую, что для всех $i \leqslant j$ соответствующая последовательность i-х коэффициентов Фурье сходится к нулю. Затем из этих подпоследовательностей выберем диагональную подпоследо-

вательность

$$w_{1'}(t)=w_{11}(t), \quad w_{2'}(t)=w_{22}(t), \ \ldots, \ w_{k'}(t)=w_{kk}(t), \ \ldots,$$

элементы которой имеют разложения[1])

$$w_{k'}(t) \sim \beta_k^1\varphi_1(t)+\beta_k^2\varphi_2(t)+\ldots$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k^j=\gamma^j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Для каждого конечного целого k и действительного $\delta>0$ имеем

$$(\gamma^1)^2+(\gamma^2)^2+\ldots+(\gamma^k)^2\leqslant C_1^2+\delta.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\gamma^j|^2\leqslant C_1^2,$$

и значит, по теореме Рисса — Фишера существует измеримая функция $\bar{w}(t)$ на $\mathcal{J}$, имеющая разложение

$$\bar{w}(t)\sim\gamma^1\varphi_1(t)+\gamma^2\varphi_2(t)+\ldots$$

Мы утверждаем, что

$$\lim_{k'\to\infty}w_{k'}(t)=\bar{w}(t)$$

в смысле слабой сходимости на $\mathcal{J}$. Действительно, пусть $\psi(t)$ — действительная ограниченная измеримая функция, такая, что

$$|\psi(t)|\leqslant C_2 \text{ на } \mathcal{J}.$$

Тогда существует конечная сумма (например, тригонометрический многочлен)

$$P(t)=b^1\varphi_1(t)+\ldots+b^l\varphi_l(t),$$

являющаяся хорошим приближением для $\psi(t)$:

$$\int_{\mathcal{J}}|\psi(t)-P(t)|^2\,dt<\varepsilon^2$$

для заданного $\varepsilon>0$. Заметим, что

$$\lim_{k'\to\infty}\int_{\mathcal{J}}P(t)\,w_{k'}(t)\,dt=\lim_{k\to\infty}(b^1\beta_k^1+\ldots+b^l\beta_k^l)=$$

$$=b^1\gamma^1+\ldots+b^l\gamma^l=\int_{\mathcal{J}}P(t)\,\bar{w}(t)\,dt.$$

---

[1]) Автор пользуется стандартной процедурой, часто именуемой «канторовым диагональным процессом». (*Прим. ред.*)

Произведем оценку

$$\left|\int_{\mathcal{I}} \psi(t) w_{k'}(t)\,dt - \int_{\mathcal{I}} \psi(t)\bar{w}(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{\mathcal{I}} P(w_{k'}-\bar{w})\,dt\right| + \\ + \left|\int_{\mathcal{I}} (\psi-P) w_{k'}dt - \int_{\mathcal{I}} (\psi-P)\bar{w}\,dt\right|.$$

Используя неравенство Шварца, получим

$$\left|\int_{\mathcal{I}} \psi(w_{k'}-\bar{w})\,dt\right| \leqslant \varepsilon + C_1\varepsilon + C_1\varepsilon$$

для всех достаточно больших k'. Таким образом, слабая сходимость $w_{k'}(t)$ установлена.

Из векторной последовательности $u_k(t)$ выберем подпоследовательность $u_{k_i}(t)$, которая покомпонентно слабо сходится на интервале $\mathcal{I}$ к некоторой вектор-функции $\bar{u}(t)$ так, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{I}} h(t) u_{k_i}(t)\,dt = \int_{\mathcal{I}} h(t)\bar{u}(t)\,dt$$

для любой ограниченной измеримой вектор-функции $h(t)$ на $\mathcal{I}$.

Остается показать, что $\bar{u}(t) \subset \Omega$ на интервале $\mathcal{I}$ (заметим, что $\bar{u}(t)$ может быть изменена на множестве меры нуль, без изменения интеграла $\int_{\mathcal{I}} h(t)\bar{u}(t)\,dt$). Пусть

$$(\pi) \qquad a_1x^1 + \ldots + a_nx^n + b = 0 \text{ или } ax + b = 0$$

есть гиперплоскость, опорная к Ω, так что Ω лежит в замкнутом полупространстве $ax+b\leqslant 0$. Пусть E — подмножество интервала $\mathcal{I}$, на котором $a\bar{u}(t)+b>0$.

Тогда в силу слабой сходимости последовательности $u_{k_i}(t)$

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{I}} \chi_E(t)(au_{k_i}(t)+b)\,dt = \int_{\mathcal{I}} \chi_E(t)(a\bar{u}(t)+b)\,dt,$$

где $\chi_E(t)$ равняется $+1$ на E и 0 на $\mathcal{I}-E$. Но

$$\int_{\mathcal{I}} \chi_E(t)(au_{k_i}(t)+b)\,dt \leqslant 0,$$

и если множество E имеет положительную меру, то

$$\int_{\mathcal{I}} \chi_E(t)(a\bar{u}(t)+b)\,dt > 0.$$

Это противоречие показывает, что E имеет меру нуль, а значит, точка $\bar{u}(t)$ находится по одну сторону от плоскости π почти всюду

на $\mathcal{I}$. Однако множество Ω является пересечением счетного числа замкнутых полупространств, и значит, $\bar{u}(t) \subset \Omega$ всюду, кроме некоторого объединения счетного числа множеств меры нуль. Таким образом, $\bar{u}(t) \subset \Omega$ почти всюду на $\mathcal{I}$. Лемма доказана.

Замечание. В предположении, что $|u|$ равномерно ограничено, можно усилить эту лемму, а именно:

$$\lim_{i \to \infty} \int_{\mathcal{I}} h(t) u_{k_i}(t)\, dt = \int_{\mathcal{I}} h(t) \bar{u}(t)\, dt$$

для каждого интегрируемого вектора $h(t)$ на $\mathcal{I}$. Для доказательства достаточно получить соответствующий результат для последовательности скалярных функций $w_k(t)$, слабо сходящейся к $\bar{w}(t)$ на $\mathcal{I}$. По условию, существует константа C такая, что

$$|w_k(t)| \leqslant C \quad \text{и} \quad |\bar{w}(t)| \leqslant C \quad \text{на } \mathcal{I}.$$

Пусть функция $\psi(t)$ интегрируема на $\mathcal{I}$; выберем полином

$$P(t) = b^1 \varphi_1(t) + \ldots + b^l \varphi_l(t),$$

так что

$$\int_{\mathcal{I}} |\psi(t) - P(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Для подпоследовательности $w_{k'}(t)$ получим

$$\lim_{k' \to \infty} \int_{\mathcal{I}} P(t)\,(w_{k'}(t) - \bar{w}(t))\, dt = 0.$$

Тогда из оценки, полученной в лемме, следует, что

$$\lim_{k' \to \infty} \int_{\mathcal{I}} \psi(t)\,(w_{k'}(t) - \bar{w}(t))\, dt = 0,$$

и соответствующий результат справедлив для последовательности векторов $u_{k_i}(t)$. В частности, пусть

$$h(s) = \chi_t(s)\, \Phi^{-1}(s)\, B(s) \quad \text{на} \quad t_0 \leqslant s \leqslant t_1,$$

где функция $\chi_t(s) = 1$ на интервале $t_0 \leqslant s \leqslant t$ и 0 на остальной части интервала $\mathcal{I}$, функция $\Phi(s)$ непрерывна, а функция $B(s)$ интегрируема на $\mathcal{I}$. Тогда для любого фиксированного t из $\mathcal{I}$

$$\lim_{i \to \infty} \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, B(s)\, u_{k_i}(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\, B(s)\, \bar{u}(s)\, ds.$$

Лемма 2А. *Пусть Ω — компактное множество в R^m, а $\eta(t)$ абсолютно непрерывный вектор на $\mathcal{I}$. Для каждого $t \in \mathcal{I}$ положим*

$$m(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t)\, B(t)\, u.$$

Тогда функция $m(t)$ интегрируема на $\mathcal{I}$. Если матричная функция $B(t)$ непрерывна (или абсолютно непрерывна), то $m(t)$ непрерывна (или абсолютно непрерывна).

Доказательство. Пусть E — некоторое замкнутое подмножество в $\mathcal{I}$, на котором матричная функция $B(t)$ непрерывна; покажем, что функция $m(t)$ измерима на E. Возьмем любое действительное число α и рассмотрим множество $E_\alpha \subset E$, на котором $m(t) \geqslant \alpha$. Покажем, что каждое из таких множеств E_α замкнуто, а следовательно, функция $m(t)$ измерима на E.

Если E_α не замкнуто, то существует последовательность

$$t_k \longrightarrow \bar{t},$$

где t_k и $\bar{t}$ принадлежат E, и

$$m(t_k) \geqslant \alpha, \quad \text{но} \quad m(\bar{t}) < \alpha.$$

Для соответствующей последовательности точек $u_k \in \Omega$

$$m(t_k) = \eta(t_k) B(t_k) u_k \geqslant \alpha.$$

Выберем подпоследовательность, обозначаемую также u_k, так чтобы

$$u_k \longrightarrow \bar{u} \in \Omega.$$

Тогда

$$m(\bar{t}) \geqslant \lim_{k \to \infty} m(t_k) = \eta(\bar{t}) B(\bar{t}) \bar{u} \geqslant \alpha.$$

Это противоречие показывает, что множество E_α замкнуто.

Пусть теперь $E_1, E_2, \ldots, E_l, \ldots$ — последовательность замкнутых подмножеств в $\mathcal{I}$, таких, что

$$\text{мера } (\mathcal{I} - E_l) \leqslant 2^{-l}, \qquad l = 1, 2, 3$$

и функция $B(t)$ непрерывна на E_l (существование таких множеств E_l следует из измеримости $B(t)$). На каждом из множеств E_l функция $m(t)$ измерима, а значит, $m(t)$ измерима и на их объединении, которое отличается от $\mathcal{I}$ на множество меры нуль. Таким образом, функция $m(t)$ измерима на интервале $\mathcal{I}$. Поскольку величины $|\eta(t)|$ и $|u|$ ограничены на $\mathcal{I}$, то функция $m(t)$ интегрируема на $\mathcal{I}$.

Предположим теперь, что матричная функция $B(t)$ непрерывна либо абсолютно непрерывна на $\mathcal{I}$. Фиксируем t_1 и $t_2 \in \mathcal{I}$ и пусть

$$m(t_i) = \eta(t_i) B(t_i) u_i, \quad u_i \in \Omega, \qquad i = 1, 2 \ldots$$

Тогда

$$m(t_2) - m(t_1) \leqslant \eta(t_2) B(t_2) u_2 - \eta(t_1) B(t_1) u_2 = \\ = [\eta(t_2) B(t_2) - \eta(t_1) B(t_1)] u_2,$$

$$m(t_2) - m(t_1) \geqslant \eta(t_2) B(t_2) u_1 - \eta(t_1) B(t_1) u_1 = \\ = [\eta(t_2) B(t_2) - \eta(t_1) B(t_1)] u_1.$$

Из этих оценок непосредственно следует непрерывность или абсолютная непрерывность функции $m(t)$, что и требовалось доказать.

Лемма 3А. *Пусть* Ω — *компактное множество в* R^m, *а* $\varphi(t, u)$ — *действительная* m-*мерная вектор-функция, непрерывная по* (t, u) *для* $u \in \Omega$ *и любого действительного* t. *Для произвольного фиксированного* t *множество*

$$B(t)\varphi(t, \Omega) = \{x \in R^n \mid x = B(t)\varphi(t, u) \text{ для } u \in \Omega\}$$

есть компакт в R^n. *Пусть* $g(t)$ — *измеримая* n-*мерная вектор-функция такая, что*

$$g(t) \in B(t)\varphi(t, \Omega) \text{ для любого действительного } t.$$

Тогда существует измеримая m-*мерная вектор-функция* $u(t) \subset \Omega$ *такая, что*

$$g(t) = B(t)\varphi(t, u(t)) \text{ для всех действительных } t.$$

Доказательство. Для каждого фиксированного t_0 рассмотрим все точки $u \in \Omega$, для которых

$$B(t_0)\varphi(t_0, u) = g(t_0).$$

Выберем $u(t_0)$ так, чтобы его первая компонента $u^1(t_0)$ имела возможно меньшее значение. Если имеется более, чем одна такая точка u, то потребуем, чтобы $u^2(t_0)$ было наименьшим, и так далее. Таким путем определим единственный вектор $u(t_0) \subset \Omega$. Докажем, что $u(t)$ есть измеримая функция. Достаточно показать это для компактного интервала $\mathcal{I}$.

Предположим, что компоненты $u^1(t), \ldots, u^{s-1}(t)$ измеримы на $\mathcal{I}$ (если $s = 1$, то ничего не предполагается), и докажем, что $u^s(t)$ измеримо на $\mathcal{I}$. Рассмотрим систему замкнутых множеств $E_l \subset \mathcal{I}$, $l = 1, 2, 3, \ldots$ такую, что

$$\text{мера } (\mathcal{I} - E_l) \leqslant 2^{-l}$$

и функции $u^1(t), \ldots, u^{s-1}(t)$, $B(t)$, $g(t)$ на E_l непрерывны. Выберем произвольное число α и покажем, что подмножество в E_l, на котором $u^s(t) \leqslant \alpha$, замкнуто.

Предположим противное, т. е. будем считать, что существует последовательность

$$t_k \to \bar{t}, \text{ где } t_k \text{ и } \bar{t} \text{ принадлежат } E_l,$$

и

$$u^s(t_k) \leqslant \alpha < u^s(\bar{t}).$$

Выберем подпоследовательность, вновь обозначаемую t_k, такую, что

$$\lim_{k \to \infty} u(t_k) = \bar{u} \in \Omega.$$

В силу непрерывности соответствующих функций на множестве

E_l имеем

$$u^i(t_k) \longrightarrow u^i(\bar{t}) = \bar{u}^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s-1,$$
$$g(t_k) \longrightarrow g(\bar{t}), \quad B(t_k) \longrightarrow B(\bar{t}),$$

так что

$$B(\bar{t})\,\varphi(\bar{t}, \bar{u}) = g(\bar{t}).$$

Но

$$\bar{u}^s \leqslant \alpha < u^s(\bar{t}),$$

что противоречит определению $u^s(t)$. Следовательно, функция $u^s(t)$ измерима на E_l. Отсюда, как и в лемме 2А, следует, что функция $u^s(t)$ измерима на интервале $\mathcal{J}$. В силу предположения индукции вектор-функция $u(t)$ будет измеримой на $\mathcal{J}$. Отсюда видно, что вектор-функция $u(t)$ измерима на всей действительной оси, что и требовалось доказать.

Лемма 4А. *Пусть $y(t)$ — интегрируемая m-мерная вектор-функция, определенная на компактном интервале $\mathcal{J}$. Для любого измеримого подмножества $E \subset \mathcal{J}$ рассмотрим m-мерный вектор*

$$x_E = \int_E y(t)\,dt.$$

Совокупность векторов x_E, отвечающих всевозможным измеримым подмножествам E в $\mathcal{J}$, обозначим через K. Тогда K — выпуклое подмножество в R^m. Если, кроме того, вектор-функция $y(t)$ ограничена, то K есть компакт.

Доказательство. Мы предлагаем здесь сжатое доказательство этого важного факта из теории меры. Будем рассматривать интервал $\mathcal{J}$ и σ-алгебру $\mathcal{B}$ всех измеримых по Лебегу подмножеств $\mathcal{J}$. (σ-алгеброй называется совокупность подмножеств $\mathcal{J}$, замкнутая относительно операций взятия счетных объединений и пересечений, а также дополнений; в частности, в σ-алгебру входят само $\mathcal{J}$ и пустое множество $\varnothing$.) Мы будем рассматривать также некоторые σ-подалгебры $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ (причем все такие подалгебры будут неатомистическими, что означает, что если лебегова мера $\mu(E) > 0$ для $E \in \mathcal{U}$, то существует подмножество $E_1 \subset E$ из $\mathcal{U}$ такое, что $0 < \mu(E_1) < \mu(E)$).

Прежде всего отметим, что для любой σ-алгебры $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ существует непрерывное семейство множеств D_α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, где $D_\alpha \in \mathcal{U}$, $D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, и $\mu(D_\alpha) = \alpha\mu(\mathcal{J})$. Для простоты будем считать $\mu(\mathcal{J}) = 1$, так что $\mu(D_\alpha) = \alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Такое непрерывное семейство легко построить с помощью аксиомы выбора как некоторую максимальную линейно упорядоченную цепочку множеств в $\mathcal{U}$.

Пусть теперь $f(t)$ — действительная интегрируемая функция на $\mathcal{J}$, а $\mathcal{U}$ — σ-алгебра. Тогда существует σ-алгебра $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$, на кото-

рой $\int\limits_E f\,dt=\mu(E)\int\limits_{\mathcal{I}} f\,dt$ (для упрощения вычислений положим $\mu(\mathcal{I})=1$ и $\int\limits_{\mathcal{I}} f\,dt=1$). Для доказательства этого факта мы сначала построим множество $E_1\in\mathcal{U}$, на котором $\int\limits_{E_1} f\,dt=1/2$ и $\mu(E_1)=1/2$. Для того чтобы убедиться в существовании E_1, используем непрерывное семейство D_α, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ в $\mathcal{U}$. Заметим, что $\mu\left(D_\alpha-D_{\alpha-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}$ для α из интервала $1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$ и интеграл от функции f по множеству $D_\alpha-D_{\alpha-\frac{1}{2}}$ представляет собой действительную непрерывную функцию $\varphi(\alpha)$, такую, что $\left[\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]/2=\frac{1}{2}$. Таким образом, для некоторого промежуточного α_1 из интервала $1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$ получим $\varphi(\alpha_1)=1/2$. Далее, разделим каждое из множеств E_1 и $E_2=\mathcal{I}-E_1$ на два подмножества E_3, E_4 и E_5, E_6 соответственно так, чтобы $\int\limits_{E_i} f\,dt=$ $=1/4=\mu(E_i)$. Продолжая аналогично, получим счетное множество таких множеств E, и затем рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{U}_1$, порожденную всеми этими множествами. Поскольку $\int\limits_E f\,dt$ и $\mu(E)$ являются мерами, определенными на $\mathcal{U}_1$, и они совпадают на указанном выше счетном семействе множеств $E_1, E_2, \ldots$, то имеем $\int\limits_E f\,dt=\mu(E)$ для всех $E\in\mathcal{U}_1$.

Повторяя это рассуждение конечное число раз, получим следующий результат. Пусть $f=(f^1, \ldots, f^k)$ — действительный k-мерный вектор, состоящий из интегрируемых функций на $\mathcal{I}$. Тогда существует σ-алгебра $\mathcal{U}\subset\mathcal{B}$, на которой

$$\int\limits_E f\,dt=\mu(E)\int\limits_{\mathcal{I}} f\,dt \quad \text{для всех} \quad E\in\mathcal{U}.$$

Теперь легко доказать выпуклость $K=\left\{x_E=\int\limits_E y(t)\,dt \,\middle|\, E\in\mathcal{B}\right\}$.

Предположим, что

$$\int\limits_{F_1} y(t)\,dt=a_1, \quad \int\limits_{F_2} y(t)\,dt=a_2,$$

и рассмотрим промежуточную точку

$$\lambda a_1+(1-\lambda)a_2$$

для некоторого λ из промежутка $0<\lambda<1$.

Возьмем $2m$-мерный вектор $y^*(t) = (y(t)\chi_1(t),\ y(t)\chi_2(t))$, где $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ — характеристические функции множеств F_1 и F_2 соответственно. Пусть $\mathcal{U}$ — σ-подалгебра алгебры $\mathcal{B}$, такая, что

$$\int_E y^*(t)\,dt = \mu(E)\int_{\mathcal{J}} y^*(t)\,dt = \mu(E)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad E \in \mathcal{U}.$$

Пусть D_α — непрерывное семейство множеств из $\mathcal{U}$ такое, что $\mu(D_\alpha) = \alpha$. Положим $F = (D_\lambda \cap F_1) \cup [(\mathcal{J} - D_\lambda) \cap F_2]$. Тогда

$$\int_F y(t)\,dt = \int_{D_\lambda} y(t)\chi_1(t)\,dt + \int_{\mathcal{J}-D_\lambda} y(t)\chi_2(t)\,dt = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2.$$

Следовательно, K является выпуклым множеством. Компактность K мы здесь доказывать не будем, но доказательство может быть получено использованием рассуждений, аналогичных примененным для доказательства теоремы 1A. Лемма доказана.

Теорема 1А. *Рассмотрим линейную управляемую систему в* R^n

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u + v(t),$$

с компактным ограничивающим множеством Ω, *начальным состоянием* x_0 *и управлениями* $u(t) \subset \Omega$ *на интервале* $\mathcal{J}$: $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. *Тогда множество достижимости* $K(t_1)$ *является компактным, выпуклым, и непрерывно меняется по* t_1 *при* $t_1 \geqslant t_0$. *Более того, если множество* Ω *заменить его выпуклой оболочкой* $H(\Omega)$ *и через* $K_H(t_1)$ *обозначить соответствующее множество достижимости для управлений* $u(t) \subset H(\Omega)$ *на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *то*

$$K(t_1) = K_H(t_1).$$

Доказательство. Используя, как и при доказательстве теоремы 3, результат Ляпунова, легко показать, что множество $K(t_1)$ выпукло.

Формула вариации произвольных постоянных для управления $u(t) \subset \Omega$ и соответствующего ему решения $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,[B(s)u(s) + v(s)]\,ds.$$

Поскольку Ω есть компакт, матричная функция $\Phi(t)$ непрерывна на $\mathcal{J}$, а $B(t)$ и $v(t)$ интегрируемы на $\mathcal{J}$, то ясно, что множество $K(t_1)$ ограничено. Следовательно, замыкание $\overline{K(t_1)}$ является компактным выпуклым множеством в R^n. Мы покажем, что $K(t_1) = \overline{K(t_1)}$ или, короче, $K = \overline{K}$.

Пусть P_0 — некоторая точка в $\overline{K}$. Поскольку внутренность $\overline{K}$ совпадает с внутренностью K, то выберем $P_0 \in \partial\overline{K}$. Предположим

сначала, что существует опорная гиперплоскость π к $\overline{K}$, такая, что $\pi \cap \overline{K} = P_0$. Пусть $\eta(t_1)$ — единичный вектор, ортогональный к π и направленный в сторону того полупространства, которое не содержит $\overline{K}$. Рассмотрим сопряженное решение:

$$\eta(t) = \eta_0 \Phi^{-1}(t), \quad \text{где} \quad \eta(t_1) = \eta_0 \Phi^{-1}(t_1).$$

Тогда в силу лемм 2А и 3А существует управление $\hat{u}(t) \subset \Omega$, для которого

$$\eta(t) B(t) \hat{u}(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) B(t) u \equiv m(t).$$

Для соответствующего ему решения $\hat{x}(t)$ в R^n имеем

$$\eta(t_1) \hat{x}(t_1) = \max_{x \in K} \eta(t_1) x = \max_{x \in \overline{K}} \eta(t_1) x.$$

Таким образом, $\hat{x}(t_1) \in \pi \cap \overline{K}$ и $\hat{x}(t_1) = P_0 \in K$.

В случае, если точка $P_0 \in \partial\overline{K}$ не является единственной точкой пересечения опорной гиперплоскости с $\overline{K}$, следует выбрать опорную гиперплоскость π так, чтобы пересечение $\pi \cap \overline{K}$ было компактным выпуклым множеством S_1 наименьшей возможной размерности. Мы покажем, что $S_1 \subset K$, если S_1 представляет собой отрезок прямой, и укажем, как изменить рассуждение в случае более высокой размерности.

Определим $\eta(t)$ для гиперплоскости π так же, как и раньше. Для каждого $t \in \mathcal{I}$ рассмотрим компактное подмножество Ω_t в Ω, такое, что

$$\eta(t) B(t) u = m(t).$$

Управление $u(t)$ переводит систему из точки x_0 в некоторую точку отрезка S_1 тогда и только тогда, когда $u(t) \subset \Omega_t$ почти всюду.

Пусть $\eta_1(t_1)$ — внешняя нормаль к S_1 в его крайней точке P_1. Определим соответствующее сопряженное решение $\eta_1(t)$ и пусть

$$m_1(t) = \max_{u \in \Omega_t} \eta_1(t) B(t) u.$$

Тогда, используя небольшое обобщение лемм 2А и 3А, покажем, что $m_1(t)$ — измеримая функция, и что существует измеримое управление

$$\hat{u}_1(t) \subset \Omega_t$$

такое, что

$$\eta_1(t) B(t) \hat{u}_1(t) = m_1(t).$$

Мы докажем, что $\hat{u}_1(t)$ переводит систему из точки x_0 в крайнюю точку P_1 отрезка S_1.

Поскольку $P_1 \in \overline{K}$, то существует последовательность управлений $u_j(t) \subset \Omega$ с решениями $x_j(t)$ такими, что

$$\lim_{j\to\infty} x_j(t_1) = P_1.$$

Так как

$$\eta(t_1)\, x_j(t_1) \longrightarrow \eta(t_1)\, P_1 = \eta(t_1)\, P_0,$$

то

$$\lim_{j\to\infty} \eta(t)\, B(t)\, u_j(t) = m(t) \quad \text{по мере,}$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $\mathcal{I}$ меры ε, вне которого

$$|\, m(t) - \eta(t)\, B(t)\, u_j(t)\,| < \varepsilon$$

для всех достаточно больших j. Для каждого $\varepsilon > 0$ положим

$$m_\varepsilon(t) = \max_{u \in \Omega_{t,\,\varepsilon}} \eta_1(t)\, B(t)\, u,$$

где под $\Omega_{t,\,\varepsilon}$ понимается подмножество в Ω, на котором $\eta(t)\, B(t) u \geqslant \geqslant m(t) - \varepsilon$. Заметим, что множество $\Omega_{t,\,\varepsilon}$ компактно и $m_\varepsilon(t)$ — измеримая функция. Кроме того, для каждого $t \in \mathcal{I}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_{t,\,\varepsilon} = \Omega_t, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon(t) = m(t),$$

причем обе последовательности являются невозрастающими. Иначе говоря, если управление $u(t)$ переводит систему из x_0 в некоторую точку вблизи S_1 в $\overline{K}$, то оно должно лежать в $\Omega_{t,\,\varepsilon}$ всегда, за исключением, быть может, некоторого малого промежутка времени.

Выберем малое $\varepsilon > 0$. Тогда для достаточно больших j имеем

$$u_j(t) \subset \Omega_{t,\,\varepsilon}$$

на $\mathcal{I}$, за исключением, быть может, его некоторого подмножества меры ε. Поскольку $\pi \cap \overline{K} = S_1$,

$$\lim_{j\to\infty} \eta_1(t_1)\, x_j(t_1) = \lim_{j\to\infty} \sup_{x} \eta_1(t)\, x = \eta_1(t_1)\, P_1,$$

где верхняя грань берется по всем $x \in \overline{K}$ таким, что

$$\eta(t_1)\, x \geqslant \eta(t_1)\, P_0 - \frac{1}{j}.$$

Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ существует ε_1 $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon)$ такое, что

$$|\, m_{\varepsilon_1}(t) - \eta_1(t)\, B(t)\, u_j(t)\,| < \varepsilon$$

всюду, кроме множества меры ε, для всех достаточно больших j.

По теореме Егорова

$$\lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon(t) = m_1(t)$$

почти равномерно на $\mathcal{I}$ и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} \eta_1(t) B(t) u_j(t) = m_1(t)$$

в смысле сходимости по мере на $\mathcal{I}$. Отсюда следует, что существует последовательность, которую мы снова будем обозначать $u_j(t)$, такая, что почти в каждой точке $t \in \mathcal{I}$

$$\lim_{j\to\infty} \eta(t) B(t) u_j(t) = m(t) = \eta(t) B(t) \hat{u}_1(t),$$
$$\lim_{j\to\infty} \eta_1(t) B(t) u_j(t) = m_1(t) = \eta_1(t) B(t) \hat{u}_1(t).$$

Поскольку управление $u_j(t)$ переводит систему из точки x_0 в точку $x_j(t_1) \longrightarrow P_1$, то предельное управление $\hat{u}_1(t)$ переводит систему из x_0 в P_1, и значит, $P_1 \in K$. Таким же образом можно построить управление $\hat{u}_2(t) \in \Omega$, переводящее систему из x_0 в другой конец P_2 отрезка S_1. Поскольку множество K выпукло, то весь отрезок $S_1 \subset K$.

Если же $P_0 \in \partial \overline{K}$ не лежит ни на какой опорной гиперплоскости, пересекающейся с $\overline{K}$ по отрезку прямой, то выберем такую опорную гиперплоскость π в P_0, чтобы пересечение $\pi \cap \overline{K}$ было компактным выпуклым множеством S наименьшей возможной размерности. Если S имеет размерность два, то рассмотрим границу S относительно плоскости $L(S)$, натянутой на S. Каждая точка границы может быть отделена опорной прямой к S в плоскости $L(S)$ или же лежит на отрезке, являющемся пересечением S с такой прямой. В любом случае повторение приведенного выше рассуждения показывает, что граница множества S относительно $L(S)$ лежит в K, а значит, и само S принадлежит выпуклому множеству K. Если множество S имеет размерность три или выше, то рассмотрим границу S относительно линейного многообразия $L(S)$, натянутого на S и далее теми же рассуждениями, что и прежде, докажем, что $S \subset K$. Таким образом, каждая точка $P_0 \in \partial \overline{K}$ принадлежит K, и значит, $K = \overline{K}$.

Наконец, покажем, что $K(t_1) = K_H(t_1)$ или $K = K_H$. Оба множества K и K_H выпуклы и компактны, и $K \subset K_H$. Поэтому, если показать, что K плотно в K_H, отсюда будет следовать, что $K = K_H$.

Предположим сначала, что $u_H(t) \subset H(\Omega)$ — ступенчатая функция с конечным числом значений, принимаемых на пересекающихся интервалах $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_s$, покрывающих $\mathcal{I}$. Запишем

$$u_H(t) = u_{H_1} + \ldots + u_{H_s},$$

где u_{H_j} постоянно на j-м интервале $\mathcal{I}_j \subset \mathcal{I}$ и равняется нулю на остальной части $\mathcal{I}$. Управление u_{H_1} может быть представлено на

интервале $\mathcal{I}_1: t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ в виде

$$u_{H_1} = \chi_0 u_{01} + \ldots + \lambda_n u_{n1},$$

т. е. как выпуклая комбинация вектора $u_{01}, \ldots, u_{n1}$ из Ω. В силу выпуклости K существует управление $u_1(t) \subset \Omega$ на $\mathcal{I}_1$, переводящее систему из x_0 в ту же точку $x_H(\tau_1)$, что и u_{H_1}. Теперь возьмем $x_H(\tau_1)$ в качестве начальной точки и воспользуемся управлением u_{H_2} на $\mathcal{I}_2: \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, чтобы найти управление $u_2(t) \subset \Omega$ на $\mathcal{I}_2$, переводящее систему из $x_H(\tau_1)$ в ту же точку, что и управление u_{H_2}. Продолжая этот процесс, построим управление

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \ldots + u_s(t) \subset \Omega,$$

где $u_j(t) \equiv 0$ на $\mathcal{I}_i$ при $i \neq j$, переводящее систему из x_0 в ту же точку $x_H(t_1)$, что и управление $u_H(t)$ на $\mathcal{I}$.

Каждое управление $\tilde{u}(t) \subset H(\Omega)$ на $\mathcal{I}$ непрерывно на замкнутом подмножестве $E \subset \mathcal{I}$ таком, что мера множества $(\mathcal{I} - E)$ сколь угодно мала. Поскольку множество $H(\Omega)$ выпукло, то можно изменить $\tilde{u}(t)$ на открытых интервалах, покрывающих $\mathcal{I} - E$, продолжив $\tilde{u}(t)$ туда линейным образом так, чтобы полученная функция $\bar{u}(t) \subset H(\Omega)$ была непрерывна на $\mathcal{I}$. Затем выберем точки на $\bar{u}(t)$ и построим ступенчатую функцию $u_H(t) \subset H(\Omega)$, равномерно аппроксимирующую $\bar{u}(t)$ всюду, кроме некоторого множества сколь угодно малой меры. Таким образом, решение $x_H(t)$, соответствующее $u_H(t)$, равномерно аппроксимирует решение $\tilde{x}(t)$, соответствующее $\tilde{u}(t)$ на $\mathcal{I}$. Следовательно, K плотно в K_H и $K = K_H$. Теорема доказана.

ГЛАВА 3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

В настоящей главе мы изложим теоретические основы оптимизации систем с интегральным критерием среднеквадратической ошибки (и с некоторыми более общими критериями) на фиксированном отрезке времени. В первой части главы рассматривается лишь критерий среднеквадратической ошибки и применения соответствующей теории. Во второй части вводятся общие выпуклые интегральные критерии и рассматриваются системы, в которых на управляющую функцию наложены дополнительные ограничения. Полученные результаты, а именно, необходимые и достаточные условия оптимального управления, выводятся из геометрических свойств множества достижимости.

3.1. Значение интегрального критерия качества

Интегральный критерий качества используется в тех случаях, когда главным является оценка показателей системы управления в среднем на выбранном промежутке времени, а кратковременными отклонениями от идеала можно пренебречь. Так, например, при построении систем управления часто употребляется критерий минимума среднеквадратической ошибки. Этот критерий достаточно детально изучен, и оптимальное управление определяется как явная функция некоторых линейных параметров управления, зависящих от коэффициентов и начальных условий линейной системы (см. примеры ниже, в разделе 3.3).

Несмотря на то, что системы, рассматриваемые в этой главе, являются линейными, они сыграют важную роль в исследовании нелинейных задач наведения и управления, используемых при полетах в космическом пространстве, в силу того, что уравнения в вариациях, получаемые с помощью линеаризации в окрестности известного решения нелинейной системы, являются линейными уравнениями.

Во многих физических задачах выбор конкретного интегрального критерия качества является достаточно сложной проблемой. На практике, если выбор критерия не очевиден, обычно стараются найти такой критерий, чтобы соответствующее ему оптимальное решение было бы нетрудно построить, и в то же время, чтобы оно служило достаточно близким приближением к идеальному. После того как оптимальное управление построено, необходимо проверить, удовлетворяет ли управляемая таким образом система остальным физическим требованиям. Пока свойства различных оптимальных управлений не изучены более подробно, этот метод аппроксимации и последовательной корректировки является наиболее эффективным. Таким образом, мы видим, что изучение отдельных оптимальных управляемых систем полезно с той точки зрения, что такие исследования можно сформулировать в виде определенных математических задач, решение которых дает различные методы синтеза оптимальных управлений.

3.2. Интегральный квадратичный критерий качества

Оценка качества управляемой системы с помощью интеграла от квадрата ошибки, взятого по фиксированному промежутку времени, дает критерий качества системы, для которого сравнительно легко найти оптимальное управление. Мы начнем с изучения общих свойств линейных управляемых систем этого класса. Будет показано, что оптимальные управления являются экстремальными управлениями, удовлетворяющими принципу максимума, и соответствующими границе множества достижимости (необходимое условие). Будет установлено взаимно однозначное соответствие между такими граничными точками и экстремальными управлениями (достаточное условие). В следующем разделе мы используем развитую здесь общую теорию для решения целого ряда отдельных задач.

В этом разделе будет рассматриваться линейная управляемая система

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные $(n\times n)$- и $(n\times m)$-матрицы на заданном конечном промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть n-мерный вектор состояния системы $x(t)$, имеющий в исходный момент времени заданное значение $x(t_0) = x_0$, под действием m-мерного управляющего вектора $u(t)$ в конечный момент времени T получает значение $x(T)$. Критерий качества управления выражается так:

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [x'(s)W(s)x(s) + u'(s)U(s)u(s)]ds.$$

Здесь $g(x)$ — заданная действительная непрерывная функция на R^n, а $W(s)$ и $U(s)$ — действительные квадратные матрицы, непрерывные и симметричные на интервале $t_0 \leqslant s \leqslant T$. Предполагается также, что матрица $W(s)$ неотрицательно определена, а матрица $U(s)$ положительно определена для всех s, т. е. $W(s) = W'(s) \geqslant 0$ и $U(s) = U'(s) > 0$, так, что $x'(s) W(s) x(s) = \| x(s) \|_W^2 \geqslant 0$ и $u'(s) U(s) u(s) = \| u(s) \|_U^2 > 0$, если $u(s) \neq 0$. Найти оптимальное управление — это значит найти минимум функционала $C(u)$ на множестве всех измеримых управлений $u(s)$, для которых

$$\int_{t_0}^{T} \| u(s) \|_U^2 \, ds < \infty.$$

Ниже в этом разделе мы будем придерживаться указанных сейчас обозначений и предположений. Кроме того, мы можем потребовать, чтобы управление приводило систему в заданное целевое множество в R^n.

Поскольку положительно определенная матрица $U(s)$ непрерывна и ограничена, то легко видеть, что

$$\int_{t_0}^{T} \| u(s) \|_U^2 \, ds < \infty$$

тогда и только тогда, когда вектор-функция $u(t)$ принадлежит гильбертову пространству $L_2(t_0, T)$, т. е.

$$\int_{t_0}^{T} u'(s) u(s) ds = \int_{t_0}^{T} \| u(s) \|^2 \, ds < \infty.$$

Такие допустимые управления всегда интегрируемы, и соответствующие им непрерывные решения $x(t)$ ограничены на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. В силу неотрицательности (полуопределенных) норм

$$x'(s) W(s) x(s) = \| x(s) \|_W^2 \geqslant 0,$$

$$u'(s) U(s) u(s) = \| u(s) \|_U^2 > 0 \text{ при } u(s) \neq 0,$$

можно ожидать, что функционал $C(u)$ имеет минимум, во всяком случае при некоторых ограничениях на $g(x(T))$, обсуждаемых в теореме 2.

Для удобства обозначений положим

$$\overset{0}{x}_u(t) = \int_{t_0}^{t} [\| x_u(s) \|_W^2 + \| u(s) \|_U^2] \, ds$$

и рассмотрим решение $\hat{x}_u(t) = (\overset{0}{x}_u(t), x_u(t))$ в R^{n+1} для каждого управления $u(t)$. Сначала мы рассмотрим случай $g(x) \equiv 0$; при этом

мы убедимся, что полученные результаты являются основой для исследования общего случая.

Определение. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u,$$

с критерием качества

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{T} [\|x(s)\|_W^2 + \|u(s)\|_U^2]\,ds.$$

Множество достижимости $\hat{K} = \hat{K}(T,\ x_0)$ есть совокупность конечных точек траекторий

$$\hat{x}_u(T) = (x_u^0(T),\ x_u(T)) \quad \text{в} \quad R^{n+1},$$

соответствующих всевозможным допустимым управлениям $u(t)$ на $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Всюду в этом разделе через $\hat{K}$ будет обозначаться множество достижимости для системы $(\mathscr{L})$ с критерием качества $C_0(u)$. В силу нелинейности функционала $C_0(u)$ множество $\hat{K}(T,\ x_0)$ существенно зависит от точки x_0. Очевидно, что $\hat{K}$ лежит в полупространстве $x^0 > 0$, за исключением, быть может, одной точки, соответствующей нулевому управлению $u(t) \equiv 0$. Выпуклость множества $\hat{K}$ вытекает из соотношений выпуклости для нормы

$$\begin{aligned}\|\lambda u_1(s) + (1-\lambda)\,u_2(s)\|_U^2 = \lambda^2\|u_1\|_U^2 + 2\lambda(1-\lambda)\,u_1'Uu_2 +{}\\ + (1-\lambda)^2\|u_2\|_U^2 \leqslant \lambda^2\|u_1\|_U^2 + \lambda(1-\lambda)\,[\|u_1\|_U^2 + \|u_2\|_U^2] +{}\\ + (1-\lambda)^2\|u_2\|_U^2 = \lambda\|u_1(s)\|_U^2 + (1-\lambda)\|u_2(s)\|_U^2,\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\|x_{\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2}(s)\|_W^2 \leqslant \lambda\|x_{u_1}(s)\|_W^2 + (1-\lambda)\|xu_2(s)\|_W^2$$

при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Лемма. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u,$$

с критерием качества

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{T} [\|x(s)\|_W^2 + \|u(s)\|_U^2]\,ds$$

и множеством достижимости $\hat{K} \subset R^{n+1}$. *Тогда ортогональная проекция множества* $\hat{K}$ *на гиперплоскость* $x^0 = 0$ *есть линейное многообразие. Кроме того, если точка* $\hat{y} = (y^0,\ y) \in \hat{K}$, *то вся полупрямая* $x^0 \geqslant y^0$, $x = y$ *лежит в* $\hat{K}$.

Доказательство. Формула вариации произвольных постоянных

$$x_u(T) = \Phi(T)\,x_0 + \Phi(T)\int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(s)\,B(s)\,u(s)\,ds,$$

где $\Phi(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = A(t)\,x$ с начальным условием $\Phi(t_0) = I$, показывает, что точки $x_u(T) - \Phi(T)\,x_0$ заполняют все линейное подпространство $x^0 = 0$, когда u пробегает линейное пространство $L_2(t_0, T)$ допустимых управлений.

Пусть теперь управление $\bar{u}(t)$ переводит систему из начального состояния $(0, x_0)$ в точку (y^0, y) из $\hat{K}$. Построим управление $u(t) = \bar{u}(t) + u_\beta(t)$ такое, что

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(s) B(s)\, u_\beta(s)\, ds = 0,$$

$$(2) \qquad \int_{t_0}^{T} \| x_0(s) \|_W^2 + \| u(s) \|_U^2\, ds = y^0 + b$$

для заданного $b \geqslant 0$. Пусть

$$u_\beta^1(s) = X(s, T)\,\beta_1 + X\left(s, \frac{T+t_0}{2}\right)\beta_2 + \ldots + X\left(s, \frac{T+nt_0}{n+1}\right)\beta_{n+1}$$

и

$$u_\beta^j(s) = 0 \quad \text{для} \quad j = 2, 3, \ldots, m \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant s \leqslant T.$$

Здесь функция $X(s, h)$ определяется по формуле

$$X(s, h) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \leqslant h, \\ 0, & \text{если } s > h, \end{cases}$$

а постоянные $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ будут определены ниже.

Для того чтобы выполнялось условие (1), потребуем, чтобы

$$\beta_1 \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(s)\, b_1(s)\, ds + \beta_2 \int_{t_0}^{\frac{T+t_0}{2}} \Phi^{-1}(s) b_1(s)\, ds + \ldots$$

$$\ldots + \beta_{n+1} \int_{t_0}^{\frac{T+nt_0}{n+1}} \Phi^{-1}(s)\, b_1(s)\, ds = 0,$$

где $b_1(s)$ — первый столбец матрицы $B(s)$. Таким образом, условие (1) выполняется, если определить $n+1$ действительных чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ как нетривиальное решение системы n линейных однородных скалярных уравнений. Для каждого действительного $\rho \neq 0$ значения $\rho\beta = (\rho\beta_1, \rho\beta_2, \ldots, \rho\beta_{n+1})$ вместе с

соответствующим управлением

$$u(s)=\bar{u}(s)+u_{\rho\beta}(s)=\bar{u}(s)+\rho u_\beta(s)$$

удовлетворяют условию (1). Выберем теперь $\rho\neq 0$ так, чтобы выполнялось условие (2). Имеем

$$C_0(u)=\int_{t_0}^{T}[\|x_u\|_W^2+\|u\|_U^2]\,ds=\int_{t_0}^{T}[\|x_{\bar{u}+\rho u_\beta}\|_W^2+\|\bar{u}+\rho u_\beta\|_U^2]\,ds.$$

Для краткости положим $x_u(s)=\Phi(s)x_0+P_u(s)$, так что

$$C_0(u)=\int_{t_0}^{T}[\|x_{\bar{u}}+\rho P_{u_\beta}\|_W^2+\|\bar{u}+\rho u_\beta\|_U^2]\,ds=$$
$$=\int_{t_0}^{T}[\|x_{\bar{u}}\|_W^2+\|\bar{u}\|_U^2]\,ds+2\rho\int_{t_0}^{T}[x_{\bar{u}}'WP_{u_\beta}+\bar{u}'Uu_\beta]\,ds+$$
$$+\rho^2\int_{t_0}^{T}[\|P_{u_\beta}\|_W^2+\|u_\beta\|_U^2]\,ds.$$

Поскольку $u_\beta(s)\not\equiv 0$, то коэффициент при ρ^2 положителен, следовательно, выбрав ρ соответствующим образом, мы можем потребовать, чтобы два последних члена равнялись наперед заданному числу $b\geqslant 0$. Тогда

$$C_0(u)=y^0+b.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=A(t)x+B(t)u,$$

с критерием качества

$$C_0(u)=\int_{t_0}^{T}[\|x\|_W^2+\|u\|_U^2]\,ds.$$

Тогда множество достижимости $\hat{K}\subset R^{n+1}$ *выпукло и замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\hat{x}_1=(x_1^0,\ x_1)$ и $\hat{x}_2=(x_2^0,\ x_2)$ две точки в $\hat{K}$, соответствующие управлениям $u_1(s)$ и $u_2(s)$ на интервале $t_0\leqslant s\leqslant T$. Пусть

$$\hat{y}=(y^0,\ y)=\lambda\hat{x}_1+(1-\lambda)\hat{x}_2\quad \text{для}\quad 0<\lambda<1.$$

Для того чтобы доказать выпуклость $\hat{K}$, необходимо построить управление, переводящее систему из $(0,\ x_0)$ в $\hat{y}$. Положим

$$\bar{u}(s)=\lambda u_1(s)+(1-\lambda)u_2(s).$$

Тогда

$$x_{\bar{u}}(s)=\lambda x_1(s)+(1-\lambda)x_2(s),$$

так что

$$x_{\bar{u}}(T)=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=y.$$

В силу выпуклости норм получим

$$x_{\bar{u}}^0(T)=\int_{t_0}^{T}[\|x_{\bar{u}}\|_W^2+\|\bar{u}\|_U^2]\,ds\leqslant\lambda\int_{t_0}^{T}[\|x_1\|_W^2+\|u_1\|_U^2]\,ds+$$
$$+(1-\lambda)\int_{t_0}^{T}[\|x_2\|_W^2+\|u_2\|_U^2]\,ds$$

и

$$x_{\bar{u}}^0(T)\leqslant\lambda x_1^0+(1-\lambda)x_2^0=y^0.$$

Однако $\hat{K}$ содержит всю полупрямую $x^0\geqslant x_{\bar{u}}^0(T)$, $x=y$, и следовательно, содержит $\hat{y}$. Значит, $\hat{K}$ выпукло.

Полезно также показать, что даже в нелинейных координатах $(\sqrt{x^0},\ x^1,\ \ldots,\ x^n)$ в полупространстве $x^0\geqslant 0$ пространства R^{n+1} множество $\hat{K}$ выпукло. Для этого нам потребуется построить управление, переводящее систему из точки $(0,\ x_0)$ в точку

$$\hat{z}=(z^0,\ z)=\lambda\left(\sqrt{x_1^0},\ x_1\right)+(1-\lambda)\left(\sqrt{x_2^0},\ x_2\right).$$

Снова получаем, что управление

$$\bar{u}(s)=\lambda u_1(s)+(1-\lambda)u_2(s)$$

переводит систему из состояния x_0 в состояние

$$x_{\bar{u}}(T)=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=z.$$

Введем теперь обозначение

$$\xi(s)=\begin{pmatrix}x(s)\\ u(s)\end{pmatrix},\quad V(s)=\begin{pmatrix}W(s) & 0\\ 0 & U(s)\end{pmatrix}$$

и определим норму

$$|||\xi|||^2=\int_{t_0}^{T}\|\xi(s)\|_V^2\,ds.$$

Тогда из неравенства треугольника

$$|||\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2|||\leqslant\lambda|||\xi_1|||+(1-\lambda)|||\xi_2|||$$

следует, что

$$\sqrt{x_{\bar{u}}^0(T)}\leqslant\lambda\sqrt{x_1^0}+(1-\lambda)\sqrt{x_2^0}=z^0,$$

По предыдущей лемме точка $\hat{z}$ вновь принадлежит $\hat{K}$ и, значит, множество $\hat{K}$ является выпуклым и относительно координат $(\sqrt{x^0}, x^1, \ldots, x^n)$. В дальнейшем мы используем координаты $(\sqrt{x^0}, x^1, \ldots, x^n)$ в $x^0 \geqslant 0$; множество $\hat{K}$ замкнуто по отношению к этим координатам тогда и только тогда, когда оно замкнуто в обычных координатах $(x^0, \ldots, x^n)$. Мы будем считать также, что множество $\hat{K}$ имеет непустую внутренность; в противном случае все дальнейшие построения можно проводить внутри линейного многообразия, натянутого на $\hat{K}$.

Как показывает лемма, каждая граничная точка $\hat{p} = (\sqrt{p^0}, p)$ множества $\bar{\hat{K}}$ имеет опорную гиперплоскость с внешней нормалью, направленной в сторону гиперплоскости $x^0 = 0$. Следовательно, существует точка $\hat{q} = (0, q)$ такая, что $\hat{p}$ — единственная точка в $\bar{\hat{K}}$, ближайшая к $\hat{q}$. Точнее, $\hat{p}$ определяется как единственная точка из $\bar{\hat{K}}$, удовлетворяющая условию

$$|p^0| + \|p - q\|^2 = \inf_{\hat{r} \in K} \{|r^0| + \|r - q\|^2\}.$$

Мы закончим доказательство теоремы, показав, что для каждой заданной точки $(0, q)$ существует точка $\hat{p}$ в $\hat{K}$, удовлетворяющая этому условию. Рассмотрим последовательность управлений $u_i(s)$ таких, что

$$\lim_{i \to \infty} \left\{ \int_{t_0}^{T} [\|x_i(s)\|_W^2 + \|u_i(s)\|_U^2]\, ds + \|x_i(T) - q\|^2 \right\} = \alpha,$$

где

$$\alpha = \inf_{\hat{r} \in \hat{K}} \{|r^0| + \|r - q\|^2\}.$$

Для каждого управления $u_i(s)$ запишем решение

$$x_i(s) = H_i(s) + P_i(s),$$

где

$$H(s) = \Phi(s)\, x_0, \quad P_i(s) = \Phi(s) \int_{t_0}^{s} \Phi^{-1}(\sigma) B(\sigma)\, u_i(\sigma)\, d\sigma,$$

и определим функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} [\|x(s)\|_W^2 + \|u(s)\|_U^2]\, ds + \|x(T) - q\|^2 -$$
$$- \int_{t_0}^{T} \|H(s)\|_W^2\, ds - \|H(T) - q\|^2$$

или

$$J(u) = 2P'(T)(H(T)-q) + \|P(T)\|^2 + \\ + \int_{t_0}^{T} [\|P(s)\|_W^2 + 2H'(s)W(s)P(s) + \|u(s)\|_U^2]\,ds.$$

Непосредственным вычислением находим

$$J\left(\frac{u_i-u_j}{2}\right) + J\left(\frac{u_i+u_j}{2}\right) = \frac{1}{2}J(u_i) + \frac{1}{2}J(u_j) + \\ + (H(T)-q)'(P_i(T)-P_j(T)) + \int_{t_0}^{T} H'(s)W(s)(P_i(s)-P_j(s))\,ds.$$

Далее имеем

$$\frac{1}{2}\left[J(u_i) + J(u_j) - 2J\left(\frac{u_i+u_j}{2}\right)\right] = \\ = J\left(\frac{u_i-u_j}{2}\right) - (H(T)-q)'(P_i(T)-P_j(T)) - \\ - \int_{t_0}^{T} H'(s)W(s)(P_i(s)-P_j(s))\,ds = \\ = \left\|\frac{P_i(T)-P_j(T)}{2}\right\|^2 + \int_{t_0}^{T}\left[\left\|\frac{P_i(s)-P_j(s)}{2}\right\|_W^2 + \left\|\frac{u_i(s)-u_j(s)}{2}\right\|_U^2\right]ds$$

Теперь $J(u_i) \longrightarrow \inf\limits_u J(u) = \beta$ и $J\left(\frac{u_i+u_j}{2}\right) \geqslant \beta$, так что

$$\frac{1}{2}[J(u_i) + J(u_j) - 2\beta] \geqslant \left\|\frac{P_i(T)-P_j(T)}{2}\right\|^2 + \\ + \int_{t_0}^{T}\left[\left\|\frac{P_i(s)-P_j(s)}{2}\right\|_W^2 + \left\|\frac{u_i(s)-u_j(s)}{2}\right\|_U^2\right]ds;$$

так как левая часть $J(u_i) + J(u_j) - 2\beta$ положительна и стремится к нулю при $i,\ j \longrightarrow \infty$, то

$$\lim_{i,\ j \to \infty} \int_{t_0}^{T} \|u_i(s) - u_j(s)\|_U^2\,ds = 0.$$

По теореме Рисса—Фишера последовательность $\{u_i\}$ сходится в $L_2(t_0,\ T)$ к некоторому предельному управлению $u^*(s)$ с соответствующим решением $x^*(s)$. Таким образом,

$$\int_{t_0}^{T} [\|x^*(s)\|_W^2 + \|u^*(s)\|]_U^2\,ds + \|x^*(T)-q\|^2 = \alpha,$$

и следовательно, точка $(\sqrt{p^0},\ p) = (\sqrt{x^{0*}(T)}, x^*(T))$ принадлежит. $\hat{K}$ Поэтому $\hat{K} = \bar{\hat{K}}$ и множество $\hat{K}$ замкнуто. Теорема доказана.

Управляемой системе в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

можно поставить в соответствие критерий качества

$$\tilde{C}_0(u) = \left[\int_{t_0}^{T} [\|x\|_W^2 + \|u\|_U^2]\, ds\right]^{1/2}$$

и определить, таким образом, соответствующее множество достижимости $\tilde{K} \subset R^{n+1}$, состоящее из всех точек $(\tilde{C}(u),\ x(T))$. Отметим, что доказательство приведенного ниже следствия содержится в доказательстве теоремы 1.

Следствие. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$\tilde{C}_0 u = \left[\int_{t_0}^{T} [\|x\|_W^2 + \|u\|_U^2]\, ds\right]^{1/2}.$$

Тогда соответствующее множество достижимости $\tilde{K} \subset R^{n+1}$ *выпукло и замкнуто.*

Аналог следующей теоремы существования, а также и другие результаты этой главы, верны как для критерия $g(x(T)) + \tilde{C}_0(u)$, так и для $g(x(T)) + C_0(u)$, однако мы будем проводить все доказательства лишь для критерия второго типа, оставив первый для самостоятельных упражнений.

Теорема 2. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [\|x\|_W^2 + \|u\|_U^2]\, ds.$$

Если либо

a) $g(x) > a$, *т. е. функция* $g(x)$ *ограничена снизу, либо*

b) $g(\lambda x_1 + (1+\lambda)x_2) \leqslant \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$, $\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, *т. е.* $g(x)$ *есть выпуклая функция,*

то существует оптимальное управление, минимизирующее наш критерий.

Доказательство. Рассмотрим множество достижимости $\hat{K} \subset R^{n+1}$, соответствующее управляемой системе $\mathscr{L}$ с критерием качества (который рассматривается как дополнительная

координата) $x^0(T)=\int\limits_{t_0}^{T}\left[\|x\|_W^2+\|u\|_U^2\right]ds$. Тогда по теореме 1 множество $\hat{K}$ выпукло и замкнуто. Поскольку каждое приемлемое управление $u(t)$ определяет точку $(x_u^0(T),\ x_u(T))\in\hat{K}$, то нужно лишь показать, что минимум действительной функции $g(x)+x^0$ достигается в $\hat{K}$ (рис. 3.1).

Если $g(x)>a$, то

$$\lim_{x^0\to\infty}[g(x)+x^0]=+\infty$$

равномерно на $\hat{K}$. Таким образом, существует число $\alpha>0$, такое, что минимум $[g(x)+x^0]$ на $\hat{K}$ достигается на компактном множестве $\hat{K}\cap[x^0\leqslant\alpha]$.

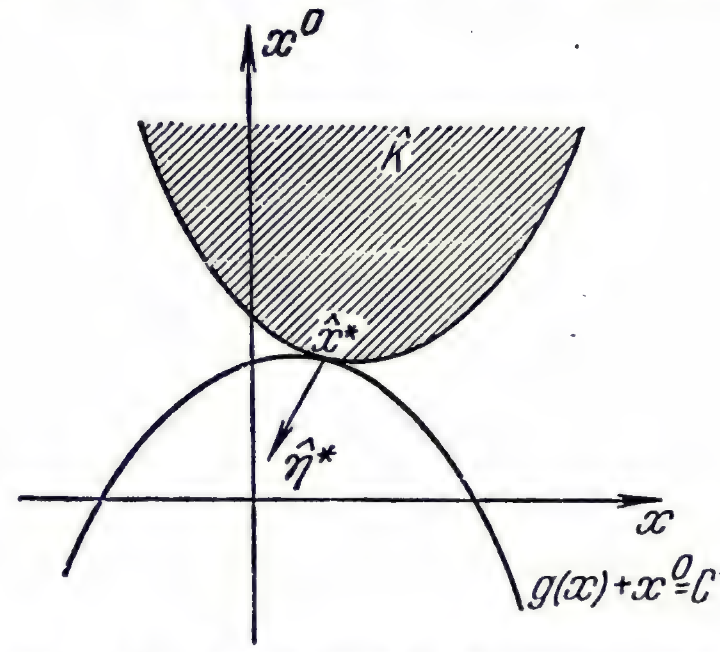

Рис. 3.1. Оптимальное решение, лежащее в выпуклой области достижимости.

Предположим теперь, что $g(x)$ выпуклая функция. Для любого действительного числа c_1 подмножество в R^{n+1}, для которого

$$g(x)+x^0\leqslant c_1,$$

является замкнутым и имеет непустую внутренность. Кроме того, это множество выпукло, поскольку из неравенства

$$g(x_1)+x_1^0\leqslant c_1 \quad \text{и} \quad g(x_2)+x_2^0\leqslant c_1$$

следует, что

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+\lambda x_1^0+(1-\lambda)x_2^0\leqslant c_1.$$

Рассмотрим постоянное число c_1 такое, что соответствующее ему множество пересекается с $\hat{K}$, и докажем, что это пересечение ограничено, и следовательно, компактно. Из этого утверждения будет непосредственно следовать существование оптимального управления.

Пусть π — гиперплоскость в R^{n+1}, такая, что $g(x)+x_0\leqslant c_1$ для точек $(x^0,\ x)$, лежащих ниже π; например, можно взять гиперплоскость, опорную к этому выпуклому множеству. Мы покажем, что для точек $(x^0,\ x)\in\hat{K}$ с достаточно большими $|x|$ выполняется неравенство $x^0>k|x|$ для заданного постоянного $k>0$. Такие точки $(x^0,\ x)$ из $\hat{K}$ должны лежать выше π, а значит, удовлетворяют неравенству $g(x)+x^0>c_1$. Установив это, мы получим требуемую компактность, чем и завершим доказательство теоремы. Для точек $(x^0,\ x)$ из $\hat{K}$ имеем

$$|x(T)|\leqslant|\Phi(T)x_0|+\int\limits_{t_0}^{T}|\Phi(T)\Phi^{-1}(s)B(s)||u(s)|\,ds.$$

Если $|x(T)| \geqslant 2|\Phi(T)x_0|$ и

$$|\Phi(T)\Phi^{-1}(s)B(s)| \leqslant M \qquad (t_0 \leqslant s \leqslant T),$$

то

$$\int_{t_0}^{T} |u(s)|\,ds \geqslant \frac{1}{2M}|x(T)|.$$

Пользуясь неравенством Шварца, получаем

$$\int_{t_0}^{T} |u(s)|\,ds \leqslant c_2 \left[\int_{t_0}^{T} \|u(s)\|^2\,ds\right]^{1/2}$$

для постоянного $c_2 > 0$. Таким образом, если $|x(T)| \geqslant 2|\Phi(T)x_0|$, то

$$|x(T)|^2 \leqslant 4M^2c_2^2 \int_{t_0}^{T} \|u(s)\|^2\,ds \leqslant c_3 x^0(T).$$

Следовательно, для достаточно больших $|x(T)|$ имеем

$$x^0(T) \geqslant k|x(T)|$$

и точки $(x^0(T),\ x(T))$ из $\hat{K}$ лежат выше гиперплоскости π. Отсюда следует, что замкнутое пересечение множеств

$$g(x) + x^0 \leqslant c_1 \text{ и } \hat{K}$$

ограничено, а значит, компактно. Теорема существования доказана.

Поскольку действительная функция $g(x)+x^0$ монотонно убывает с убыванием x^0, то оптимальное управление должно переводить систему в точку, лежащую на границе $\hat{K}$ в R^{n+1}. На самом деле мы рассматриваем выпуклое множество $\hat{K}$ внутри линейного многообразия $L(\hat{K})$, натянутого на это множество; оптимальное управление должно переводить систему в точку, лежащую на границе $\hat{K}$ относительно $L(\hat{K})$. Таким образом, наиболее важное значение имеют те управления, которые переводят систему в точки, лежащие на границе $\hat{K}$ относительно $L(\hat{K})$.

Определение. Рассмотрим управляемую систему в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с множеством достижимости $\hat{K} \subset R^{n+1}$, соответствующим критерию качества $C_0(u)$. Управление $\bar{u}(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, переводящее систему из точки $(0,\ x_0)$ в некоторую граничную точку множества $\hat{K}$ (относительно линейного многообразия $L(\hat{K})$), называется *экстремальным управлением*, а соответствующая ему траектория — экстремальной *траекторией*.

Следующая теорема, которая является выражением принципа максимума для рассматриваемой нами задачи, утверждает, что выражение

$$\eta_0 \| u \|_U^2 + \eta(t) B(t) u$$

достигает максимального значения при $u = \bar{u}(t)$, где $\bar{u}(t)$ — некоторое экстремальное управление. Здесь $\hat{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$ представляет собой $(n+1)$-мерный вектор-строку с постоянной компонентой $\eta_0 < 0$. Поскольку

$$\| u \|_U^2 - \frac{\eta}{|\eta_0|} Bu = \left\| u - \frac{U^{-1}B'\eta'}{2|\eta_0|} \right\|_U^2 - \left\| \frac{U^{-1}B'\eta'}{2|\eta_0|} \right\|_U^2,$$

то максимум выражения $\eta_0 \| u \|_U^2 + \eta B u$ достигается лишь при

$$u(t) = -\frac{U^{-(t^1)}B'(t)\eta'(t)}{2|\eta_0|}.$$

Теорема 3. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u.$$

Управление $\bar{u}(t)$ *с соответствующим решением* $\bar{x}(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, *является экстремальным в том и только том случае, когда существует* $(n+1)$-*мерный вектор* $\hat{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$, *удовлетворяющий уравнению*

$$\dot{\eta} = -2\eta_0 \bar{x}'(t) W(t) - \eta A(t), \text{ где постоянная } \eta_0 < 0,$$

такой, что

$$\eta_0 \| \bar{u}(t) \|_U^2 + \eta(t) B(t) \bar{u}(t) = \max_{u \in R^m} \{\eta_0 \| u \|_U^2 + \eta(t) B(t) u\}$$

или

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{2\eta_0} U^{-1}(t) B'(t) \eta'(t) \quad \textit{почти всюду.}$$

Доказательство. Пусть $\bar{x}(t)$ — решение, соответствующее управлению

$$\bar{u}(t) = -\frac{1}{2\eta_0} U^{-1}(t) B'(t) \eta'(t),$$

где $\hat{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$ — вектор, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\dot{\eta} = -2\eta_0 \bar{x}'(t) W(t) - \eta A(t),$$

а постоянная $\eta_0 < 0$. Поскольку в предположениях теоремы участвует, по существу, лишь отношение η/η_0, то для удобства изложения можно выбрать $\eta_0 = -1/2$. Мы докажем, что

$$\hat{\eta}(T) \hat{x}(T) > \hat{\eta}(T) \hat{\omega}$$

для всех точек $\hat{\omega} = (\omega^0, \omega)$ из $\hat{K}$, отличных от $\hat{x}(T) = (\bar{x}^0(T),$

$x(T)$). Из этого неравенства мы заключим, что $\hat{x}(T)$ лежит на границе (относительной) множества $\hat{K}$. Здесь $\hat{\omega}(t)$ есть общее решение, соответствующее управлению $u(t)$, и определенное равенствами

$$\omega^0(t)=\int_{t_0}^{t}[\|\omega(s)\|_W^2+\|u(s)\|_U^2]ds,$$

$$\omega(t)=\Phi(t)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)\,ds.$$

Имеем

$$\frac{d}{dt}(\hat{\eta}(t)\hat{\omega}(t))=-\frac{1}{2}\dot{\omega}^0+\dot{\eta}\omega+\eta\dot{\omega}=$$
$$=-\frac{1}{2}[\|\omega\|_W^2+\|u\|_U^2]+\bar{x}'W\omega-\eta A\omega+\eta A\omega+\eta Bu.$$

Интегрирование от t_0 до t дает

$$-\frac{1}{2}\omega^0(t)+\eta(t)\omega(t)-\eta(t_0)x_0=$$
$$=\int_{t_0}^{t}\left\{-\frac{1}{2}[\|\omega\|_W^2+\|u\|_U^2]+[\omega'W(s)\bar{x}(s)+\eta B(s)u(s)]\right\}ds.$$

Для случая, когда $u(s)=\bar{u}(s)=U^{-1}(s)B'(s)\eta'(s)$ и $\hat{\omega}(s)=\hat{x}(s)$, это выражение имеет более простой вид:

$$-\frac{1}{2}\bar{x}^0(t)+\eta(t)\bar{x}(t)-\eta(t_0)x_0=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[\|\bar{x}(s)\|_W^2+\|\eta'(s)\|_{BU^{-1}B'}^2]\,ds.$$

Очевидно, что выражение $-\frac{1}{2}\|u\|_U^2+\eta Bu$ достигает максимума лишь при

$$u=U^{-1}(s)B'(s)\eta'(s).$$

Значит, если $u(s)\neq\bar{u}(s)$, то

$$-\frac{1}{2}\|u(s)\|_U^2+\eta B(s)u(s)<\frac{1}{2}\|\eta'(s)\|_{BU^{-1}B'}^2.$$

Далее, из неравенства $\|\bar{x}(s)-\omega(s)\|_W^2\geqslant 0$ следует, что

$$\frac{1}{2}\|\bar{x}(s)\|_W^2\geqslant\omega'W(s)\bar{x}-\frac{1}{2}\|\omega(s)\|_W^2.$$

Таким образом, если почти всюду на $0\leqslant t\leqslant T$ не выполняется равенство $u(t)=\bar{u}(t)$, то

$$-\frac{1}{2}\bar{x}^0(t)+\eta(t)\bar{x}(t)-\eta(t_0)x_0>-\frac{1}{2}\omega^0(t)+\eta(t)\omega(t)-\eta(t_0)x_0.$$

Следовательно,

$$\hat{\eta}(T)\,\hat{x}(T) > \hat{\eta}(T)\,\hat{\omega}(T)$$

для всех $\hat{\omega}(T) \neq \hat{x}(T)$ из $\hat{K}$. Но это неравенство означает, что существует гиперплоскость, опорная к $\hat{K}$ в точке $\hat{x}(T)$ с внешней нормалью $\hat{\eta}(T)$. Поскольку $\eta_0 < 0$, то опорная гиперплоскость не может пересекаться с множеством $\hat{K}$ по его внутренним точкам, а может пересекать $\hat{K}$ лишь по граничным точкам (относительным). Таким образом, управление $\bar{u}(t)$ и решение $\bar{x}(t)$ экстремальны.

Обратно, предположим, что управление $\bar{u}(t)$ порождает траекторию $\hat{x}(t) = (\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$, ведущую в точку $\hat{x}(T) \in \partial\hat{K}$. Пусть $\hat{\eta}(T) = \left(-\frac{1}{2}, \bar{\eta}(T)\right)$ — внешняя нормаль к $\hat{K}$ в точке $\hat{x}(T)$; определим $\bar{\eta}(t)$ как решение сопряженной системы

$$\dot{\eta} = \bar{x}'(t)\,W(t) - \eta A(t).$$

Мы должны показать, что $\bar{u}(t) = U^{-1}(t)\,B'(t)\,\bar{\eta}(t)$ почти всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Предположим, что $\bar{u}(t)$ не удовлетворяет принципу максимума на некотором подмножестве Δ — интервале ненулевой длины [можно считать подмножество Δ компактным, а управление $\bar{u}(t)$ ограниченным на Δ], где $-\frac{1}{2}\|\bar{u}\|_U^2 + \bar{\eta}(t)\,B(t)\,\bar{u}(t) + \delta \leqslant \max\limits_u \left[-\frac{1}{2}\|u\|_U^2 + \bar{\eta}(t)\,B(t)\,u\right]$ для некоторого $\delta > 0$. Для каждого малого $\varepsilon > 0$ определим возмущенное управление

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} U^{-1}(t)\,B'(t)\,\bar{\eta}(t) & \text{на подмножестве } \Delta_\varepsilon \text{ меры } \varepsilon \text{ из } \Delta, \\ \bar{u}(t) & \text{на остальной части } t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Пусть соответствующим решением будет $\hat{x}_\varepsilon(t)$ так, что

$$|\hat{x}_\varepsilon(t) - \hat{x}(t)| \leqslant c_1\varepsilon \text{ для некоторой постоянной } c_1.$$

Как и выше, получим

$$\hat{\eta}(T)\,\hat{x}(T) - \hat{\eta}(T)\,\hat{x}_\varepsilon(T) \leqslant \int_{t_0}^{T} \frac{1}{2}\|\bar{x} - x_\varepsilon\|_W^2\,dt - \int_{\Delta_\varepsilon} \delta\,dt \leqslant c_2\varepsilon^2 - \delta\varepsilon$$

для постоянной c_2. Таким образом, для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\hat{\eta}(T)\,\hat{x}_\varepsilon(T) > \hat{\eta}(T)\,\hat{x}(T),$$

что невозможно, если $\hat{\eta}(T)$ есть внешняя нормаль к $\hat{K}$ в точке $\hat{x}(T)$. Следовательно, $\bar{u}(t)$ должно удовлетворять принципу максимума. Теорема доказана.

В теореме 3 утверждается, что управление $\bar{u}(t)$ является экстремальным тогда и только тогда, когда оно максимально (в смысле главы 1). Поэтому мы в дальнейшем не будем пользоваться термином «максимальное управление».

Следствие. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} \left[\| x(s) \|_W^2 + \| u(s) \|_U^2 \right] ds.$$

Пусть $u^*(t)$ — *оптимальное управление с соответствующим решением* $x^*(t)$ *на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant T$. *Тогда* $u^*(t)$ *является экстремальным управлением, т. е. существует n-мерный вектор* $\eta(t)$, *удовлетворяющий уравнению*

$$\dot{\eta} = x^{*\prime}(t) W(t) - \eta A(t),$$

такой, что

$$u^*(t) = U^{-1}(t) B'(t) \eta'(t) \quad \text{почти всюду.}$$

Условия нормальности, которые обеспечивают единственность экстремального управления, переводящего систему из точки $(0, x_0)$ в граничную точку множества $\hat{K}$, для наших систем, линейных, с интегральным квадратическим критерием качества, выполняются автоматически. Таким образом, максимальное условие теоремы 3 является как необходимым, так и достаточным условием оптимальности данного управления. В теореме 4 мы докажем эту единственность, а в теореме 5 и в примерах следующего раздела будем применять доказанные свойства к построению оптимальных управлений.

Теорема 4. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с множеством достижимости $\hat{K} \subset R^{n+1}$, *соответствующим критерию качества* $C_0(u)$. *Пусть* $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$ — *экстремальные управления с соответствующими решениями* $\hat{x}_1(t)$ *и* $\hat{x}_2(t)$ *в* R^{n+1} *на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant T$. *Если*

$$\hat{x}_1(T) = \hat{x}_2(T), \quad \text{то} \quad u_1(t) = u_2(t) \quad \text{почти всюду.}$$

Доказательство. Пусть $\hat{\eta}(T) = \left(-\frac{1}{2}, \eta(T)\right)$ есть внешняя нормаль к $\hat{K}$ в точке $\hat{x}_1(T) = \hat{x}_1(T)$ и пусть $\eta(t)$ — соответствующее решение уравнения

$$\dot{\eta} = x_1'(t) W(t) - \eta A(t)$$

Тогда, как показано в теореме 3,

$$u_1(t) = u_2(t) = U^{-1}(t) B'(t) \eta'(t) \text{ почти всюду.}$$

Действительно, в противном случае число $\hat{\eta}(T)\hat{x}_1(T) = \hat{\eta}(T)\hat{x}_2(T)$ было бы меньше, чем $\hat{\eta}(T)\hat{\omega}$ для некоторого $\hat{\omega} \in \hat{K}$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Рассмотрим управляемую систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} \left[\|x\|_W^2 + \|u\|_U^2\right] ds = g(x(T)) + C_0(u),$$

где $g(x)$ — некоторая выпуклая функция из C^1. Тогда существует единственная гиперповерхность S_m из семейства

$$S_c\colon\ g(x) + x^0 = c,$$

касательная к $\hat{K}$; следовательно, m есть оптимальное значение критерия качества. Кроме того, существует единственное экстремальное управление, а именно, оптимальное управление $u^*(t)$, с помощью которого достигается та единственная точка, где S_m касается $\hat{K}$.

Далее, система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)U^{-1}(t)B'(t)\eta', \\ \dot{\eta} &= x'W(t) - \eta A(t) \end{aligned}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{и} \quad \eta(T) = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} g(x(T)),$$

а именно, оптимальное решение $x^*(t)$ и $\eta^*(t)$ такое, что управление

$$u^*(t) = U^{-1}(t) B'(t) \eta^{*\prime}(t)$$

является оптимальным на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Прежде всего мы покажем, что имеется единственное постоянное m такое, что S_m касается $\hat{K}$ [множества достижимости, соответствующего критерию $C_0(u)$], т. е. выпуклое множество $g(x) + x^0 \leqslant m$ пересекается с $\hat{K}$, но отделяется от его относительной внутренности общей опорной гиперплоскостью π^*, касательной к S_m. Отсюда будет следовать, что m есть минимальное значение критерия. По теореме 2 пересечение множества $\hat{K}$ с совокупностью точек, удовлетворяющих неравенству $g(x) + x^0 \leqslant c$, является компактным множеством для всех достаточно больших c.

Поэтому мы определим m как нижнюю грань всех таких чисел c, для которых рассматриваемое пересечение непусто. Для $c > m$ гиперповерхность S_c пересекается с $\hat{K}$ по относительно внутренним точкам множества $\hat{K}$, а для $c < m$ гиперповерхность S_c вовсе не пересекает $\hat{K}$. Таким образом, только при $c = m$ гиперповерхность S_c может лишь касаться $\hat{K}$.

Пусть P — точка, принадлежащая $\hat{K} \cap S_m$ и пусть π^* — касательная гиперплоскость к S_m в точке P. Тогда π^* не будет разделять $\hat{K}$ и S_m лишь в том случае, если π^* пересекает множество $\hat{K}$ по его внутренним точкам. Предположим, однако, что имеется (относительно) открытое множество N внутренних точек в $\hat{K}$, лежащее ниже гиперплоскости π^*. Тогда и весь конус с основанием N и вершиной P лежит ниже π^*, и внутри $\hat{K}$. Однако S_m касается π^* в точке P, так что S_m будет пересекать $\hat{K}$ по внутренним точкам. Но это невозможно по определению m. Следовательно, гиперплоскость π^* разделяет $\hat{K}$ и S_m.

Предположим теперь, что множество $\hat{K} \cap S_m$ содержит две различные точки P_1 и P_2. Тогда и весь отрезок, соединяющий их, лежит в $\hat{K} \cap S_m$, а значит, он входит в относительную границу $\hat{K}$. Рассмотрим экстремальные управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ с решениями $\hat{x}_1(t)$ и $\hat{x}_2(t)$, приводящими в точки P_1 и P_2 соответственно. Заметим, что управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ должны отличаться друг от друга на некотором множестве ненулевой меры из $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим управление $\frac{1}{2}[u_1(t) + u_2(t)]$ с соответствующим решением

$$\hat{x}(t) = (x^0(t),\ x(t)).$$

Здесь

$$x(T) = \frac{1}{2}[x_1(T) + x_2(T)].$$

Однако мы покажем, что

$$x^0(T) < \frac{1}{2}[x_1^0(T) + x_2^0(T)].$$

Имеем

$$x^0(T) = \int_{t_0}^{T} \left[\left\| \frac{x_1(s) + x_2(s)}{2} \right\|_W^2 + \left\| \frac{u_1(s) + u_2(s)}{2} \right\|_U^2 \right] ds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left\{ \frac{1}{4} \| x_1 \|_W^2 + \frac{1}{2} x_1' W(s) x_2 + \frac{1}{4} \| x_2 \|_W^2 + \frac{1}{4} \| u_1 \|_U^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} u_1' U(s) u_2 + \frac{1}{4} \| u_2 \|_U^2 \right\} ds.$$

Используем очевидные неравенства

$$2x_1'(s)\,W(s)\,x_2(s) \leqslant \| x_1(s) \|_W^2 + \| x_2 \|_W^2$$

и

$$2u_1'(s)\,U(s)\,u_2(s) < \| u_1(s) \|_U^2 + \| u_2 \|_U^2,$$

справедливые всюду, где $u_1(s) \neq u_2(s)$. Тогда

$$x^0(T) < \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\| x_1 \|_W^2 + \| u_1 \|_U^2\right] ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\| x_2 \|_W^2 + \| u_2 \|_U^2\right] ds,$$

так что

$$x^0(T) < \frac{1}{2}\left[x_1^0(T) + x_2^0(T)\right], \quad \text{как и утверждалось выше.}$$

Полупрямая $x^0 > x^0(T), x = x(T)$ лежит внутри $\hat{K}$, откуда следует, что и середина отрезка, соединяющего точки P_1 и P_2, лежит внутри $\hat{K}$. Но $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ находится на относительной границе множества $\hat{K}$. Это противоречие доказывает, что множество $\hat{K} \cap S_m$ состоит в точности из одной точки P.

По теореме 4 существует единственное экстремальное управление, переводящее систему из точки $(0, x_0)$ в точку $P \in \hat{K}$, значит, это и есть оптимальное управление $u^*(t)$. Следовательно, точка $P = (x^{0*}(T),\ x^*(T))$ должна быть достигнута при движении по оптимальной траектории $x^*(t)$.

Вектор $\hat{\eta}^*(T) = \left(-\frac{1}{2},\ \eta^*(T)\right)$ является нормальным к S_m в точке $P = \hat{x}^*(T)$, где $\eta^*(T) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad} g(P)$. По теореме 3 функции $x^*(t)$ и $\eta^*(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)\,x + B(t)\,U^{-1}(t)\,B'(t)\,\eta', \\ \dot{\eta} &= x'W(t) - \eta A(t) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$x^*(t_0) = x_0, \quad \eta^*(T) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}\ g(x^*(T)).$$

Пусть теперь $x(t)$, $\eta(t)$ — любое решение этой совместной системы дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Тогда $\hat{x}(t) = (x^0(t),\ x(t))$ есть решение, определяемое экстремальным управлением $u(t) = U^{-1}(t)\,B'(t)\,\eta'(t)$. Более того,

$$\hat{\eta}(T)\,\hat{x}(T) = -\frac{1}{2}x^0(T) + \eta(T)\,x(T) > \hat{\eta}(T)\,\hat{\omega}$$

для всех $\hat{\omega} \neq \hat{x}(T)$ из $\hat{K}$. Таким образом, вектор $\hat{\eta}(T) = \left(-\frac{1}{2}, \eta(T)\right)$

является внешней нормалью к опорной гиперплоскости $\hat{\pi}$ множества $\hat{K}$ в точке $\hat{x}(T)$. Кроме того, $\hat{\eta}(T)$ есть внутренняя нормаль к гиперповерхности S_c в $\hat{x}(T)$, поскольку $\eta(T) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad} g(x\ (T))$. Таким образом, гиперповерхность S_c касается множества $\hat{K}$ в точке $\hat{x}(T)$ и $\hat{\pi}$ есть их общая опорная гиперплоскость. Но тогда $S_c = S_m$ и $\hat{x}(T) = \hat{x}^*(T)$. В силу единственности экстремального управления, переводящего систему из состояния $(0, x_0)$ в состояние $\hat{x}^*(T)$, находим, что $u(t) = u^*(t)$ почти всюду, и значит, $x(t) = x^*(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Итак, окончательно, $\eta(t)$ есть единственное решение уравнения

$$\dot{\eta} = x^{*\prime}(t)\, W(t) - \eta A(t)$$

с

$$\eta(T) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad} g(x^*(T))$$

и, значит,

$$\eta(t) = \eta^*(t) \quad \text{на} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Теорема доказана.

Если нам нужно перевести систему из заданной начальной точки $x_0 \in R^n$ в некоторое желаемое состояние, то естественно потребовать, чтобы система

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\, x + B(t)\, u$$

обладала свойством управляемости. Система $\mathscr{L}$ будет вполне управляемой, если для любой пары точек x_0, $x_1 \in R^n$ существует ограниченное измеримое управление $u(t)$, переводящее систему из точки $x(t_0) = x_0$ в точку $x(T) = x_1$. Случай полной управляемости легче поддается геометрическому анализу, так как тогда множество достижимости $\hat{K}$ имеет непустую внутренность в R^{n+1}, и следовательно, граница множества $\hat{K}$ относительно $L(\hat{K}) = R^{n+1}$ совпадает с обычной границей.

Теорема 6. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\, x + B(t)\, u,$$

с множеством достижимости $\hat{K} \subset R^{n+1}$, *соответствующим критерию качества* $C_0(u)$. *Система* $\mathscr{L}$ *обладает свойством управляемости на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *тогда и только тогда, когда множество* $\hat{K}$ *имеет непустую внутренность в* R^{n+1}, *а это будет в том, и только в том случае, если матрица*

$$M(T) = \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t)\, B(t)\, B'(t)\, (\Phi^{-1}(t))'\, dt$$

невырождена.

Доказательство. Ортогональная проекция множества $\hat{K}$ на подпространство $x^0=0$ представляет собой совокупность всех концов траекторий в R^n:

$$x(T)=\Phi(T)x_0+\Phi(T)\int_{t_0}^{T}\Phi^{-1}(t)B(t)u(t)\,dt.$$

Если система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, то множество всех концов траекторий $\{x(T)\}$ совпадает со всем пространством R^n, и значит, множество $\hat{K}$ имеет непустую внутренность. С другой стороны, если $\hat{K}$ имеет непустую внутренность, то в силу леммы к теореме 1 $\{x(T)\}=R^n$. Но это означает, что множество всех точек вида

$$x_1=\int_{t_0}^{T}\Phi(T)\Phi^{-1}(t)B(t)u(t)\,dt$$

заполняет все пространство. Значит, совокупность всех концов траекторий, начинающихся в произвольной фиксированной точке пространства R^n, совпадает со всем R^n. [Здесь $u(t)$ пробегает пространство L_2, однако, так как измеримые ограниченные функции плотны в L_2, можно считать, что все управления $u(t)$ ограничены]. Таким образом, в этом случае система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости.

Рассмотрим теперь $(n\times n)$-матрицу $M(T)$. Поскольку

$$M'(T)=\int_{t_0}^{T}[\Phi^{-1}(t)B(t)B'(t)(\Phi^{-1}(t))']'\,dt=M(T),$$

а также

$$\zeta'M(T)\zeta=\int_{t_0}^{T}(B'(\Phi^{-1})'\zeta)'(B'(\Phi^{-1})'\zeta)\,dt\geqslant 0$$

для любого n-мерного вектора ζ, то матрица $M(T)$ симметрическая и неотрицательно определенная.

Предположим, что матрица $M(T)$ невырождена, и докажем, что система $\mathscr{L}$ вполне управляема. Для заданных точек x_0 и x_1 определим управление

$$u(t)=B'(t)(\Phi^{-1}(t))'\xi,$$

где постоянный вектор ξ определяется формулой

$$\xi=M^{-1}(T)[\Phi^{-1}(T)x_1-x_0].$$

В этом случае

$$x_1=\Phi(T)x_0+\Phi(T)M(T)\xi$$

или

$$x_1 = \Phi(T)\, x_0 + \Phi(T) \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t)\, B(t)\, u(t)\, dt,$$

что и требуется.

С другой стороны, предположим, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости. Если матрица $M(T)$ вырождена, то существует постоянный вектор $\zeta \neq 0$, такой, что

$$\zeta' M(T)\, \zeta = \int_{t_0}^{T} \| B'(t)\, (\Phi^{-1}(t))'\, \zeta \|^2\, dt = 0.$$

Но это означает, что $B'(t)\,(\Phi^{-1}(t))'\,\zeta \equiv 0$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Поскольку система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, то конечная точка $\Phi(T)\,\zeta$ может быть достигнута системой, исходя из начала координат, с помощью управления $u(t)$ и, значит,

$$\zeta = \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(t)\, B(t)\, u(t)\, dt.$$

Но тогда

$$0 < \zeta'\zeta = \int_{t_0}^{T} \zeta' \Phi^{-1}(t)\, B(t)\, u(t)\, dt = \int_{t_0}^{T} (B'(t)\, (\Phi^{-1}(t))'\zeta)' u(t)\, dt = 0.$$

Это противоречие указывает на то, что $M(T)$ — невырожденная матрица. Теорема доказана.

В частности, если матрица $\Phi^{-1}(t)\, B(t)\, B'(t)\, (\Phi^{-1}(t))'$ невырождена хотя бы в один из моментов t, то матрица $M(T)$ будет невырожденной матрицей, и система $\mathscr{L}$ будет обладать свойством управляемости на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

3.3. Иллюстрирующие примеры и специальные задачи

В этом разделе мы рассмотрим вопросы синтеза управления с обратной связью для различных оптимальных управляемых систем, опираясь на теорию, изложенную в предыдущем разделе. Вначале будут рассматриваться задачи, в которых целевое множество не задано заранее, затем задачи с заданным целевым множеством и, наконец, задачи с неограниченным временем управления.

Критерий качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} \left[\| x(s) \|_W^2 + \| u(s) \|_U^2 \right] ds.$$

Пример 1. $C(u) = x'(T)\, Gx(T) + x^0(T)$, где постоянная симметричная матрица $G = G' \geqslant 0$, т. е. $g(x) = x'Gx$, является неотрицательно определенной квадратичной формой, и значит, выпуклой функцией. По теореме 5 существует единственное оптимально

управление $u^*(t)$ с соответствующим решением $x^*(t)$. Они определяются как единственные решения уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)U^{-1}(t)B'(t)\eta',$$
$$\dot{\eta} = x'W(t) - \eta A(t),$$

удовлетворяющие условиям $x(t_0) = x_0$, $\eta'(T) = -Gx(T)$, где

$$u^*(t) = U^{-1}(t)B'(t)\eta^{*\prime}(t).$$

Оптимальная траектория $\hat{x}^*(t) = (x^{0*}(t),\ x^*(t))$ приводит систему в ту единственную точку, в которой квадратичная поверхность $S_m : x^0 + x'Gx = m$ касается множества $\hat{K}$ (см. рис. 3.1).

В этой задаче можно получить оптимальное управление в явном виде, применив линейную цепь с обратной связью и переменным по времени усилением. Целесообразность такого метода следует из анализа примера **4** первого раздела главы 1.

Мы попытаемся выразить оптимальное управление в виде

$$u^*(t) = E^*(t)x^*(t),$$

где $E^*(t)$ — известная матрица, не зависящая от x_0, а именно, $E^*(t) = U^{-1}(t)B'(t)E(t)$, где $E(t)$ есть решение нелинейного матричного дифференциального уравнения

$$\dot{E}(t) = W(t) - A'(t)E - EA(t) - EB(t)U^{-1}(t)B'(t)E$$

с начальным условием $E(T) = -G$. Поскольку G — симметричная матрица, и матрица $\dot{E}(t)$ также симметрична, как видно из написанного выше выражения для нее, то решение $E(t)$ есть однозначно определенная симметричная матрица.

Мы покажем, что решение $x(t)$ уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)[U^{-1}(t)B'(t)E(t)x], \quad x(t_0) = x_0$$

является оптимальной траекторией $x^*(t)$ и, таким образом, управление

$$u^*(t) = U^{-1}(t)B'(t)E(t)x^*(t)$$

является оптимальным. Пусть $x(t)$ — указанное выше решение; положим $\eta(t) = x'E(t)$. Тогда непосредственным вычислением можно показать, что $(x(t),\ \eta(t))$ есть решение системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)U^{-1}(t)B'(t)\eta',$$
$$\dot{\eta} = x'W(t) - \eta A(t),$$

удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$, $\eta'(T) = -Gx(T)$. Таким образом, $x(t) = x^*(t)$ и $\eta(t) = \eta^*(t)$ в силу свойства единственности, установленного в теореме 5.

Таким образом, управление с обратной связью

$$u^*(t) = E^*(t)x$$

автоматически дает нам оптимальную траекторию $x^*(t)$ для любого начального состояния x_0. Если состояние системы внезапно изменилось в результате воздействия внешнего импульса, то управление с обратной связью вернет систему из возмущенного состояния на оптимальную траекторию. Заметим, что мы вычисляем матрицу

$$E^*(t)=U^{-1}(t)\,B(t)\,E(t)$$

после того как найдено решение $E(t)$ нелинейного дифференциального уравнения. Это нелинейное уравнение является уравнением типа Риккати, и может быть проинтегрировано в элементарных функциях лишь в некоторых отдельных случаях (см. ниже упражнения 1 и 2). Однако существуют стандартные численные методы, позволяющие получить достаточно точно матрицу $E^*(t)$.

Остается одна тонкость — надо доказать, что решение $E(t)$ указанного выше нелинейного уравнения определено на всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Если это не так, то норма $|E(t)|$ становится неограниченной при t, стремящемся к верхней границе T. Тогда для любого заданного α существуют $\bar{t}_0$ и $\bar{x}_0$ такие, что $\bar{x}_0' E(\bar{t}_0)\,\bar{x}_0 > \alpha$ при $|\bar{x}_0|=1$ и $t_0 \leqslant \bar{t}_0 \leqslant T$. Но, поскольку матрица $E(t)$ не зависит от x_0 и t_0, то используя оптимальную траекторию, исходящую из точки $\bar{x}_0$ на интервале $\bar{t}_0 \leqslant t \leqslant T$, можно записать

$$\eta^*(\bar{t}_0;\ \bar{x}_0)\,x^*(\bar{t}_0;\ \bar{x}_0)=\bar{x}_0' E(\bar{t}_0)\,\bar{x}_0 > \alpha.$$

Однако любое сколь угодно малое возмущение $x_0+\delta x_0$ начального состояния x_0 вызывает малое смещение соответствующей траектории; поэтому точка $x^*(T,\ x_0+\delta x_0)$ должна находиться внутри некоторого компактного множества, лежащего под гиперповерхностью S_c, $c > m$. Отсюда следует, что норма $|x^*(T,\ \bar{x}_0)|$ равномерно ограничена при $|\bar{x}_0|=1$ и $t_0 \leqslant \bar{t}_0 < T$, а значит, и соответствующие решения $x^*(t,\ \bar{x}_0)$, $\eta^*(t,\ \bar{x}_0)$ указанной выше линейной системы дифференциальных уравнений также равномерно ограничены. Это противоречит предположению о том, что

$$\bar{x}_0' E(\bar{t}_0)\,\bar{x}_0 > \alpha \quad \text{для произвольного } \alpha,$$

и следовательно, норма $|E(t)|$ ограничена и решение $E(t)$ существует на всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Пример 2. $C(u)=e'(T)\,Ge(T)+\int\limits_{t_0}^{T}\left[\|e(t)\|_W^2+\|u(t)\|_U^2\right]dt$, где ошибка

$$e(t)=x(t)-\xi(t)$$

выражает отклонение траектории $x(t)$ от желаемой идеальной траектории $\xi(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Как и раньше,

предположим, что

$$G=G'\geqslant 0, \quad W(t)=W'(t)\geqslant 0, \quad U(t)=U'(t)>0,$$

а $\xi(t)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Кроме того, мы перейдем к более общей линейной управляемой системе $\mathscr{L}$, вводя известную непрерывную возмущающую силу $v(t)$:

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+v(t).$$

Рассмотрим в качестве переменной нашей управляемой системы не $x(t)$, а ошибку $e(t)$. Тогда получим уравнение:

$$(\mathscr{L}_+) \qquad \dot{e}=A(t)e+B(t)u+\omega(t), \quad e(t_0)=e_0=x_0-\xi(t_0),$$

где функция $\omega(t)$ вычисляется следующим образом:

$$\omega(t)=A(t)\xi(t)-\dot{\xi}(t)+v(t).$$

Положим еще $\hat{e}(t)=(e^0(t),\ e(t))$, где

$$e^0(t)=\int_{t_0}^{t}\|e(s)\|_W^2+\|u(s)\|_U^2\,ds,$$

$$e(t)=\Phi(t)e_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)B(s)u(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\omega(s)\,ds,$$

и определим множество достижимости $\hat{K}_+=\{\hat{e}(T)\}=\{e^0(T),\ e(T)\}$. Это множество $\hat{K}_+$ есть результат параллельного переноса множества $\hat{K}$ для $\omega(t)\equiv 0$ на постоянный горизонтальный вектор $\left(0, \int_{t_0}^{T}\Phi(T)\Phi^{-1}(s)\omega(s)\,ds\right)$. Следовательно, $\hat{K}_+$ замкнуто и выпукло в R^{n+1}. К линейной системе $\mathscr{L}_+$ с критерием качества $C(u)=$ $=e'(T)Ge(T)+\int_{t_0}^{T}\left[\|e(s)\|_W^2+\|u(s)\|_U^2\right]ds$ приложима вся теория предыдущей главы. В частности, существует единственное оптимальное управление

$$u^*(t)=U^{-1}(t)B'(t)\eta'(t)$$

с соответствующим ему оптимальным решением $e^*(t)$. Действительно, $e^*(t)$ и $\eta^*(t)$ представляют собой единственное решение системы

$$\dot{e}=A(t)e+B(t)U^{-1}(t)B'(t)\eta'+\omega(t),$$
$$\dot{\eta}=e'W(t)-\eta A(t)$$

с граничными условиями $e(t_0)=e_0=x_0-\xi(t_0)$ и $\eta'(T)=-Ge(T)$. Оптимальное управление $u^*(t)$ является, конечно, оптимальным

управлением и относительно решения

$$x^*(t) = e^*(t) + \xi(t).$$

Попробуем рассчитать оптимальное управление в виде цепи с обратной связью и переменным коэффициентом усиления:

$$u^*(t) = h^*(t) + E^*(t)\, e^*(t).$$

Здесь $h^*(t) = U^{-1}(t)\, B'(t)\, h(t)$ и $E^*(t) = U^{-1}(t)\, B'(t)\, E(t)$, где функции $h(t)$ и $E(t)$ определяются из уравнений

$$\dot{E} = \omega(t) - A'(t)E - EA(t) - EB(t)U^{-1}(t)B'(t)E, \quad \text{где} \quad E(T) = -G,$$

$$\dot{h} = -[E(t)\, B(t)\, U^{-1}(t)\, B'(t) + A'(t)]\, h - E(t)\, \omega(t), \quad \text{где} \quad h(T) = 0.$$

Тогда, как показано в примере 1, $E(t)$ будет симметричной матрицей на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, а $h(t)$ определяется из указанного

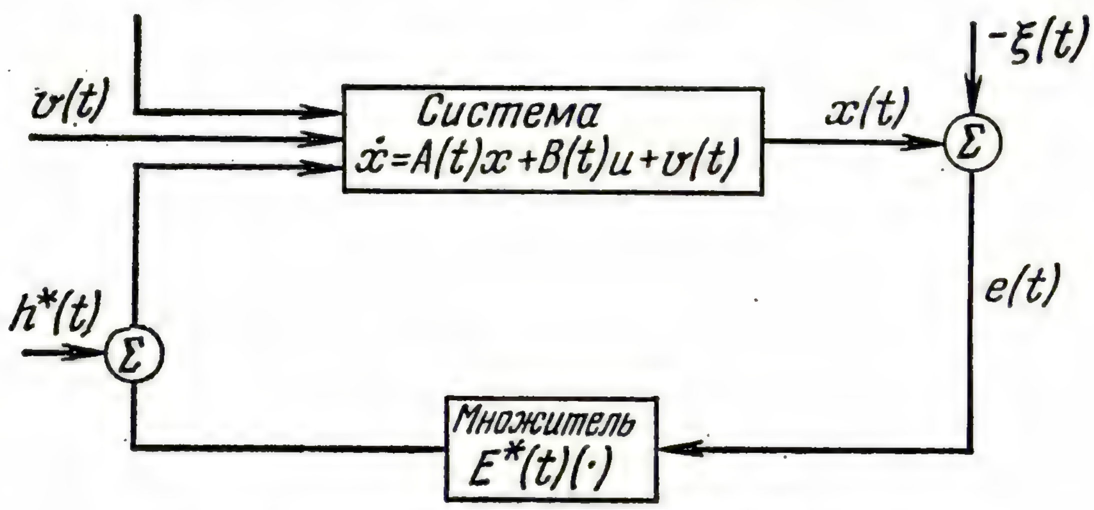

Рис. 3.2. Синтез системы с обратной связью.

выше дифференциального линейного уравнения. Заметим, что $h(t)$ и $E(t)$, а тем самым и $h^*(t)$ и $E^*(t)$, не зависят от x_0.

Легко показать, что решение $e(t)$ уравнения

$$\dot{e} = A(t)\, e + B(t)\, [h^*(t) + E^*(t)\, e] + \omega(t)$$

с начальным условием $e(t_0) = e_0$ является оптимальным решением $e^*(t)$. Положим

$$\eta'(t) = h(t) + E(t)\, e(t)$$

и проверим, что пара $(e(t),\ \eta(t))$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, единственным решением которой является $(e^*(t),\ \eta^*(t))$.

Таким образом, оптимальное управление, построенное как управление с обратной связью, дается выражением

$$u^*(t) = h^*(t) + E^*(t)e$$

или

$$u^*(t) = h^*(t) - E^*(t)\, \xi(t) + E^*(t)x.$$

На рис. 3.2 мы даем блок-схему управляемой системы $\mathscr{L}_+$ с этим управлением.

Замечания. Имеется интересная интерпретация множества $\hat{K}$ для системы примера 1 (или сдвинутого множества $\hat{K}_+$ для системы $\mathscr{L}_+$ примера 2). Рассмотрим множество $\hat{K}$ в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами (x^0, x); очевидно, что если система $\mathscr{L}$ вполне управляема на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, то граница множества $\hat{K}$ представляет собой однозначную функцию $\hat{K}(x)$ векторного аргумента x. По определению, $\hat{K}(x)$ есть минимальное значение критерия $C_0(u) = x^0$ при перемещении системы из x_0 в целевую точку x.

Вычислим теперь это минимальное значение

$$V(x_0, t_0) = x^{*\prime}(T)\,Gx^*(T) + \int_{t_0}^{T} [\,\|x^*\|_W^2 + \|u\|_U^2]\,ds$$

для управляемой системы $\mathscr{L}$ с начальными условиями $x(t_0) = x_0$. Рассмотрим производную от $x'E(t)\,x$ вдоль оптимальной траектории $x^*(t)$, исходящей из x_0, при оптимальном управлении $u^*(t) = U^{-1}(t)\,B'(t)\,E(t)\,x^*(t)$; тогда получим

$$\begin{aligned}\dot{x}'E(t)\,x + x'E(t)\dot{x} + x'\dot{E}(t)\,x &= \\ &= [Ax + BU^{-1}B'Ex]'Ex + x'E\,[Ax + BU^{-1}B'Ex] + x'\dot{E}x.\end{aligned}$$

Интегрируя и используя дифференциальное уравнение, определяющее $E(t)$, получим

$$x^{*\prime}(T)\,E(t)\,x^*(T) - x_0'E(t_0)\,x_0 = \int_{t_0}^{T} [\,\|x^*(s)\|_W^2 + \|u^*\|_U^2]\,ds.$$

Когда основной функционал $C(u)$ принимает значение $C(u) = x'(T)\,Gx(T) + x^0(T)$, то $V(x_0, t_0) = -x_0'E(t_0)\,x_0$. Это явное выражение для минимального значения критерия подтверждает результаты, полученные на основе метода динамического программирования в примере 4 первого раздела главы 1.

Пример 3. $C(u) = \zeta x(T) + x^0(T)$, где $\zeta \neq 0$ — фиксированный n-мерный вектор-строка. В силу теоремы 5 существует единственное оптимальное управление $u^*(t)$ с соответствующим решением $x^*(t)$. Оно определяется через единственное решение системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)\,x + B(t)\,U^{-1}(t)\,B'(t)\,\eta', \\ \dot{\eta} &= x'W(t) - \eta A(t),\end{aligned}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $\eta(T) = -\frac{1}{2}\zeta$, причем

$$u^*(t) = U^{-1}(t)\,B'(t)\eta^{*\prime}(t).$$

Мы не будем здесь строить оптимальное управление в виде цепи обратной связи (см. упражнение 9), а дадим непосредственное решение двухточечной краевой задачи для системы с постоянными коэффициентами.

Пусть задана система в R^2:

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = u,$$

с начальными условиями $x^1(0) = x_0^1$, $x^2(0) = x_0^2$. Пусть критерий качества имеет вид

$$C(u) = x^1(1) + x^2(1) + \int_0^1 \{(x^1(t))^2 + (u(t))^2\}\, dt$$

для скалярных управлений $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Система для определения оптимальных решений $x^*(t)$ и $\eta^*(t)$ имеет вид

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_1 = x^1, \quad \dot{\eta}_2 = -\eta_1,$$

причем $x^1(0) = x_0^1$, $x^2(0) = x_0^2$, $\eta_1(1) = \eta_2(1) = -\frac{1}{2}$ и $u^*(t) = \eta_2^*(t)$. Для любых начальных условий $\eta_1(0) = \eta_{10}$, $\eta_2(0) = \eta_{20}$ можно определить решение указанной выше системы с начальными условиями $(x_0^1, x_0^2, \eta_{10}, \eta_{20})$. Действительно,

$$\eta_1(t) = \ddot{\varphi}(t)\, x_0^1 + \varphi(t)\, x_0^2 + \dddot{\varphi}(t)\, \eta_{10} + \varphi(t)\, \eta_{20},$$

$$\eta_2(t) = -\dot{\varphi}(t)\, x_0^1 - \varphi(t)\, x_0^2 - \ddot{\varphi}(t)\, \eta_{10} + \dddot{\varphi}(t)\, \eta_{20},$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}} - \cos\frac{t}{\sqrt{2}}\,\operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}\right].$$

Однако (η_{10}, η_{20}) связаны конечными условиями:

$$-\frac{1}{2} = \ddot{\varphi}(1)\, x_0^1 + \dot{\varphi}(1)\, x_0^2 + \dddot{\varphi}(1)\, \eta_{10} + \varphi(1)\, \eta_{20},$$

$$-\frac{1}{2} = -\dot{\varphi}(1)\, x_0^1 - \varphi(1)\, x_0^2 - \ddot{\varphi}(1)\, \eta_{10} + \dddot{\varphi}(1)\, \eta_{20}.$$

Из этих двух уравнений определим η_{10} и η_{20} как функции от (x_0^1, x_0^2). Таким образом, решение $(x^1(t), x^2(t), \eta_1(t), \eta_2(t))$ вполне определяется управляемой системой $\mathscr{L}$, критерием качества $C(u)$ и начальными условиями (x_0^1, x_0^2).

Если в каждый момент времени t из интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$ определить (η_{10}, η_{20}) в зависимости от текущего или возмущенного состояния системы $(x^1(t), x^2(t))$, то можно рассматривать управление

$$u^*(t) = \eta_2(t, x_0^1, x_0^2)$$

как управление с обратной связью.

Задачи с подвижными концами

Существуют такие задачи управления линейными системами с интегральным критерием качества, в которых систему требуется перевести из одной заданной точки не в фиксированную точку, а в любую из точек некоторого целевого множества. Здесь мы рассмотрим те дополнительные условия, которые возникают в связи с требованием, чтобы конец траектории принадлежал целевому множеству. Снова рассмотрим систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t) + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C_0(u) = x^0(T) = \int_{t_0}^{T} \left[\| x(s) \|_W^2 + \| u(s) \|_U^2\right] ds,$$

как и в разделе 3.2.

Пусть G — непустое компактное выпуклое целевое множество в R^n. Требуется выбрать такое управление $u(t) \subset R^m$, минимизирующее критерий $C_0(u)$, которое переводило бы систему из точки $x(t_0) = x_0$ в некоторую точку $x(T) \in G$. Для простоты предположим, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, так что область достижимости $\hat{K} = \{x^0(T), \quad x(T)\}$ является замкнутым выпуклым множеством, обладающим внутренними точками в R^{n+1}. Если бы система $\mathscr{L}$ не обладала свойством управляемости, то все рассуждения можно было бы проводить внутри линейного многообразия $L(\hat{K})$, натянутого на множество $\hat{K}$ в R^{n+1}, если только G пересекается с $L(\hat{K})$.

Множество G лежит в пространстве R^n с координатами x. Рассмотрим в пространстве R^{n+1} с координатами (x^0, x) цилиндрическое множество $\hat{G} = G \times R^1$. Поскольку система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, то пересечение $\hat{G}$ с $\hat{K}$ есть замкнутое выпуклое множество. Мы хотим перевести систему из точки $(0, x_0)$ в $\hat{G} \cap \hat{K}$ так, чтобы значение $x^0(T)$ было минимальным. Очевидно, что оптимальное управление $u^*(t)$ существует.

Минимальное значение x^0 на $\hat{G} \cap \hat{K}$ достигается в некоторой общей граничной точке $\hat{x}^*(T) = (x^{0*}(T), \ x^*(T))$ множеств $\hat{G}$ и $\hat{K}$ [если только оптимальное управление, минимизирующее $C_0(u)$ в задаче с нефиксированным целевым состоянием, не переводит систему из x_0 в G — этот случай сводится к примеру 1, и поэтому здесь не рассматривается]. Таким образом, оптимальное управление $u^*(t)$, переводящее систему из состояния $(0, x_0)$ в состояние $\hat{x}^*(T)$, дается выражением

$$u^*(t) = U^{-1}(t) B'(t) \eta^{*\prime}(t).$$

Здесь $\hat{\eta}(t)=\left(-\frac{1}{2}, \eta(t)\right)$ таково, что

$$\dot{\eta}=x'W(t)-\eta A(t),$$

а $\hat{\eta}(T)$ — нормаль к $\hat{K}$ в точке $\hat{x}^*(T)$. Рассмотрим горизонтальное поперечное сечение $P: x^0=x^{0*}(T)$ в R^{n+1}. Тогда, если считать, что G совпадает с $\hat{G}\cap P$, можно показать, что множества G и $\hat{K}\cap P$ разделяются общей опорной $(n-1)$-мерной плоскостью π в P. Действительно, $\eta(T)$ есть нормаль к π, причем внутренняя по отношению к G. Теми же рассуждениями, что и в теореме 5, можно показать, что задача обладает единственным оптимальным управлением $u^*(t)$, а $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ находятся как решения системы

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)U^{-1}(t)B'(t)\eta', \quad \dot{\eta}=x'W(t)-\eta A(t),$$

где $x(t_0)=x_0$, $x(T)\in\partial G$ и $\eta(T)$ — внутренняя нормаль к G в точке $x(T)$.

Пусть целевое множество G в R^n определяется неравенством $\gamma(x)\leqslant 0$, где $\gamma(x)$ — выпуклая функция из C^1 такая, что $\operatorname{grad}\gamma\neq 0$ на ∂G. Тогда граничные условия принимают вид: $x(t_0)=x_0$, $\gamma(x(T))=0$ и $\eta(T)=-k\operatorname{grad}\gamma(x(T))$ для некоторого $k>0$. Последнее условие называют обычно условием *трансверсальности.*

Пример 1. Рассмотрим линейную систему в R^2:

$$\dot{x}^1=x^2, \quad \dot{x}^2=u$$

со скалярным управлением $u(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ и критерием качества

$$C(u)=\int_0^1 (u(t))^2\,dt.$$

Начальное состояние системы $(x^1(0), x^2(0))=(0, -3)$, а целевое множество есть круг G:

$$(x^1)^2+(x^2)^2\leqslant 1 \text{ в } R^2.$$

Эта система обладает свойством управляемости, и следовательно, существует единственное оптимальное управление $u^*(t)$. Мы найдем

$$u^*(t)=\eta_2^*(t)$$

из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^1=x^2, \quad \dot{x}^2=\eta_2, \quad \dot{\eta}_1=0, \quad \dot{\eta}_2=-\eta_1$$

с граничными условиями $x^1(0)=0$, $x^2(0)=-3$ и условием трансверсальности

$$\begin{bmatrix}\eta_1(1)\\ \eta_2(1)\end{bmatrix}=-k\begin{bmatrix}x^1(1)\\ x^2(1)\end{bmatrix} \quad \text{при } (x^1(1))^2+(x^2(1))^2=1,\ k>0.$$

При любом выборе начальных данных $\eta_1(0)=\eta_{10}$, $\eta_2(0)=\eta_{20}$ мы можем найти соответствующее единственное решение данной системы дифференциальных уравнений

$$\eta_1(t)=\eta_{10},\quad \eta_2(t)=-\eta_{10}t+\eta_{20},$$
$$x^1(t)=\frac{\eta_{10}t^3}{6}+\frac{\eta_{20}t^2}{2}-3t,\quad x^2(t)=-\frac{\eta_{10}t^2}{2}+\eta_{20}t-3.$$

Для того чтобы при $t=1$ удовлетворялись условия трансверсальности, нужно потребовать выполнения следующих соотношений:

$$\eta_1(1)=\eta_{10}=-kx^1(1)=-k\left(-\frac{1}{6}\eta_{10}+\frac{1}{2}\eta_{20}-3\right),$$
$$\eta_2(1)=-\eta_{10}+\eta_{20}=-kx^2(1)=-k\left(-\frac{1}{2}\eta_{10}+\eta_{20}-3\right),$$

и

$$(\eta_{10})^2+(-\eta_{10}+\eta_{20})^2=k^2 \text{ для некоторого } k>0.$$

Два линейных условия на $(\eta_{10},\ \eta_{20})$ дают

$$\eta_{10}=\frac{36\left(\frac{k^2}{2}+k\right)}{k^2+16k+12},\quad \eta_{20}=\frac{12\,(k^2+6k)}{k^2+16k+12}.$$

Окончательное квадратичное условие будет выполнено, если уравнение

$$k^4+32k^3-80k^2-480k-2448=0$$

будет иметь положительный корень. Но этот многочлен четвертой степени можно разложить на множители:

$$(k-6)(k^3+38k^2+148k+408)=0.$$

Таким образом, уравнение имеет положительный корень $k=6$, а второй множитель не имеет положительных корней. Следовательно, $k=6$, $\eta_{10}=6$, $\eta_{20}=6$ и оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t)=-6t+6\qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Пример 2. Рассмотрим автономную систему в R^n, обладающую свойством управляемости

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^T u'(s)\,Uu(s)\,ds.$$

Мы хотим привести систему из состояния $x(0)=x_0$ в состояние $x(T)=0$ с минимальным показателем качества $C(u)$. Найдем решение системы уравнений

$$\dot{x}=Ax+BU^{-1}B'\eta',\quad \dot{\eta}=-\eta A,$$

удовлетворяющее условиям $x(0)=x_0$, $x(T)=0$. Оптимальным управлением будет $u^*(t)=U^{-1}B'\eta^{*\prime}(t)$. Здесь $\eta^*(t)=C'e^{-At}$, а постоянный вектор C определяется из условия $x(T)=0$, так что

$$C=-\left[\int_0^T e^{-As}BU^{-1}B'e^{-A's}\,ds\right]^{-1}x_0.$$

Для случая $n=2$, $m=1$ задача примет вид

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad C(u)=\int_0^{2\pi}u^2(s)\,ds,$$

и надо вычислить

$$C=-\left\{\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\cos s & -\sin s\\ \sin s & \cos s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[0\ 1]\begin{bmatrix}\cos s & \sin s\\ -\sin s & \cos s\end{bmatrix}ds\right\}^{-1}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$C=\begin{bmatrix}-x_0/\pi\\ -y_0/\pi\end{bmatrix},$$

и

$$u^*(t)=\frac{x_0}{\pi}\sin t-\frac{y_0}{\pi}\cos t.$$

Этот пример показывает, каким образом ошибка $x(t)$ может быть приведена к нулю за конечный промежуток времени с минимальной затратой энергии. Соответствующее оптимальное управление можно выразить в явном виде как функцию начальных условий и некоторых других параметров для широкого круга линейных управляемых систем.

Регулирование на бесконечном интервале

Если рассматриваемый интервал $t_0\leqslant t\leqslant T$ становится бесконечным, т. е. $T=+\infty$, то изложенная выше теория приводит к проблеме регулятора т. е. к задаче поддержания общей ошибки системы на оптимально малом уровне. Мы упростим исследование, рассматривая лишь автономные линейные системы в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

где A и B — постоянные матрицы. Далее, критерий качества для управлений $u(t)\subset R^m$ на интервале $0\leqslant t<\infty$ имеет вид

$$C(u)=\int_0^{\infty}\left[\|x(s)\|_W^2+\|u(s)\|_U^2\right]ds,$$

где $W=W'>0$ и $U=U'>0$ также постоянные матрицы. Допустимыми считаем управления $u(t)$, измеримые на интервале $0\leqslant t\leqslant\infty$ и такие, для которых критерий качества сходится

к конечному значению. В частности, допустимыми будут все управления $u(t)$ из пространства $L_2(0, \infty)$ интегрируемых с квадратом функций; кроме того, отметим, что все соответствующие им решения $x(t)$ также принадлежат $L_2(0, \infty)$. В самом деле, можно показать, что $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Задача может и вовсе не иметь допустимых управлений, например, при $B = 0$, $A = I$, $x_0 \neq 0$. Если система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, то для того, чтобы определить допустимое управление на интервале $0 \leqslant t < \infty$, можно взять управление, переводящее систему из точки x_0 в начало координат за конечное время и далее равное нулю.

В следующей ниже теореме дается синтез цепи обратной связи для оптимального управления в задаче построения регулятора. Предварительно, однако, нам придется доказать лемму Ляпунова для отрицательно определенных матриц.

Лемма. *Рассмотрим уравнение, коэффициентами которого являются действительные матрицы*

$$H'E' + EH = Q,$$

где $Q = Q' > 0$. Тогда решение $E = E' < 0$ существует в том, и только в том случае, если H — устойчивая матрица (т. е. все собственные значения матрицы H имеют отрицательную действительную часть).

Доказательство. Если H — устойчивая матрица, то требуемое решение дается сходящимся интегралом

$$E = -\int_0^\infty e^{H't} Q e^{Ht}\, dt.$$

Очевидно, что $E = E' < 0$; интегрированием по частям получим

$$H'E' = -\int_0^\infty H'e^{H't}\, Qe^{Ht} dt = -\left[e^{H't} Q e^{Ht}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{H't} Q e^{Ht}\, dt$$

или

$$H'E' = Q - EH,$$

что и требовалось.

Обратно, предположим, что матрица $E = E' < 0$ есть решение нашего уравнения. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений в R^n:

$$\dot{x} = Hx.$$

Продифференцируем по времени квадратичную функцию $v(x) = -x'Ex$ (имеющую эллипсоидальные поверхности уровня,

заключающие начало координат) вдоль решения $x(t) \not\equiv 0$

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = -\dot{x}'Ex - x'E\dot{x} = x'[-H'E' - EH]x.$$

Тогда

$$\frac{dv}{dt} = -x'Qx < 0$$

и $x(t) \to 0$. Таким образом, H — устойчивая матрица. Лемма доказана.

Теорема 7. *Рассмотрим автономную систему в R^n, обладающую свойством управляемости,*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с критерием качества

$$C(u) = \int_0^\infty [\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2]\,dt, \quad W = W' > 0, \quad U = U' > 0,$$

определенным на множестве всех допустимых управлений $u(t) \subset R^m$ $(0 \leqslant t < \infty)$. Тогда существует единственная симметричная отрицательно определенная матрица E, удовлетворяющая уравнению

$$A'E + EA + EBU^{-1}B'E = W;$$

для любого начального состояния $x_0 \in R^n$ существует единственное оптимальное управление $u^*(t)$, определяемое формулой

$$u^*(t) = U^{-1}B'Ex^*(t).$$

Таким образом, оптимальное решение $x^*(t)$ удовлетворяет асимптотически-устойчивой системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (A + BU^{-1}B'E)x,$$

$C(u^*) = -x_0'Ex_0$ есть минимальное значение критерия качества.

Доказательство. Предположим, что существует решение $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ системы уравнений

$$\dot{x} = Ax + BU^{-1}B'\eta',$$
$$\dot{\eta} = x'W - \eta A,$$

удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0$, $x(\infty) = 0$, $\eta(\infty) = 0$. Тогда покажем, что соответствующее управление $u^*(t) = U^{-1}B'\eta^{*\prime}(t)$ является единственным оптимальным управлением, а $x^*(t)$ — оптимальной траекторией, исходящей из точки $x^*(0) = x$. Поскольку $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ являются решениями автономной линейной системы, и поскольку они убывают при $t \to \infty$, то они должны убывать экспоненциально, и следовательно, $u^*(t)$ является допустимым управлением.

Пусть $\omega(t)$ — решение, соответствующее любому допустимому управлению $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$. Положим

$$\omega^0(t) = \int_0^t \left[\|\omega(s)\|_W^2 + \|u(s)\|_U^2\right] ds,$$

и дальше будем рассуждать так же, как в теореме 3.

Если $u(t)$ отличается от $u^*(t)$ на некотором положительном промежутке времени, то из доказательства теоремы 3 следует, что

$$-\frac{1}{2} x^0(\infty) + \eta(\infty) x(\infty) - \eta(0) x_0 > -\\ -\frac{1}{2}\omega^0(\infty) + \eta(\infty)\omega(\infty) - \eta(0) x_0$$

и значит,

$$C_0(u^*) < C_0(u).$$

Следовательно, $u^*(t)$ является единственным оптимальным управлением.

Теперь построим необходимые нам решения $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ указанной выше системы дифференциальных уравнений, используя постоянную симметричную отрицательно определенную матрицу E. Определим $x^*(t)$ как решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (A + BU^{-1}B'E)x$$

с начальным условием x_0 и положим

$$\eta^* = x^{*\prime}(t) E.$$

Тогда, используя решение E уравнения

$$A'E + EA + EBU^{-1}B'E = W,$$

легко проверить, что $x^*(t)$ и $\eta^*(t)$ являются искомыми решениями. Покажем, что $x^*(\infty) = \eta^*(\infty) = 0$, установив, что матрица $(A + BU^{-1}B'E)$ устойчива.

Из условия, наложенного на E, непосредственно следует, что

$$(A + BU^{-1}B'E)'E + E(A + BU^{-1}B'E) = W + EBU^{-1}B'E.$$

Поскольку $EBU^{-1}B'E = (U^{-1}B'E)'U(U^{-1}B'E) \geqslant 0$ как симметричная матрица, то из леммы следует, что $(A + BU^{-1}B'E)$ есть устойчивая матрица, что и требовалось. Чтобы вычислить оптимальное значение критерия качества, продифференцируем выражение $x'Ex$ **вдоль** оптимальной траектории $x^*(t)$; тогда получим

$$\frac{d}{dt}[x^{*\prime}(t) Ex^*(t)] = \dot{x}'Ex + x'E\dot{x} = \\ = (Ax + BU^{-1}B'Ex)'Ex + x'E(Ax + BU^{-1}B'Ex).$$

Используя алгебраическое условие на E, интегрированием последнего соотношения получим

$$x^{*\prime}(t)\,Ex^*(t)-x_0'Ex_0=\int_0^t\left[\|x^*(s)\|_W^2+\|u^*(s)\|_U^2\right]ds.$$

Таким образом, $-x_0'Ex_0=G(u^*)$.

Вопрос о существовании и единственности отрицательно определенной матрицы E для вполне управляемых систем рассматривается в упражнениях, следующих за этим разделом. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}=-x+u(t),\quad x(0)=x_0$$

и критерий качества

$$C(u)=\int_0^\infty[x^2(t)+u^2(t)]\,dt.$$

Уравнение для определения E имеет вид

$$(-1)E+E(-1)+E^2=1.$$

Выберем $E=1-\sqrt{2}<0$; тогда оптимальное управление будет

$$u^*(t)=(1-\sqrt{2})\,x^*(t),$$

а оптимальное решение $x^*(t)=x_0e^{-\sqrt{2}t}$.

Упражнения

1. Уравнение движения ротора имеет вид

$$\dot{x}=u,$$

где x — кинетический момент ротора, а $u(t)$ — скалярный управляющий момент относительно неподвижной оси вращения. Если управление $u(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ пропорционально силе тока, то общая затрачиваемая энергия равна $\int_0^1 \alpha u^2(t)\,dt$, где $\alpha>0$ — постоянный коэффициент. Мы хотим уменьшить начальную скорость x_0 вращения ротора.

a) Использовать критерий качества $C(u)=x(1)^2+\int_0^1\alpha u^2(t)\,dt$ и синтезировать оптимальное управление в виде управления с обратной связью. Вычислить минимальное значение критерия качества.

b) Использовать критерий качества $C(u)=x(1)+\int_0^1\alpha u^2(t)\,dt$ и вычислить его минимальное значение.

c) Рассмотреть критерий качества $C(u)=\int_0^1 \alpha u^2(t)\,dt$ для управлений, приводящих систему из состояния x_0 в состояние покоя. Вычислить минимальное значение критерия качества.

2. Уравнение движения осциллятора имеет вид

$$\ddot{x}+x=u,$$

где $(x, \dot{x})$ — состояние системы, а $u(t)$ — управляющая сила на интервале $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. При $t=0$ система находилась в состоянии (0, 1) и мы хотим сдвинуть фазу колебания на $\pi/2$, получив движение $\xi(t)=\cos t$. Пусть $C(u)=\int_0^{2\pi}[(x-\cos t)^2+(\dot{x}+\sin t)^2+u^2(t)]\,dt$. Записать дифференциальные уравнения для элементов матрицы обратной связи $E(t)$, как в разобранных выше примерах. Заменить $\dot{e}(t)$ разностью $[e(t+h)-e(t)]/h$ с малым шагом $h>0$ и наметить схему численного решения соответствующих разностных уравнений.

3. Синтезировать оптимальное управление $u^*(t)$ для задачи $\ddot{x}+x=u$ с критерием качества $C(u)=\int_0^{\infty}[x^2(t)+\dot{x}^2(t)+u^2(t)]\,dt$. Найти минимум $C(u)$ при начальном состоянии системы $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$.

4. Найти оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, которое переводило бы систему из состояния (0, 0, —3) в целевое множество $G:(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2\leqslant 1$. Система имеет вид $\dddot{x}=u$ или, в R^3,

$$\dot{x}^1=x^2, \quad \dot{x}^2=x^3, \quad \dot{x}^3=u, \qquad C(u)=\int_0^1 u^2(t)\,dt.$$

5. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u$$

с критерием качества $C_0(u)=\int_{t_0}^{T}\left[\|x(s)\|_W^2+\|u(s)\|_U^2\right]ds$, заданном на множестве управлений $u(t)$, определенных на интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$ в R^m. Пусть $\hat{K}=\{x^0(T), x(T)\}$ — множество достижимости в R^{n+1}. Показать, что любой точки $\hat{x}\in\hat{K}$ можно достигнуть, используя непрерывное управление $u(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$.

6. Рассмотрим управляющую систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u$$

с критерием качества $\tilde{C}_0(u)=\left[\int_{t_0}^{T}\left[\|x(s)\|_W^2+\|u\|_U^2\right]ds\right]^{1/2}$, определенным на множестве управлений $u(t)$ из R^m на интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$. Пусть $\tilde{K}$ — множество всех точек $\{\tilde{C}_0(u), x_u(T)\}$ в R^{n+1}.

а) Доказать, что единственным оптимальным управлением $u^*(t)$ является управление, минимизирующее функционал $C_0(u)=[\tilde{C}_0(u)]^2$.

b) Пусть $g(x)$ — строго выпуклая функция из C^1, т. е.

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) < \lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2), \qquad 0<\lambda<1, \quad x_1\neq x_2,$$

и пусть функция $g(x)$ ограничена снизу. Доказать, что если критерий качества имеет вид $C(u)=g(x(T))+\tilde{C}_0(u)$, то имеется единственное оптимальное управление, а именно, $u^*(t)=U^{-1}(t)B'(t)\eta^{*\prime}(t)$ с соответствующей оптимальной траекторией $x^*(t)$. Здесь вектор-функция $(x^*(t), \eta^*(t))$ есть решение системы уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)U^{-1}(t)B'(t)\eta',$$
$$\dot{\eta}=x'W(t)-\eta A(t),$$

удовлетворяющее условию

$$x(t_0)=x_0, \quad \eta(T)=-\sqrt{C_0(u^*)}\operatorname{grad} g(x(T)).$$

7. Рассмотрим систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)x+B(t)u,$$

a) с критерием качества $C(u)=\int\limits_{t_0}^{T}\|x(s)\|_W^2\,ds$, определенным на множестве управлений $u(t)\subset R^m\ (t_0\leqslant t\leqslant T)$, удовлетворяющих ограничению $\int\limits_{t_0}^{T}\|u(t)\|_U^2\,dt\leqslant 1$. Доказать, что в этом случае существует оптимальное управление $u^*(t)$. Если $W(t)>0$, то показать, что оптимальная траектория $x^*(t)$ единственна. [Указание: использовать слабую компактность единичного шара в $L_2(t_0, T)$.]

b) Пусть критерий качества $C(u)=\int\limits_{t_0}^{T}\|u(s)\|_U^2\,ds$ задан на множестве управлений $u(t)\subset R^m$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$ таких, что соответствующие им решения удовлетворяют условию $\int\limits_{t_0}^{T}\|x(s)\|_W^2\,ds\leqslant 1$. Доказать существование единственного оптимального управления $u^*(t)$ при условии, что существует хотя бы одно допустимое управление. [Указание: пусть $u^{(k)}\to\bar{u}$ слабо, так что $C(u^{(k)})\searrow\inf C(u)$. Тогда $\lim C(u^{(k)})\geqslant C(\bar{u})$. Это последнее неравенство следует из того факта, что обобщенные коэффициенты Фурье вектор-функции $\bar{u}$ сходятся к соответствующим коэффициентам вектор-функции u^k.]

8. Предположим, что матрица $E(t)=E'(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$ есть решение уравнения

$$\dot{E}=W(t)-A'(t)E-EA(t)-EB(t)U^{-1}(t)B'(t)E,$$

удовлетворяющее условию $E(T)=-G$, как и в примере 1 раздела 3.3. Доказать, что

$$E(t)=[\psi_3(t)-\psi_4(t)G][\psi_1(t)-\psi_2(t)G]^{-1},$$

где

$$\Psi(t)=\begin{bmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \psi_3 & \psi_4\end{bmatrix}$$

есть фундаментальное матричное решение системы

$$\dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,U^{-1}(t)\,B'(t)\,\eta',$$
$$\dot{\eta}=x'W(t)-\eta A(t),$$

удовлетворяющее условию $\Psi(T)=I$. Написанное равенство для $E(t)$ выполняется в некоторой окрестности точки $t=T$, точнее, до тех пор, пока матрицы $[\psi_3-\psi_4G]$ и $[\psi_1-\psi_2G]$ невырождены.

9. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u,$$

с критерием качества $C(u)=\zeta x(T)+\int\limits_{t_0}^{T}\left[\|x(s)\|_W^2+\|u(s)\|_U^2\right]ds$, где ζ есть ненулевой постоянный вектор. Проверить, что оптимальное управление реализуется в виде цепи обратной связи

$$u^*(t)=U^{-1}(t)\,B'(t)\,[h(t)+E(t)\,x^*(t)],$$

где

$$\dot{E}=W(t)-A'(t)\,E-EA(t)-EB(t)\,U^{-1}(t)\,B'(t)\,E,$$
$$\dot{h}=-[E(t)\,B(t)\,U^{-1}(t)\,B'(t)+A'(t)]\,h$$

с граничными условиями $E(T)=0$, $h(T)=-\zeta'/2$.

10. Рассмотрим автономную систему в R^n:

$$\dot{x}=Ax+Bu,$$

с критерием качества $C(u)=\int\limits_0^{\infty}\left[\|x(s)\|_W^2+\|u(s)\|_U^2\right]ds$ (см. теорему 7). Показать, что $V(x)=-x'Ex$ есть функция Ляпунова для оптимизированной системы

$$\dot{x}=(A+BU^{-1}B'E)\,x.$$

Иначе говоря, проверить, что:

a) $V(x)>0$ для $x\neq 0$ и $V(0)=0$;

b) $\dot{V}(x(t))<0$ для $x\neq 0$.

11. Пусть $Q=Q'\geqslant 0$ и пусть A — действительная устойчивая $(n\times n)$-матрица. Показать, что

$$F_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\int\limits_0^{\infty}t^n e^{A't}Qe^{At}\,dt,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

есть единственная симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$(A')^{n+1}F+\binom{n+1}{1}(A')^nFA+\binom{n+1}{2}(A')^{n-1}FA^2+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n+1}{n}A'FA^n+FA^{n+1}=Q.$$

Здесь биномиальные коэффициенты имеют, как обычно, вид $\binom{n+1}{r}=\frac{(n+1)!}{(n+1-r)!\,r!}$. [Указание: проверить, что $A'F_n+F_nA=F_{n-1}$, $F_{-1}=Q$,

Для доказательства единственности упростить вычисления, сделав преобразование координат $\overline{A}=P^{-1}AP$, $\overline{F}=P'FP$, $\overline{Q}=P'QP$.]

12. Решить уравнение $A'F+FA=Q$ относительно $F=F'$, где

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Рассмотрим автономную систему в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^\infty \left[\left\| x(s)\right\|_W^2+\left\| u(s)\right\|_U^2\right] ds,\quad W=W'>0,\ U=U'>0,$$

как и в теореме 7. Пусть $u(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ — некоторое допустимое управление, т. е. управление, для которого $C(u)<\infty$. Доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$. (Указание: если $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, |x(t)|>\varepsilon>0$, то для любого $\tau>0$ существует бесконечное количество моментов времени $t_1\to\infty$, таких, что $|x(t_1)|=\varepsilon$, но $|x(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$ в некоторый момент t из интервала $t_1\leqslant t\leqslant t_1+\tau$. Фиксируем достаточно малые $\varepsilon>0$ и $\tau>0$. Тогда найдется такое $\delta>0$, что $\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau} |u(t)|\,dt>\delta$. Поэтому существует $\xi>0$ такое, что $\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau}\left\| u(t)\right\|_U^2 dt>\xi>0$ для бесконечной последовательности моментов времени $t_1\to\infty$.)

14. Вычислить симметричную матрицу обратной связи $E=\begin{bmatrix} e_1 & e \\ e & e_2 \end{bmatrix}$ для управляемой системы

$$\ddot{x}-ax=u,$$

с критерием качества $C(u)=\int\limits_0^\infty [\mathbf{x}'W\mathbf{x}+\gamma u^2]\,dt$, где

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix} w_1 & w \\ w & w_2 \end{bmatrix}>0,\quad \gamma>0.$$

(Указание: согласно теореме 7 надо решить относительно E уравнение

$$A'E+EA=W-\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} e^2 & ee_2 \\ ee_2 & e_2^2 \end{bmatrix},\quad \text{где}\quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix},$$

и проверить, что если $e=-\gamma a-\sqrt{\gamma^2a^2+\gamma w_1}$, $e_1=w-\frac{1}{\gamma}ee_2-ae_2$, $e_2=-\sqrt{\gamma w_2-2\gamma e}$, то матрица E является действительной и отрицательно определенной).

15. Рассмотрим управляемую линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^\infty \left[\|x\|_W^2+\|u\|_U^2\right]dt,\quad W>0,\quad U>0,$$

как и в теореме 7. Доказать существование и единственность отрицательно определенной матрицы E, удовлетворяющей уравнению

$$W-A'E-EA-EBU^{-1}B'E=0,$$

и такой, что

$$u=U^{-1}B'Ex$$

есть оптимальное управление, минимизирующее критерий качества, причем $C(u)=-x_0'Ex_0$. Ход доказательства намечен в следующих пунктах:

a) В примере 1 раздела 3.3 симметричная матрица $D(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant T$, удовлетворяющая уравнению

$$\dot D=W+A'D+DA-DBU^{-1}B'D,\quad D(0)=0,$$

определяет усиление в цепи обратной связи $E(t)=-D(-t)$ для соответствующей оптимальной управляемой системы на конечном интервале $0\leqslant t\leqslant T$. Оптимальное значение критерия качества при начальном состоянии x_0 равно $x_0'D(T)x_0$.

b) Если $0<T_1\leqslant T_2$, то $0<D(T_1)\leqslant D(T_2)$ в том смысле, что $x'D(T_1)x\leqslant x'D(T_2)x$ для всех $x\in R^n$.

c) Пусть $\overline{D}$ — стабилизирующая матрица для системы

$$(\mathscr{L})\qquad \dot x=Ax+Bu,\quad u=\overline{D}x,$$

т. е. такая, что матрица $\overline{A}=A+B\overline{D}$ является устойчивой. Проверить, что значение критерия качества для допустимого управления

$$\bar u(t)=\overline{D}e^{\overline{A}t}x_0,\quad \bar x(t)=e^{\overline{A}t}x_0\quad \text{на}\quad 0\leqslant t<\infty$$

равно $C(\bar u)=x_0'\theta x_0$, где $\theta=\int_0^\infty e^{\overline{A}'t}[W+\overline{D}'U\overline{D}]e^{\overline{A}t}\,dt$. Следовательно, $D(T)\leqslant\theta$ для всех $0\leqslant T<\infty$.

d) $\lim\limits_{T\to\infty} D(T)=D_\infty$ существует и $D(T)\leqslant D_\infty\leqslant\theta$.

e) Матрица D_∞ является решением уравнения $W+A'D+DA-DBU^{-1}B'D=0$. Тогда $E=-D_\infty$ и есть искомая отрицательно определенная матрица. Единственность решения E следует из формулы $C(u^*)=-x_0'Ex_0$.

3.4. Интегральный выпуклый критерий качества

Мы займемся теперь линейными управляемыми системами в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot x=A(t)x+B(t)u,$$

с интегральным критерием качества

$$C(u)=g(x(T))+\int_{t_0}^{T}[f^0(t,x)+h^0(t,u)]\,dt,$$

где $A(t)$, $B(t)$, $g(x)$, $f^0(t, x)$, $h^0(t, u)$ — непрерывные матричные и векторные функции своих аргументов ($t_0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in R^n$, $u \in R^m$). Будем также предполагать в этом разделе, что $f^0(t, x)$ и $h^0(t, u)$ — выпуклые функции при любом фиксированном t; кроме того,

$$f^0(t, x) \geqslant 0, \quad h^0(t, u) \geqslant a|u|^p$$

для некоторых постоянных $a > 0$ и $p > 1$. Эти предположения о положительности, которые, как будет показано в упражнениях, могут быть ослаблены, необходимы для существования оптимального управления (минимизирующего критерий качества) в классе измеримых управлений с конечным значением критерия качества.

Прежде всего мы рассмотрим случай $g(x) \equiv 0$. Как и раньше, мы изучим геометрию множества достижимости $\hat{K} = \hat{K}(x_0, T) \subset R^{n+1}$, состоящего из конечных точек $\hat{x}(T)$ всех траекторий $\hat{x}(t) = (x^0(t), x(t))$ системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad \dot{x}^0 = f^0(t, x) + h^0(t, u(t))$$

с заданным начальным состоянием $\hat{x}_0(t) = (0, x_0)$. Здесь под управлением $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ понимается любое допустимое управление. Используя неравенство

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt \geqslant a \int_{t_0}^{T} |u(t)|^p\, dt,$$

мы получим, что любое ограниченное измеримое управление $u(t)$ является допустимым; кроме того, каждое допустимое управление $u(t)$ принадлежит $L_p(t_0, T)$, а значит, и $L_1(t_0, T)$. Из предположения о выпуклости функций $f^0(t, x)$ и $h^0(t, u)$ легко извлечь, что выпуклая комбинация допустимых управлений также будет допустимым управлением.

Конец траектории $\hat{x}(T)$ можно вычислить, как обычно, по формуле вариации произвольных постоянных,

$$x(T) = \Phi(T)x_0 + \Phi(T) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) B(s) u(s)\, ds.$$

Кроме того,

$$x^0(T) = C_0(u).$$

Для упрощения наших рассуждений предположим, что система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда будет следовать, что проекция множества $\hat{K}(x_0, T)$ на подпространство в R^{n+1} с координатой x есть все R^n, иначе нам пришлось бы все время вводить линейное многообразие, натянутое на $\hat{K}$. Многие из наших результатов являются непосредствен-

ными обобщениями теорем раздела 3.2. Однако в силу большей общности задач, рассматриваемых в этом разделе, мы не сможем получить здесь элементарный синтез оптимального управления в виде цепи обратной связи, как это делалось для квадратичных критериев качества; вместо этого мы будем сводить построение оптимального управления к двухточечной краевой задаче, которую можно решать различными численными методами.

Лемма. *Рассмотрим систему в R^n, обладающую свойством управляемости:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества $C_0(u)$ и множеством достижимости $\hat{K} \subset R^{n+1}$. Тогда ортогональной проекцией $\hat{K}$ на гиперплоскость $x^0 = 0$ будет все R^n. Далее, множество $\hat{K}$, представляющее собой совокупность вертикальных лучей, лежит выше гиперповерхности $x^0 = a_1|x|^p$ для всех достаточно больших $|x|$ и некоторого постоянного $a_1 > 0$.

Доказательство. Поскольку система $\mathscr{L}$ вполне управляема, то точки $x(T)$ должны заполнять все пространство R^n, когда управление $u(t)$ пробегает линейное пространство ограниченных измеримых функций. Так как каждое допустимое управление $u(t)$ из $L_1(t_0, T)$ можно аппроксимировать ограниченным управлением, и поскольку выпуклая комбинация допустимых управлений есть снова допустимое управление, то очевидно, что проекция множества $\hat{K}$ на гиперплоскость $x^0 = 0$ представляет собой все пространство R^n.

Пусть управление $\bar{u}(t)$ переводит систему из точки $(0, x_0)$ в точку $\hat{y} = (y^0, y)$ в $\hat{K}$. Построим управление $u_\rho(t) = \bar{u}(t) + \rho u_\beta(t)$, такое, что

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{T} \Phi^{-1}(s) B(s) u_\beta(s)\, ds = 0$$

и

$$(2) \qquad C_0(u_\rho) = y^0 + b$$

для любого заданного $b \geqslant 0$. Этим будет показано, что $\hat{K}$ есть совокупность вертикальных лучей. Пусть E — замкнутое подмножество ненулевой меры из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$, такое, что управление $\bar{u}(t)$ непрерывно и ограничено на E. Положим $X_E(t) = 1$ при t из E и $X_E(t) = 0$ в остальной части интервала, и построим разбиение интервала $[t_0, T]$ $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} < T$, такое, что

$$\int_{t_k}^{T} X_E(t)\, dt = \frac{1}{k+1} \int_{t_0}^{T} X_E(t)\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Тогда, используя те же обозначения, что и в лемме, предшествующей теореме 1, положим

$$u_\beta^1(s) = [X(s, t_{n+1})\beta_1 + X(s, t_n)\beta_2 + \ldots + X(s, t_1)\beta_{n+1}]\, X_E(t)$$

и

$$u_\beta^j(s) = 0 \quad \text{для} \quad j = 2, 3, \ldots, m \quad \text{на} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Снова выберем ненулевой вектор $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}\}$ так, чтобы условие (1) выполнялось для $u_\beta(t) \not\equiv 0$.

Поскольку $u_\beta(t) = 0$ при $t \notin E$ и управление $\bar{u}(t)$ ограничено на E, то управление $u_\rho(t)$ является допустимым при любом фиксированном $\rho \geqslant 0$. Заметим, что $C_0(u_0) = C_0(\bar{u}) = y^0$, и $C_0(u_\rho) \geqslant \geqslant a \int\limits_{t_0}^{T} |u_\rho(t)|^p\, dt$, так что

$$\lim_{\rho \to \infty} C_0(u_\rho) = +\infty.$$

Поскольку $C_0(u_\rho)$ непрерывно по ρ, то существует такое $\rho \geqslant 0$, что $C_0(u_\rho) = y_0 + b$, что и требуется.

Чтобы получить оценку, указанную в лемме, заметим, что для каждого допустимого управления $u(t)$

$$|x(T)| \leqslant k_1 + l \int\limits_{t_0}^{T} |u(t)|\, dt,$$

где $k_1 = |\Phi(T)\, x_0|$ и $l = \max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |\Phi(T)\, \Phi^{-1}(t)\, B(t)|$. В силу выпуклости $|u|^p$ как функции от $|u|$ имеем неравенство

$$\left[\int\limits_{t_0}^{T} |u(t)|\, dt\right]^p \leqslant \int\limits_{t_0}^{T} |u(t)|^p\, dt\, |T - t_0|^{p-1}.$$

Таким образом,

$$x^0(T) = C_0(u) \geqslant a \left[\int\limits_{t_0}^{T} |u(t)|\, dt\right]^p \geqslant a \left[\frac{|x(T)| - k_1}{l}\right]^p |T - t_0|^{1-p}.$$

Отсюда следует, что для всех $|x(T)| \geqslant 2k_1$ имеем

$$x^0(T) \geqslant \frac{a}{(2l)^p} |x(T)|^p\, |T - t_0|^{1-p}.$$

Лемма доказана.

Теорема 8. *Рассмотрим систему в R^n, обладающую свойством управляемости:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\, x + B(t)\, u,$$

с критерием качества

$$C_0(u)=\int_{t_0}^{T}[f^0(t, x)+h^0(t, u)]\,dt.$$

Тогда множество достижимости $\hat{K}\subset R^{n+1}$ замкнуто и выпукло.

Доказательство. Доказательство выпуклости множества $\hat{K}$ проводится так же, как и в теореме 1. Для доказательства замкнутости множества $\hat{K}$ воспользуемся неравенством

$$\lim_{k\to\infty}\inf C_0(u_k)\geqslant C_0(\bar{u}),$$

где $u_k(t)$ — последовательность управлений, слабо сходящаяся к $\bar{u}(t)$. Доказательство этого неравенства, которое является выражением одного общего свойства выпуклых функций, приведем в заключительной части доказательства теоремы.

Рассмотрим последовательность точек $\hat{x}_k(T)=(x_k^0(T), x_k(T))$, соответствующую управлениям $u_k(t)$, и сходящуюся к $\hat{\bar{x}}=(\bar{x}^0, \bar{x})$ в R^{n+1}. Поскольку последовательность $x_k^0(T)=C_0(u_k)$ ограничена, то функции $u_k(t)$ лежат внутри некоторого замкнутого шара в банаховом пространстве $L_p(t_0, T)$. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность, которую мы вновь обозначим $u_k(t)$, слабо сходящуюся к $\bar{u}(t)$. Предполагая, что указанное выше неравенство верно, легко получаем, что $\bar{u}(t)$ — допустимое управление с соответствующим ему решением $(\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$ и

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t)=\bar{x}(t),\quad \lim_{k\to\infty}\inf x_k^0(T)\geqslant\bar{x}^0(T).$$

Таким образом, $\bar{x}(T)=\bar{x}$ и $x^0(T)\leqslant\bar{x}^0$. Поскольку множество $\hat{K}$ представляет собой совокупность вертикальных лучей в R^{n+1}, заключаем, что точка x принадлежит $\hat{K}$, и значит, $\hat{K}$ замкнуто.

Докажем теперь использованное нами неравенство. В силу того, что $u_k(t)$ и $\bar{u}(t)$ лежат в некотором замкнутом шаре пространства $L_p(t_0, T)$, они должны быть равномерно ограничены в пространстве $L_1(t_0, T)$ и, значит, для нормы $|x_k(t)|$ и $\bar{x}(t)$ также имеет место некоторая равномерная оценка. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{T}f^0(t, x_k(t))\,dt=\int_{t_0}^{T}f^0(t, \bar{x}(t))\,dt.$$

Итак, остается лишь показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\inf\int_{t_0}^{T}h^0(t, u_k(t))\,dt\geqslant\int_{t_0}^{T}h^0(t, \bar{u}(t))\,dt.$$

Пусть C — некоторое замкнутое подмножество интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$, на котором управление $\bar{u}(t)$ непрерывно, а следовательно, ограничено, а S — компактный шар в R^n, внутри которого содержится $\bar{u}(C)$. Для каждого фиксированного t рассмотрим выпуклую гиперповерхность в R^{m+1}, описываемую уравнением

$$u^0 = h^0(t, u).$$

Для каждого $v \in S$ и t из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$ рассмотрим все опорные гиперплоскости к поверхности $u^0 = h^0(t, u)$ в точке $(v, h^0(t, v))$, т. е. гиперплоскости

$$u^0 = \gamma(t)(u - v) + h^0(t, v).$$

Множество H всех таких гиперплоскостей является компактным подмножеством $(2m+1)$-мерного евклидова пространства с координатами (t, v, γ). Поскольку ни одна из опорных гиперплоскостей не является вертикальной, то ясно, что имеет место равномерная оценка

$$|\gamma| \leqslant C_1 \text{ в } H.$$

Зададимся теперь некоторым $\varepsilon > 0$ и определим управление

$$v(t) = v_1 X_{E_1}(t) + v_2 X_{E_2}(t) + \ldots + v_q X_{E_q}(t) \quad \text{для} \quad t \in C,$$

и $v(t) = \bar{u}(t)$, если t не принадлежит C. Здесь под $X_{E_1}(t)$, $X_{E_2}(t) \ldots X_{E_q}(t)$ понимаются характеристические функции непересекающихся измеримых множеств $E_1, \ldots, E_q$, на которые разбито C, а постоянные векторы $v_1, \ldots, v_q$ выбраны так, что

$$|\bar{u}(t) - v(t)| < \varepsilon |T - t_0 + 1|^{-1} C_1^{-1}, v(t) \subset S,$$

и

$$|h^0(t, \bar{u}(t)) - h^0(t, v(t))| < \varepsilon |T - t_0 + 1|^{-1}.$$

Для каждого $t \in E_1$ построим опорную гиперплоскость к гиперповерхности $u^0 = h^0(t, u)$ в точке $(v_1, h^0(t, v_1))$. Пусть ее уравнение

$$u^0 - h^0(t, v_1) = \gamma_1(t)(u - v_1).$$

Можно считать, что функция $\gamma_1(t)$ ограничена и измерима на E_1 (см. приложение к главе 2). Так как гиперповерхность $u^0 = h^0(t, u)$ лежит выше своей опорной гиперплоскости, то получим

$$h^0(t, u) - h^0(t, v_1) \geqslant \gamma_1(t)(u - v_1) \quad \text{для всех} \quad u \in R^m.$$

Таким образом, для $t \in E_1$ имеем

$$h^0(t, u_k(t)) - h^0(t, v_1) \geqslant \gamma_1(t)(u_k(t) - v_1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Используя аналогичные неравенства для каждого из множеств $E_2, \ldots, E_q$, а также разложение

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) X_{E_1}(t) + \gamma_2(t) X_{E_2}(t) + \ldots + \gamma_q(t) X_{E_q}(t),$$

получим

$$\int\limits_C h^0(t,\ u_k(t))\,dt \geqslant \int\limits_C h^0(t,\ v(t))\,dt + \int\limits_C \gamma(t)(u_k(t) - v(t))\,dt.$$

Для больших $k \to \infty$ в силу слабой сходимости имеем

$$\left| \int\limits_C \gamma(t)(u_k(t) - \bar{u}(t) + \bar{u}(t) - v(t))\,dt \right| < \varepsilon + \varepsilon.$$

Кроме того, по предыдущей оценке

$$\int\limits_C |h^0(t,\ v(t)) - h^0(t,\ \bar{u}(t))|\,dt < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\int\limits_C h^0(t,\ u_k(t))\,dt \geqslant \int\limits_C h^0(t,\ \bar{u}(t))\,dt - 3\varepsilon.$$

Очевидно, что существует последовательность замкнутых множеств $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \ldots$ такая, что $\lim\limits_{l \to \infty} C_l = [t_0,\ T]$, и на каждом из которых управление $\bar{u}(t)$ непрерывно; повторим наши рассуждения для каждого из них. Поскольку последовательность $\int\limits_{t_0}^{T} h^0(t,\ u_k(t))\,dt$ ограничена, а последовательность $h^0(t,\ \bar{u}(t))\,X_{C_l}(t)$ монотонна по l, то очевидно, что существует предел

$$\lim_{l \to \infty} \int\limits_{C_l} h^0(t,\ \bar{u}(t))\,dt = \int\limits_{t_0}^{T} h^0(t,\ \bar{u}(t))\,dt.$$

Итак, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует константа C_l такая, что

$$\int\limits_{t_0}^{T} h^0(t,\ u_k(t))\,dt \geqslant \int\limits_{C_l} h^0(t,\ u_k(t))\,dt \geqslant \int\limits_{t_0}^{T} h^0(t,\ \bar{u}(t))\,dt - 4\varepsilon$$

для всех достаточно больших k. Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \inf \int\limits_{t_0}^{T} h^0(t,\ u_k(t))\,dt \geqslant \int\limits_{t_0}^{T} h^0(t,\ \bar{u}(t))\,dt.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим систему в R^n, обладающую свойством управляемости*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + C_0(u).$$

Если:

a) *функция* $g(x) > b$, *т. е.* $g(x)$ *ограничена снизу в* R^n *или*

b) *функция* $g(x)$ *выпукла в* R^n,

то для системы ($\mathscr{L}$) *существует оптимальное управление.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 2 и оценок, установленных в лемме предшествующей теореме 3.

Для системы $\mathscr{L}$, обладающей свойством управляемости с критерием качества $C_0(u)$, управление $\bar{u}(t)$, переводящее систему из точки $(0, x_0)$ в граничную точку множества $\hat{K}$ в R^{n+1}, называется *экстремальным управлением*, а соответствующая траектория — *экстремальной траекторией*. Конечно, оптимальное управление системы $\mathscr{L}$ с показателем качества $C(u) = g(x(T)) + C_0(u)$ также переводит систему по траектории $\hat{x}(t) = (x^0(t), x(t))$ в граничную точку множества $\hat{K}$ и, значит, является экстремальным. Как и раньше, мы охарактеризуем экстремальные управления с помощью принципа максимума.

В этой части теории под сопряженным решением, соответствующим $u(t)$ и $x(t)$, мы будем понимать $n+1$-мерный вектор-строку $\hat{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$, координаты которого удовлетворяют линейной системе

$$(\mathscr{A}) \qquad \dot{\eta}_0 = 0, \quad \dot{\eta} = -\eta_0 \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x(t)) - \eta A(t).$$

В дополнение к обычному предположению о непрерывности, упомянутому в начале этого раздела, мы будем в дальнейшем предполагать, что функция $\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x)$ непрерывна на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ при $x \in R^n$. Из свойства выпуклости $f^0(t, x)$ тогда следует, что

$$f^0(t, x) - f^0(t, \bar{x}) \geqslant \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \bar{x})(x - \bar{x}).$$

Теорема 9. *Рассмотрим систему в* R^n, *обладающую свойством управляемости*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt.$$

Управление $\bar{u}(t)$ *с решением* $\bar{x}(t)$ *будет экстремальным в том и только том случае, если существует вектор* $\hat{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$, *удовлетворяющий системе*

$$(\mathscr{A}) \qquad \dot{\eta}_0 = 0, \quad \eta_0 < 0, \quad \dot{\eta} = -\eta_0 \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, \bar{x}(t)) - \eta A(t),$$

и такой, что принцип максимума выполняется почти всюду на интервале $[t_0, T]$:

$$\eta_0 h^0(t, \bar{u}(t)) + \eta(t) B(t) \bar{u}(t) = \max_u [\eta_0 h^0(t, u) + \eta(t) B(t) u].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть управление $\bar{u}(t)$, соответствующее решение $\hat{x}(t) = (\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$, и сопряженное решение $\hat{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$ удовлетворяют системе

$$(\hat{\mathscr{L}}) \qquad \begin{aligned} \dot{} &= A(t)x + B(t)\bar{u}(t), \\ \dot{x}^0 &= f^0(t, x) + h^0(t, \bar{u}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = (0, x_0), \end{aligned}$$

а также системе $\mathscr{A}$ при $\eta_0 < 0$ и сформулированному выше принципу максимума. Мы покажем, что

$$\hat{\eta}(T)\hat{x}(t) \geqslant \hat{\eta}(T)\hat{\omega}(T),$$

где $\hat{\omega}(t) = (\omega^0(t), \omega(t))$ есть решение, соответствующее произвольному допустимому управлению $u(t)$. Из этого неравенства следует, что точка $\hat{x}(T)$ лежит на границе множества $\hat{K}$ и что вектор $\hat{\eta}(T)$ есть внешняя нормаль к $\hat{K}$ в этой точке.

Из уравнений $\hat{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{A}$ следует, что

$$\frac{d}{dt}[\hat{\eta}(t)\hat{\omega}(t)] = \eta_0\dot{\omega}^0 + \dot{\eta}\omega + \eta\dot{\omega}$$

и

$$\hat{\eta}(T)\hat{\omega}(T) - \hat{\eta}(t_0)\hat{x}_0 =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \left\{ \eta_0 \left[f^0(t, \omega) - \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \bar{x})\omega \right] + [\eta_0 h^0(t, u) + \eta B u] \right\} dt.$$

Пусть теперь управление $u(t)$ равняется $\bar{u}(t)$, а решение $\hat{\omega}(t)$ равно $\hat{x}(t)$; тогда получим

$$\hat{\eta}(T)\hat{x}(T) - \hat{\eta}(t_0)\hat{x}_0 =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \left\{ \eta_0 \left[f^0(t, \bar{x}) - \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \bar{x})\bar{x} \right] + [\eta_0 h^0(t, \bar{u}) + \eta B u] \right\} dt.$$

Из принципа максимума и условия выпуклости следует, что

$$\eta_0 h^0(t, \bar{u}(t)) + \eta(t) B(t)\bar{u}(t) \geqslant \eta_0 h^0(t, u(t)) + \eta(t) B(t) u(t)$$

и

$$f^0(t, \omega) - f^0(t, \bar{x}) \geqslant \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, \bar{x})(\omega - \bar{x}),$$

откуда вытекает, что $\hat{\eta}(T)\hat{x}(T) \geqslant \hat{\eta}(T)\hat{\omega}(T)$. Тем самым $\bar{u}(t)$ является экстремальным управлением.

Обратно, предположим, что $\bar{u}(t)$ — экстремальное управление, так что соответствующая траектория $\hat{x}(t)=(\bar{x}^0(t),\ \bar{x}(t))$ ведет из точки $(0,\ x_0)$ в точку $\hat{x}(T)$, лежащую на границе множества $\hat{K}$. Пусть $\hat{\eta}(T)=(\eta_0,\ \eta(T))$ — внешняя нормаль к $\hat{K}$ в точке $\hat{x}(T)$. Очевидно, что $\eta_0<0$; для простоты примем $\eta_0=-1$. Определим $\hat{\eta}(t)$ как решение сопряженной системы $\mathcal{A}$ с заданными граничными условиями $\hat{\eta}(T)$ при $t=T$. Требуется доказать, что

$$-h^0(t,\ \bar{u}(t))+\eta(t)B(t)\bar{u}(t)=\max_u[-h^0(t,\ u)+\eta(t)B(t)u]$$

почти всюду на интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$.

Доказательство усложняется из-за того, что сопряженная система $\mathcal{A}$ зависит от основного решения $\bar{x}(t)$. Чтобы обойти эту трудность, мы введем одно построение, которое в дальнейшем будет применено при доказательстве принципа максимума для наиболее общих нелинейных систем. Сущность этого метода состоит в том, что в течение некоторого короткого промежутка времени $t_1\leqslant t\leqslant t_1+\varepsilon$ на управление $\bar{u}(t)$ накладывается импульсное возмущение; на этом промежутке управление $u^*_\varepsilon(t)$ не удовлетворяет принципу максимума. Возмущенное управление $u^*_\varepsilon(t)$ дает приращение, выражаемое формулой $\int\limits_{t_0}^{T}[\eta_0 h^0(t,\ u)+\eta(t)\times\times B(t)u]\,dt$ при вычислении $\hat{\eta}(T)\hat{\omega}(T)$, что противоречит предположению о том, что $\hat{x}(T)$ лежит на границе $\hat{K}$.

Изложим теперь это доказательство подробно. Предположим, что управление $\hat{u}(t)$ не удовлетворяет принципу максимума в течение некоторого положительного промежутка времени из интервала $t_0\leqslant t\leqslant T$. Определим управление $\tilde{u}(t)$ по формуле

$$-h^0(t,\ \tilde{u}(t))+\eta(t)B(t)\tilde{u}(t)=\max_u[-h^0(t,\ u)+\eta(t)B(t)u].$$

Очевидно, что управление $\tilde{u}(t)$ ограничено, и его можно выбрать измеримым, как показано в приложении к главе 2. Пусть C — компактное подмножество ненулевой меры из интервала $t_0<t<T$, на котором управления $\bar{u}(t)$ и $\tilde{u}(t)$ непрерывны, и удовлетворяют неравенству

$$-h^0(t,\ \bar{u}(t))+\eta(t)B(t)\bar{u}(t)<-h^0(t,\ \tilde{u}(t))+\eta(t)B(t)\tilde{u}(t)-\delta$$

для некоторого постоянного $\delta>0$. Выберем момент $t_1\in C$, для которого множество $(t_1,\ t_1+\varepsilon)\cap C$ имеет меру $\varepsilon[1+O(\varepsilon)]$ для

малого $\varepsilon > 0$ $\left[\text{здесь } \lim\limits_{\varepsilon \to 0} O(\varepsilon) = 0\right]$. Определим возмущенное управление

$$u_\varepsilon^*(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t) & \text{на } \quad C \cap (t_1, t_1 + \varepsilon), \\ \bar{u}(t) & \text{в остальной части интервала } t_0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Тогда, для достаточно малых $\varepsilon > 0$, решение $\hat{x}_\varepsilon^*(t)$, соответствующее управлению $u_\varepsilon^*(t)$, равномерно аппроксимирует $\hat{x}(t)$. Точнее, легко показать, что

$$|\hat{x}_\varepsilon^*(t) - \hat{x}(t)| < k\varepsilon \quad \text{для некоторого } k > 0$$

на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Поскольку производная $\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x)$ непрерывна, то

$$|f^0(t, x_\varepsilon^*(t)) - f^0(t, \bar{x}(t)) - \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \bar{x}(t))(x_\varepsilon^*(t) - \bar{x}(t)) < \varepsilon O(\varepsilon).$$

Из предыдущих вычислений для $\hat{\eta}(T)\hat{\omega}(T)$ следует, что

$$\hat{\eta}(T)\hat{x}(T) - \hat{\eta}(T)\hat{x}_\varepsilon^*(T) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{T} \left[f^0(t, x_\varepsilon^*(t)) - f^0(t, \bar{x}(t)) - \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, \bar{x}(t))(x_\varepsilon^*(t) - \bar{x}(t))\right] dt -$$
$$- \delta\varepsilon[1 + O(\varepsilon)].$$

Тогда, для достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\hat{\eta}(T)\hat{x}_\varepsilon^*(T) > \hat{\eta}(T)\hat{x}(T).$$

Однако это невозможно, поскольку $\hat{\eta}(T)$ является внешней нормалью к $\hat{K}$ в граничной точке $\hat{x}(T)$. Следовательно, экстремальное управление $\bar{u}(t)$ должно удовлетворять принципу максимума с сопряженным решением $\hat{\eta}(t)$. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим систему в R^n, обладающую свойством управляемости:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt,$$

где функция $g(x)$ выпукла, а функция $h^0(t, u)$ строго выпукла, т. е. для $0 < \lambda < 1$ и $u_1 \neq u_2$ и для любого фиксированного t

$$h^0(t, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) < \lambda h^0(t, u_1) + (1 - \lambda)h^0(t, u_2).$$

Тогда любые два экстремальных управления, переводящие систему из точки $(0, x_0)$ в одну и ту же граничную точку множества

$\hat{K}$, должны совпадать почти всюду. Кроме того, существует единственное оптимальное управление.

Доказательство. Пусть $\bar{u}(t)$ — экстремальное управление, а $\hat{x}(t) = (\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$ — соответствующее решение. Пусть далее $\hat{\eta}(t) = (-1, \eta(t))$ — соответствующее сопряженное решение, так что вектор $\hat{\eta}(T)$ является внешней нормалью к $\hat{K}$ в точке $\hat{x}(T)$. Тогда управление $\bar{u}(t)$ удовлетворяет принципу максимума

$$-h^0(t, \bar{u}(t)) + \eta(t) B(t) \bar{u}(t) = \max_u [-h^0(t, u) + \eta(t) B(t) u] = m(t).$$

Пусть теперь управление $u(t)$ вдоль соответствующего решения $\hat{\omega}(t)$ переводит систему из $(0, x_0)$ в ту же самую точку $\hat{\omega}(T) = \hat{x}(T)$. Если управление $u(t)$ не удовлетворяет принципу максимума при заданном $\eta(t)$, то

$$\int_{t_0}^{T} [-h^0(t, \bar{u}(t)) + \eta(t) B(t) \bar{u}(t)]\, dt >$$

$$> \int_{t_0}^{T} [-h^0(t, u(t)) + \eta(t) B(t) u(t)]\, dt.$$

Тогда вычисления, проведенные в теореме 9, показывают, что

$$\hat{\eta}(T)\, \hat{x}(T) > \hat{\eta}(T)\, \hat{\omega}(T) = \hat{\eta}(T)\, \hat{x}(T),$$

что невозможно. Таким образом, заключаем, что управления $\bar{u}(t)$ и $u(t)$ удовлетворяют принципу максимума почти всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим теперь управление $\frac{1}{2}[\bar{u}(t) + u(t)]$. Из строгой выпуклости $h^0(t, u)$ следует, что

$$-h^0\left(t, \frac{1}{2}\bar{u}(t) + \frac{1}{2}u(t)\right) + \eta(t) B(t) \frac{1}{2}[\bar{u}(t) + u(t)] >$$

$$> \frac{1}{2} m(t) + \frac{1}{2} m(t)$$

всюду, где $\bar{u}(t) \neq u(t)$. Из предыдущих рассуждений заключаем, что управления $\bar{u}(t)$ и $u(t)$ совпадают почти всюду.

Поскольку $g(x)$ есть выпуклая функция, то должно существовать оптимальное управление $u^*(t)$, являющееся экстремальным и переводящее систему из точки $(0, x_0)$ в то подмножество границы множества $\hat{K}$, где функционал $x^0 + g(x)$ достигает своего минимума. Из теоремы 5 следует, что функционал $x^0 + g(x)$ может достигать минимума лишь в одной точке P множества $\hat{K}$. Следовательно, $u^*(t)$ есть единственное экстремальное управление, пе-

реводящее систему из точки $(0,\ x_0)$ в точку P, что и требовалось доказать.

Замечания. Даже в случае, если $h^0(t,\ u)$ не является строго выпуклой функцией, можно получить вполне определенное экстремальное управление $u^*(t,\ \eta(t))$ для каждого заданного сопряженного решения $\eta(t)$. А именно, для каждого фиксированного t и заданного η следует выбрать $u^*(t,\ \eta)$, исходя из принципа максимума

$$-h^0(t,\ u^*)+\eta B(t)\,u^*=\max_u\,[-h^0(t,\ u)+\eta B(t)\,u].$$

Если функция $h^0(t,\ u)$ строго выпукла при каждом t, то принцип максимума однозначно определяет управление $u^*(t,\ \eta)$. Однако, если даже $h^0(t,\ u)$ просто выпуклая функция, то можно однозначно определить $u^*(t,\ \eta)$, выбрав среди точек R^m, удовлетворяющих принципу максимума, точку с наименьшими координатами. Иначе говоря, выберем $u^*(t,\ \eta)=(u^{*1},\ u^{*2},\ \ldots,\ u^{*m})$ так, чтобы u^{*1} было минимальным из всех возможных решений принципа максимума, затем выберем u^{*2} минимальным среди всех решений с выбранным значением u^{*1} и так далее, пока не получим $u^*(t,\ \eta)$. Если вектор-функция $\eta(t)$ непрерывна, то $u^*(t)=u^*(t,\ \eta(t))$ будет приемлемым управлением (см. приложение к главе 2).

Следующая теорема показывает, что $u^*(t,\ \eta)$ можно интерпретировать как оптимальное управление, определенное на основе синтеза цепи обратной связи.

Теорема 10. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u,$$

с критерием качества

$$C(u)=g(x(T))+\int_{t_0}^{T}[f^0(t,\ x)+h^0(t,\ u)]\,dt.$$

Предположим, что функция $g(x)\in C^1$ *выпукла в* R^n. *Тогда существует решение* $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ *системы уравнений*

$$\dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u^*(t,\ \eta),$$
$$\dot{\eta}=\frac{\partial f^0}{\partial x}(t,\ x)-\eta A(t),$$

такое, что $x(t_0)=x_0$, $\eta(T)=-\operatorname{grad} g(x(T))$. *Здесь управление* $u^*(t,\ \eta)$ *определено из принципа максимума*

$$-h^0(t,\ u^*)+\eta B(t)\,u^*=\max_u\,[-h^0(t,\ u)+\eta B(t)\,u],$$

а $u^*(t)=u^*(t,\ \eta^*(t))$ *является оптимальным управлением с соответствующей оптимальной траекторией* $x^*(t)$.

Если функция $h^0(t, u)$ строго выпукла при любом t, то решение $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ единственно, и $u^*(t)$ есть единственное оптимальное управление.

Доказательство. Рассмотрим гиперповерхности S_c: $x^0+g(x)=C$ в R^{n+1}. Тогда, как и в теореме 5, существует единственная гиперповерхность S_m из этого семейства, такая, что S_m касается $\hat{K}$, а m есть оптимальное значение критерия качества. Пусть $\hat{\eta}^*(T)=(-1, \eta^*(T))$ — нормаль к касательной гиперплоскости к S_m в некоторой точке $P\in S_m\cap\hat{K}$. Пусть, далее, $u^*(t)$ — экстремальное управление, переводящее систему из точки $(0, x_0)$ в точку $P=\hat{x}^*(T)$ вдоль траектории $\hat{x}^*(t)=(x^{0*}(t), x^*(t))$. Определим $\hat{\eta}^*(t)=(-1, \eta^*(t))$ как решение системы

$$\dot{\eta}=\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x^*(t))-\eta A(t),$$

удовлетворяющее условию $\eta^*(T)=-\operatorname{grad} g(x^*(T))$.

Из теоремы 9 следует, что управление $u^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума с сопряженным решением $\eta^*(t)$, т. е. $u^*(t)=$ $=u^*(t, \eta^*(t))$. Таким образом, $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ есть искомое решение указанной выше нелинейной краевой задачи.

Если $h^0(t, u)$ — строго выпуклая функция от u при любом фиксированном t, то множество $S_m\cap\hat{K}$ содержит единственную точку P, как показано в процессе доказательства теоремы 5. Тогда из следствия из теоремы 9 вытекает, что оптимальное управление $u^*(t)$ и соответствующее ему решение $x^*(t)$ единственны. Точно так же и $\eta^*(t)$ определяется однозначно, как решение линейной системы дифференциальных уравнений с граничными условиями $\eta(T)=-\operatorname{grad} g(x^*(T))$. Теорема доказана.

Примечания к задаче с подвижными концами. Рассмотрим систему в R^n, обладающую свойством управляемости

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)x+B(t)u,$$

с критерием качества

$$C(u)=g(x(T))+C_0(u),$$

как и в теореме 10. Мы хотим перевести систему из начального состояния x_0 в заданное целевое состояние $x_1\in R^n$ с минимальным значением критерия качества. Будем считать $h^0(t, u)$ строго выпуклой функцией при любом фиксированном t из интервала $t_0\leqslant t\leqslant T$.

При этих условиях система обладает единственным оптимальным управлением $u^*(t)$, переводящим ее из точки x_0 в точку x_1. Действительно, рассмотрим подмногообразие l: $x=x_1$ в R^{n+1}. Здесь $l\cap\hat{K}$ есть отрезок вертикальной прямой. Тогда $u^*(t)$ переводит

систему из точки $(0, x_0)$ в точку $(x^{0*}(T), x_1)$, где $x^{0*}(T)$ есть самая низкая точка отрезка $l \cap \hat{K}$ и $C(u^*) = g(x_1) + x^{0*}(T)$. Далее, если $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ — некоторое решение системы уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^*(t, \eta),$$
$$\dot{\eta} = \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x) - \eta A(t),$$

такое, что $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_1$, то $u^*(t) = u^*(t, \eta^*(t))$, а $x^*(t)$ представляет собой оптимальное решение, соответствующее $u^*(t)$.

Рассмотрим теперь при тех же предположениях [система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости на $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $h^*(t, u)$ строго выпуклая функция от u при любом t] задачу о приведении системы из начальной точки x_0 в фиксированное компактное выпуклое целевое множество G: $\gamma(x) \leqslant 0$ в R^n. Здесь $\gamma(x)$ — некоторая выпуклая функция класса C^1, причем $\operatorname{grad}\gamma(x) \neq 0$ на границе G, представляющей собой гладкую выпуклую гиперповерхность. Как и в рассуждениях раздела 3.3, рассмотрим цилиндрическое множество $\hat{G} = G \times R^1$ в $n+1$-мерном пространстве с координатами (x^0, x). Поскольку система $\mathscr{L}$ вполне управляема, то множество $\hat{G}$ пересекается с множеством $\hat{K}$ по замкнутому выпуклому множеству, и значит, существует оптимальное управление $u(t)$, переводящее систему из состояния x_0 в G и минимизирующее функционал $C(u)$.

Для того чтобы еще более упростить задачу, предположим, что $g(x) \equiv 0$, так что $C(u) = C_0(u)$. Тогда минимальное значение x^0 достигается в $\hat{G} \cap \hat{K}$ в единственной общей граничной точке $\hat{x}^*(T) = (x^{0*}(T), x^*(T))$ [если только оптимальное управление, минимизирующее $C_0(u)$ вне зависимости от целевого состояния, не будет все же переводить систему из точки x_0 в G; этот особый случай, соответствующий равенству $\eta(T) = 0$ в теореме 10, мы исключаем из рассмотрения, так как он имеет место тогда и только тогда, когда излагаемый ниже метод не дает решения задачи]. Таким образом, существует единственное оптимальное управление $u^*(t)$, переводящее систему из точки x_0 в G, причем соответствующая траектория заканчивается в точке $\hat{x}^*(T)$. В точности как в разделе 3.3, можно получить управление $u^*(t)$ из любого решения $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^*(t, \eta),$$
$$\dot{\eta} = \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x) - \eta A(t),$$

удовлетворяющего условию $x(t_0) = x_0$, $\gamma(x(T)) = 0$, а также условию трансверсальности

$$\eta(T) = -k \operatorname{grad}\gamma(x(T))$$

для некоторого $k > 0$, полагая $u^*(t) = u^*(t, \eta^*(t))$. При этом $x^*(t)$ будет соответствующей оптимальной траекторией.

Пример 1. Скалярное уравнение

$$\dot{x} = x + u$$

описывает простую управляемую динамическую систему; в качестве критерия качества рассмотрим функционал $C(u) = \frac{1}{4}\int_0^1 u^4(t)\,dt$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Задача управления заключается в том, чтобы перевести систему из начального состояния $x(0) = x_0$ в целевое состояние $x(1) = 0$ с минимальным значением критерия качества.

Из принципа максимума следует, что

$$-\frac{u^{*4}}{4} + \eta u^* = \max_u \left[-\frac{u^4}{4} + \eta u\right]$$

или

$$u^* = \sqrt[3]{\eta}.$$

Таким образом, надо решить систему

$$\dot{x} = x + \sqrt[3]{\eta}, \quad \dot{\eta} = -\eta$$

с граничными условиями $x(0) = x_0$, $x(1) = 0$. Поскольку $\eta = \eta_0 e^{-t}$, имеем

$$x = e^t x_0 - \frac{3}{4}\eta_0^{1/3}\left[e^{-t/3} - e^t\right].$$

Граничные условия дают

$$\eta_0^{1/3} = \frac{4x_0}{3}\left(e^{-4/3} - 1\right)^{-1}$$

и оптимальное управление будет иметь вид

$$u^*(t) = \frac{4}{3}x_0\left(e^{-4/3} - 1\right)^{-1} e^{-t/3}.$$

Пример 2. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u,$$

с критерием качества

$$C(u) = \|u\|_p = \left\{\int_{t_0}^{T}\left[|u^1|^p + \ldots + |u^m|^p\right]dt\right\}^{1/p}$$

для некоторого заданного p $(1 < p < \infty)$. Требуется минимизировать функционал $C(u)$, переведя систему из заданного начального состояния x_0 в целевое состояние x_1 в R^n.

Рассмотрим множество $K(k) \subset R^n$ достижимости, соответствующее совокупности управлений, удовлетворяющих условию

$\| u(t) \|_p \leqslant k$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$. Легко показать, что множество $K(k)$ выпукло, компактно и непрерывно расширяется с ростом k, поскольку множество $K(k)$ есть объединение горизонтальных слоев $\hat{K}(x_0, T) \subset R^{n+1}$ при постоянном уровне $x^0 = k^p$.

Наименьшее k, при котором множество $K(k)$ включает в себя точку x_1, будет минимумом критерия качества. Оптимальное управление $u^*(t)$ единственно, как показано в теореме 10 и последующих замечаниях. В случае скалярного управления, $m=1$, надо решить уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^*(t, \eta), \quad \dot{\eta} = -\eta A(t)$$

при граничных условиях $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_1$. Тогда $u^*(t) = u^*(t, \eta(t))$, где

$$u^*(t, \eta) = \begin{cases} \left| \frac{1}{p} \eta B(t) \right|^{\frac{1}{p-1}}, & \text{если} \quad \eta B(t) \geqslant 0, \\ -\left| \frac{1}{p} \eta B(t) \right|^{\frac{1}{p-1}}, & \text{если} \quad \eta B(t) < 0. \end{cases}$$

В предельном случае $p = \infty$ положим $\| u \|_\infty = \sup | u^i(t) |$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ (фактически, $\lim\limits_{p \to \infty} \| u \|_p = \sup | u^i(t) |$, где супремум не учитывает значения на множестве меры нуль[1]).

Для простоты рассмотрим автономную систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с критерием качества

$$C(u) = \| u \|_\infty \quad \text{на интервале} \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

и предположим, что система $\mathscr{L}$ нормальна в m-мерном кубе $|u^i| \leqslant 1$. Как следует из главы 2, множество $K(k)$ является выпуклым, компактным, и непрерывно расширяется с ростом k. Поскольку система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости, то существует такое минимальное k^*, при котором точка $x_1 = 0$ будет впервые принадлежать множеству $K(k^*)$. Таким образом, существует единственное $k^* > 0$, при котором имеется решение системы уравнений

$$\dot{x} = Ax + B \operatorname{sgn}(\eta B)' k, \quad \dot{\eta} = -\eta A,$$

удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$. Единственным оптимальным управлением будет

$$u^*(t) = \operatorname{sgn}(\eta^*(t) B)' k^* \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

---

[1]) То есть $\| u \|_\infty = \max\limits_i (\operatorname{ess} \sup\limits_t | u^i(t) |)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $t \in [t_0, T]$ (*Прим. ред.*)

ибо $u^*(t)$ есть также оптимальное по быстродействию управление, удовлетворяющее ограничению $\|u\|_\infty \leqslant k^*$.

Если отбросить условие, что промежуток времени управления должен быть фиксированным, и рассматривать произвольные конечные интервалы $t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < \infty$, то оптимальное управление может и не существовать. Например, рассмотрим скалярную управляемую систему

$$\dot{x} = u,$$

где требуется перевести систему из состояния $x(0)=0$ в состояние $x(t_1)=1$ за некоторый конечный промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ с минимальным значением показателя качества $C(u)=\|u\|_p$, $1 < p \leqslant \infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим управление

$$u(t) = \frac{\varepsilon}{t+1} \quad \text{на интервале} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|u\|_p = 0$, однако интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon\, dt}{t+1}$ расходится, и значит, хотя и существует интервал $0 \leqslant t \leqslant t_1(\varepsilon)$ такой что $x(t_1(\varepsilon))=1$, но оптимального управления на любом интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1^*$, удовлетворяющего условию $\|u^*(t)\|_p = 0$, не существует.

Примечания к задаче о регулировании на бесконечном интервале. Пусть теперь промежуток времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$ будет бесконечным, при сохранении всех остальных предположений, перечисленных в начале раздела 3.4. Мы объединим все результаты для этого случая в одной большой теореме.

Теорема 11. *Рассмотрим автономную систему в R^n, обладающую свойством управляемости:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с критерием качества

$$C(u) = \int\limits_0^\infty [f^0(x) + h^0(u)]\, dt,$$

где функция $f^0(x) \geqslant 0$ является выпуклой, причем $f^0(x)=0$ тогда *и только тогда, когда $x=0$;* функция *$h^0(u) \geqslant a|u|^p$ строго выпуклая и $h^0(0)=0$. Тогда существует единственное оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$ с соответствующим решением $x^*(t)$.*

Предположим, что ни одно собственное значение матрицы A не имеет нулевой действительной части. Тогда для того, чтобы допустимое управление $\bar{u}(t)$ было оптимальным с соответствующим решением $\bar{x}(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$, необходимо и доста-

точно, чтобы $\bar{u}(t)$ удовлетворяло принципу максимума

$$\bar{\eta}_0 h^0(\bar{u}(t)) + \bar{\eta}(t) B\bar{u}(t) = \max_u [\bar{\eta}_0 h^0(u) + \bar{\eta}(t) Bu]$$

почти всюду, где $\hat{\eta}(t) = (\bar{\eta}_0, \bar{\eta}(t))$ удовлетворяет сопряженной системе уравнений

$$(\mathcal{A}) \qquad \begin{aligned} \dot{\eta}_0 &= 0, \\ \dot{\eta} &= -\eta_0 \frac{\partial f^0}{\partial x}(\bar{x}(t)) - \eta A, \end{aligned}$$

с $\bar{\eta}_0 < 0$ и $\bar{\eta}(\infty) = 0$.

Доказательство. Поскольку система $\mathcal{L}$ обладает свойством управляемости, ее можно перевести из начального состояния x_0 в начало координат при $t=1$, а затем удерживать ее там при помощи управления $u=0$. Таким образом, существует по крайней мере одно допустимое управление, с конечным значением M критерия качества. Построим теперь оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$, как предел слабо сходящейся последовательности оптимальных управлений на конечных интервалах времени.

Считая, что в начальный момент времени $t=0$ система находилась в состоянии x_0, для каждого конечного интервала времени $0 \leqslant t \leqslant k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ обозначим через $u_k^*(t)$ оптимальное управление, минимизирующее критерий качества $C_k(u) = \int_0^k [f^0(x) + h^0(u)]\,dt$. Положим $C_k(u_k^*) = m_k$, и заметим, что $m_k \leqslant m_{k+1} \leqslant M$, поскольку управлению $u_{k+1}^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant k$ не может соответствовать меньшее значение критерия качества, чем управлению $u_k^*(t)$. Так как $\int_0^\infty |u_k^*(t)|^p\,dt \leqslant M/a$ [мы можем положить $u_k^*(t) \equiv 0$ для $t > k$], можно выбрать подпоследовательность $u_{k_i}^*(t)$, слабо сходящуюся к пределу $u^*(t)$ на каждом компактном интервале. Для каждого конечного $T > 0$ будем иметь

$$\int_0^T [f^0(x^*(t)) + h^0(u^*(t))]\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{k_i \to \infty} \inf \int_0^T [f^0(x_{k_i}^*(t)) + h^0(u_{k_i}^*(t))]\,dt \leqslant \lim_{k_i \to \infty} m_{k_i} \leqslant M.$$

Поэтому $u^*(t)$ есть допустимое управление с конечным значением критерия качества $C(u^*) = m \leqslant M$. Покажем теперь, что $m = \lim_{k \to \infty} m_k$, и что $u^*(t)$ — единственное оптимальное управление

на интервале $0 \leqslant t < \infty$. Так как последовательность управлений $u^*_{k_i}(t)$ слабо сходится к $u^*(t)$ на конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, то

$$\int_0^T [f^0(x^*(t)) + h^0(u^*(t))]\, dt \leqslant \liminf_{k_i \to \infty} m_{k_i}$$

и, значит,

$$m \leqslant \lim_{k \to \infty} m_k.$$

Однако никакому допустимому управлению на интервале $0 \leqslant t < \infty$ не может соответствовать значение критерия качества, меньшее m_k (для некоторого k), так как это противоречило бы оптимальности управления $u^*_k(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant k$. Таким образом, $m = \lim\limits_{k \to \infty} m_k$ и управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$ является оптимальным управлением, доставляющим минимум m критерию качества $C(u)$.

Пусть $\bar{u}^*(t)$ — другое оптимальное управление, отличающееся от $u^*(t)$ на некотором ненулевом промежутке времени из интервала $0 \leqslant t < \infty$. Рассмотрим управление $\bar{\bar{u}}^*(t) = \frac{1}{2}[u^*(t) + \bar{u}^*(t)]$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$. В силу строгой выпуклости функции $h^0(u)$

$$C(\bar{\bar{u}}^*) < \frac{1}{2}[C(u^*) + C(\bar{u}^*)] = m,$$

что невозможно. Следовательно, $u^*(t)$ является единственным (почти всюду) оптимальным управлением.

Покажем теперь, что управление $u^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума, причем под сопряженным решением $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ понимается предел соответствующих сопряженных решений для управлений $u^*_{k_i}(t)$ на конечных интервалах времени. Для каждого k_i пусть $\hat{\eta}_{k_i}(t) = (\eta_{0k_i}, \eta_{k_i}(t))$ — есть сопряженное решение, соответствующее $u^*_{k_i}(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant k_i$, где $\hat{\eta}_{k_i}(0)$ есть единичный вектор, $\eta_{0k_i} < 0$, $\eta_{k_i}(k_i) = 0$ и

$$\eta_{0k_i} h^0(u^*_{k_i}(t)) + \eta_{k_i}(t) B u^*_{k_i}(t) = \max_u [\eta_{0k_i} h^0(u) + \eta_{k_i}(t) Bu].$$

Выберем теперь подпоследовательность, сохранив прежнюю нумерацию, так чтобы

$$\lim_{k_i \to \infty} \hat{\eta}_{k_i}(0) = \hat{\eta}^*(0),$$

и определим $\hat{\eta}^*(t)$ как сопряженное решение, соответствующее $u^*(t)$ с этими начальными условиями.

Предположим, что управление $u^*(t)$ не удовлетворяет принципу максимума с вектором $\hat{\eta}^*(t)$ в качестве сопряженного реше-

ния на интервале $0 \leqslant t < \infty$. Тогда для некоторого конечного $T > 0$ и $\delta > 0$ имеем

$$\eta_0^* h^0(u^*(t)) + \eta^*(t) Bu^*(t) + 2\delta < \eta_0^* h^0(\tilde{u}(t)) + \eta^*(t) B\tilde{u}(t),$$

для некоторого управления $\tilde{u}(t)$ на компактном подмножестве Δ длины $\delta > 0$ из интервала $0 \leqslant t \leqslant T$ [можно считать, что управления $u^*(t)$ и $\tilde{u}(t)$ непрерывны и ограничены на Δ]. Тогда для достаточно больших k_i и для $t \in \Delta$ имеем

$$\eta_{0k_i} h^0(u^*(t)) + \eta_{k_i}(t) Bu^*(t) + \delta < \eta_{0k_i} h^0(\overset{*}{u}_{k_i}(t)) + \eta_{k_i}(t) B\overset{*}{u}_{k_i}(t).$$

Это неравенство имеет место, так как вектор-функции $\hat{\eta}_{k_i}(t)$ равномерно аппроксимируют вектор-функции $\hat{\eta}^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, а управление $\overset{*}{u}_{k_i}(t)$ удовлетворяет принципу максимума с вектором $\hat{\eta}_{k_i}(t)$ в качестве сопряженного решения. Отсюда, как и в теореме 9, следует, что

$$\int_0^{k_i} [f^0(x^*(t)) + h^0(u^*(t))]\, dt - \delta^2 > \int_0^{k_i} [f^0(\overset{*}{x}_{k_i}(t)) + h^0(\overset{*}{u}_{k_i}(t))]\, dt = m_{k_i}.$$

Но тогда $C(u^*) \geqslant \delta^2 + m$, что невозможно. Итак, $u^*(t)$ должно удовлетворять принципу максимума на интервале $0 \leqslant t < \infty$ с вектор-функцией $\hat{\eta}^*(t)$ в качестве сопряженного решения.

Покажем теперь, что $\eta_0^* < 0$ и $\hat{\eta}^*(\infty) = 0$. Очевидно, что $\eta_0^* < 0$, так как иначе $\eta_0^* = 0$, и в принцип максимума будет входить линейное однородное условие, которое не может быть выполнено. Заметим, что вектор-функция $\eta^*(t)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta} = -\eta_0^* \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t)) - \eta A.$$

Так как $x^*(\infty) = 0$ [решение, соответствующее любому допустимому управлению, должно стремиться к началу координат; см. упражнение 13 раздела 3.3] и $f^0(x) = 0$ в том и только том случае, когда $x = 0$, то $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t)) = 0$. Действительно, небольшое уточнение этого рассуждения показывает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует момент времени $T > 0$, такой, что $\left| \frac{\partial f^0}{\partial x}(\overset{*}{x}_{k_i}(t)) \right| < \varepsilon$ и $\left| \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t)) \right| < \varepsilon$ для всех $t > T$ и для всех достаточно больших k_i. Напомним также, что

$$\lim_{k_i \to \infty} \eta_{k_i}(t) = \eta^*(t)$$

равномерно на компактных интервалах, и более того, что $\eta_{k_i}(k_i) = 0$. Пользуясь принципом максимума, найдем, что последовательность

$u^*_{k_i}(t)$ сходится к управлению $u^*(t)$, а последовательность $x^*_{k_i}(t)$ сходится к $x^*(t)$, и, следовательно, последовательность $\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i}(t))$ сходится к $\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t))$, причем все это равномерно на любом компактном интервале.

Теперь формула вариации произвольных постоянных дает

$$\eta^*(t)=\eta^*(0)e^{-At}+\int_0^t -\eta_0^* \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(s))\, e^{-A(t-s)}\, ds.$$

Если все собственные значения матрицы A имеют положительную действительную часть $>\lambda>0$, то $|e^{-At}|\leqslant C_1 e^{-\lambda t}$ на интервале $0\leqslant t<\infty$ при постоянном C_1. Пользуясь тем, что $\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t))\to 0$, легко доказать, что $\eta^*(\infty)=0$.

С помощью линейной замены переменных η всегда можно привести матрицу A к виду

$$A=\begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix},$$

где каждое из собственных значений матрицы A_+ имеет положительную действительную часть [и значит, ему соответствуют компоненты вектора $\eta^*(t)$, стремящиеся к нулю при $t\to\infty$], а все собственные значения матрицы A_- имеют отрицательные действительные части. При таком разделении компонент η очевидно достаточно доказать, что $\eta^*(\infty)=0$ для случая, когда $A=A_-$, и мы в дальнейшем рассмотрим именно этот случай. Имеем

$$\eta_{k_i}(k_i)=\left[\eta_{k_i}(0)+\int_0^{k_i} -\eta_{0k_i}\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i}(s))\, e^{As}\, ds\right] e^{-Ak_i}=0,$$

и, значит, $\eta_{k_i}(0)=\int_0^{k_i}\eta_{0k_i}\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i}(s))\, e^{As}\, ds$. Покажем далее, что

$$\eta^*(0)=\int_0^{\infty}\eta_0^*\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(s))\, e^{As}\, ds.$$

Имеем

$$\eta^*(0)=\lim_{k_i\to\infty}\eta_{k_i}(0)=\lim_{k_i\to\infty}\int_0^{k_i}\eta_{0k_i}\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i}(s))\, e^{As}\, ds.$$

Для любого $\varepsilon>0$ существует конечное $T>0$, такое, что $\left|\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i}(t))\right|<\varepsilon$ и $\left|\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t))\right|<\varepsilon$ при $t>T$ и достаточно

больших k_i. Тогда для больших k_i

$$\left|\int_0^\infty \eta_0 \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(s))\, e^{As}\, ds - \int_0^{k_i} \eta_{0\,k_i} \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i}(s))\, e^{As}\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left|\eta_0^* \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(s)) - \eta_{0\,k_i}\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i}(s))\right| |e^{As}|\, ds +$$

$$+\int_T^{k_i}\left|\eta_0^* \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*) - \eta_{0\,k_i}\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*_{k_i})\right| |e^{As}|\, ds +$$

$$+\int_{k_i}^\infty \left|\eta_0^* \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(s))\, e^{As}\right| ds \leqslant \varepsilon + 3\varepsilon \int_T^\infty |e^{As}|\, ds.$$

Следовательно,

$$\eta^*(0) = \int_0^\infty \eta_0^* \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(s))\, e^{As}\, ds$$

и

$$\eta^*(t) = \int_t^\infty \eta_0^* \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(s))\, e^{A(s-t)}\, ds.$$

Поэтому при $t > T$ имеем

$$|\eta^*(t)| \leqslant \varepsilon \int_t^\infty |e^{A(s-t)}|\, ds = \varepsilon \int_0^\infty |e^{A\xi}|\, d\xi,$$

т. е. $\eta^*(\infty) = 0$, что и утверждалось. Наконец, мы докажем, что всякое допустимое управление $\bar{u}(t)$ с соответствующим решением $\bar{x}(t)$ и сопряженным вектором $(\bar{\eta}_0, \bar{\eta}(t))$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$, для которого выполняется принцип максимума, и $\bar{\eta}_0 < 0$, $\bar{\eta}(\infty) = 0$, является единственным оптимальным управлением. Пусть $u(t)$ — произвольное допустимое управление с соответствующим решением $\hat{\omega}(t) = (\omega^0(t), \omega(t))$. Замечая, что $\bar{x}(\infty) = \omega(\infty) = 0$ и используя вычисления, проделанные при доказательстве теоремы 9, получим, что

$$\bar{\eta}_0 \bar{x}^0(T) + \bar{\eta}(T)\bar{x}(T) \geqslant \bar{\eta}_0 \omega^0(T) + \bar{\eta}(T)\omega(T)$$

для каждого конечного $T > 0$. Поскольку каждый из членов этого неравенства имеет предел при $T \to \infty$, а $\bar{\eta}_0 < 0$, то находим, что

$$C(\bar{u}) \leqslant C(u).$$

Итак, $\bar{u}(t)$ является искомым оптимальным управлением. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим задачу построения регулятора для скалярного уравнения

$$\dot{x} = u$$

с критерием качества

$$C(u) = \int_0^\infty \left[\frac{x^4(s)}{4} + \frac{u^2(s)}{2}\right] ds.$$

В этом примере $u^*(t, \eta) = \eta$, как следует из принципа максимума, и соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x} = \eta, \quad \dot{\eta} = x^3.$$

Если $x_0 = 0$, то возьмем $u^*(t) \equiv 0$. Если $x_0 < 0$, то положим $x^*(t) = \left[\frac{1}{x_0} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right]^{-1}$, а $u^*(t) = \eta^*(t) = 2^{-1/2}\left[\frac{1}{x_0} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right]^{-2}$. Если $x_0 > 0$, то $x^*(t) = \left[\frac{1}{x_0} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right]^{-1}$ и $u^*(t) = -2^{-1/2}\left[\frac{1}{x_0} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right]^{-2}$.

Часто бывает важно уметь вычислять u^* в виде цепи обратной связи, т. е. в зависимости от состояния x. Чтобы определить η как функцию x, проинтегрируем уравнение

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{x^3}{\eta} \quad \text{и получим} \quad \eta^2 = \frac{x^4}{2}.$$

Таким образом,

$$u^*(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{\sqrt{2}} & \text{при } x > 0, \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Примечания к задаче с интегральными ограничениями. Рассмотрим линейную систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

которая обладает свойством управляемости на каждом интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T < \infty$. Мы хотим перевести систему из заданного начального состояния x_0 в момент времени t_0 в целевое состояние $x_1 \neq x_0$ за минимальное время T. На различных интервалах $t_0 \leqslant t \leqslant T$ мы вводим ограничения на управления $u(t)$ интегрального вида:

$$C_0(u) = \int_{t_0}^T [f^0(t,x) + h^0(t,u)]\,dt \leqslant 1.$$

Здесь $h^0(t, u)$ строго выпуклая функция, и при каждом $t \geqslant t_0$ выполняются также все остальные обычные условия непрерывности и выпуклости. Предположим, что существует некоторое управление $u(t)$, переводящее систему из точки $x(t_0) = x_0$ в точку $x(T) = x_1$ при $C_0(u) \leqslant 1$.

Пусть $u^{(k)}(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t^k)$ — последовательность таких управлений, где $t^{(k)}$ стремится к T^*, убывая. Продолжим каждое из управлений по формуле $u^{(k)}(t) \equiv 0$ на интервал $t^k \leqslant t \leqslant T^* + 1$. Из неравенства Гёльдера

$$\| u \|_1 \leqslant \| u \|_p | T - t_0 |^{1-1/p} \leqslant \frac{1}{a} C_0(u) | T - t_0 |^{1-1/p}$$

можно заключить, что $T^* > t_0$ и что совокупность интегралов $\int\limits_{t_0}^{T^*+1} | u^{(k)}(t) |^p \, dt$ равномерно ограничена. Поскольку $p > 1$, мы можем выбрать подпоследовательность последовательности $u^{(k)}(t)$, вновь обозначаемую через $u^{(k)}(t)$, которая бы слабо сходилась к управлению $u^*(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T^* + 1$. Очевидно, что $u^*(t) \equiv 0$ на интервале $T^* < t \leqslant T^* + 1$. Легко вычислить для соответствующих решений, что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)}(t) = x^*(t) \quad \text{на интервале} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T^* + 1,$$

а также, что

$$x^*(T^*) = x_1 \text{ и } C_0(u^*) \leqslant 1 \quad \text{на интервале} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T^*.$$

Следовательно, оптимальное управление $u^*(t)$ существует.

Рассмотрим теперь множество достижимости $\hat{K}(x_0, T^*)$ в R^{n+1}. Если $C_0(u^*) < 1$, то существуют $(n+1)$ управлений $u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T^*$, каждое из которых переводит точку x_0 в вершины симплекса, содержащего точку x_1, причем $C_0(u_i) < 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что управления $u_i(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T^* - \varepsilon$ переводят систему из точки x_0 в вершины симплекса, содержащего точку x_1, причем так, что все еще $C_0(u_i) < 1$. Выбрав некоторую выпуклую комбинацию управлений $u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t)$, можно построить управление u $(C_0(u) < 1)$, которое переводит систему из точки x_0 в точку x_1 за время $T^* - \varepsilon$. Но это противоречит оптимальности T^*. Следовательно, $C_0(u^*) = 1$. Более того, $u^*(t)$ среди всех управлений $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, переводящих систему из состояния x_0 в состояние x_1, дает наименьшее значение критерия $C_0(u)$.

Таким образом, оптимальное время T^* есть минимальное время $T > t_0$, такое, что существует решение $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ системы

уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u^*(t, \eta),$$
$$\dot{\eta}=\frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x)-\eta A(t),$$

с граничными условиями $x(t_0)=x_0$, $x(T)=x_1$, так что $C_0(u^*)=1$. Здесь $u^*(t)=u^*(t, \eta^*(t))$ есть оптимальное управление. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

Пример 1. Требуется остановить тележку, движущуюся по гладким рельсам, что соответствует управляемой системе

$$\ddot{x}=u.$$

Наложенное ограничение имеет вид $\int_0^T u^2(t)\,dt\leqslant 1$. Мы хотим перевести систему из начального состояния $x_0=0$, $\dot{x}_0=3$ в точку $(0, 0)$ за минимальное время $T^*>0$. Соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x}^1=x_2, \quad \dot{x}^2=\frac{1}{2}\eta_2, \quad \dot{\eta}_1=0, \quad \dot{\eta}_2=-\eta_1.$$

Решением с начальными условиями $x^1(0)=0$, $x^2(0)=-3$, $\eta_1(0)=$ $=\eta_{10}$, $\eta_2(0)=\eta_{20}$ будет

$$x^1(t)=\frac{1}{2}\left[-\frac{t^3}{6}\eta_{10}+\frac{t^2}{2}\eta_{20}-3t\right], \quad \eta_1(t)=\eta_{10},$$
$$x^2(t)=\frac{1}{2}\left[-\frac{t^2}{2}\eta_{10}+\eta_{20}t-3\right], \quad \eta_2(t)=-\eta_{10}t+\eta_{20}.$$

Из условия на конце $x^1(T)=x^2(T)=0$ получаем

$$\eta_{10}=\frac{18}{T^2}, \quad \eta_{20}=\frac{12}{T}, \text{ так что } u(t)=-\frac{9}{T^2}t+\frac{6}{T}$$

на интервале $0\leqslant t\leqslant T$.

Ограничение $\int_0^T u^2(t)\,dt=1$ позволяет установить минимальное оптимальное время $T^*=9$.

Пример 2. Рассмотрим задачу на быстродействие, в которой ограничение выражается в том, что задается средняя энергия $\alpha^2>0$, которая может быть использована при управлении, т. е.

$$\int_0^T u^2(t)\,dt\leqslant\alpha^2 T.$$

Теория линейных управляемых систем с такими ограничениями

вполне аналогична той, которая излагалась перед примером 1. В качестве примера рассмотрим управляемую систему $\ddot{x}=u$, или систему

$$\dot{x}^1=x^2, \quad \dot{x}^2=u,$$

которую требуется перевести из состояния $(x_0^1, x_0^2)=(0, -3)$ в точку $(0, 0)$ за минимальное время $T^*>0$ так, чтобы удовлетворялось ограничение на среднюю величину энергии. Для этого мы ищем минимальное $T>0$, для которого имеется решение системы

$$\dot{x}^1=x^2, \quad \dot{x}^2=\frac{1}{2}\eta_2, \quad \dot{\eta}_1=0, \quad \dot{\eta}_2=-\eta_1,$$

с граничными условиями $x^1(0)=0$, $x^2(0)=-3$, $x^1(T)=0$, $x^2(T)=0$, причем $\int\limits_0^T u^2\,dt=\alpha^2T$, где $u(t)=\frac{1}{2}\eta_2(t)$. Требование

$$\int\limits_0^T\left(-\frac{9}{T^2}t+\frac{6}{T}\right)^2dt=\alpha^2T$$

дает оптимальное время $T^*=\dfrac{3}{\alpha}$; тем самым $u^*(t)=-\dfrac{9t}{T^{*2}}+\dfrac{6}{T^*}$.

Эти два примера, а также упражнение 3, следующее ниже, иллюстрируют задачи управления со *свободным временем*. Обычный метод состоит в том, что неопределенное свободное время T сводится к фиксированному времени T^* для эквивалентной задачи оптимального управления. В действительности, часто можно принять $T^*=1$ после изменения масштаба, который обычно определяется в процессе решения данной задачи.

Упражнения

1. Для скалярной управляемой системы $\dot{x}=u$ вычислить оптимальное управление $u^*(t)$ с критерием качества:

a) $C(u)=x(1)+\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1(x^4+u^4)\,dt$ при $x(0)=-3^{1/4}\,[\exp 3^{-1/4}]^{-1}$;

b) $C(u)=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^\infty(x^4+u^4)\,dt$ при $x(0)=1$.

2. Рассмотреть демпфированный линейный осциллятор $\ddot{x}+\dot{x}+x=u$ и управление, переводящее систему из точки $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$ в точку $(1, 1)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 2$. Вычислить минимальное значение критерия качества $C(u)=\int\limits_0^2 u^2(t)\,dt$.

3. Рассмотреть систему $\ddot{x} = u$, которую требуется перевести из точки $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 0$ в точку $(0, 0)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ с минимальным значением критерия качества $C(u) = \sup |u(t)|$. Показать, что эта задача может быть сведена к задаче приведения системы из точки $\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ в точку $(0, 0)$ за минимальное время $t^* = 1$ при условии $|u| \leqslant 1$. Наметить решение этой задачи с помощью метода кривых переключения.

4. Показать, что при любых начальных условиях $(x^1(0), x^2(0))$ из множества $S = \{x^1, x^2 \mid x^1 = 0, |x^2| \leqslant 1\}$, система

$$\dot{x}^1 = x^2 + u, \quad \dot{x}^2 = -x^1 - x^2 + u, \quad |u| \leqslant 1,$$

имеет решение, доставляющее минимум функционалу $C(u) = \int\limits_0^T (x^1(t))^2\, dt$ для каждого $T > 0$. Найти соответствующее оптимальное управление $u^*(t)$.

5. В систему

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = -x^1 - x^2 + (u)^3$$

управление входит нелинейно. Рассмотреть в качестве критерия качества функционал $C(u) = \int\limits_0^1 u^4\, dt$ и исследовать возможность сведения такой задачи к задаче оптимального управления, рассмотренной в теореме 10.

6. Рассмотрим скалярную управляемую систему $\dot{x} = x + u$ с критерием качества $C(u) = \int\limits_0^1 |u(t)|\, dt$ при $x(0) = 0$. Показать, что множество достижимости $\hat{K}$ с начальной точкой $x(0) = 0$ не является замкнутым подмножеством в R^m. (Указание: если управление $u(t)$ переводит систему из состояния $x(0) = 0$ в состояние $x(1) = e$, то $\int\limits_0^1 e^{-t} u(t)\, dt = 1$ и значит, $\int\limits_0^1 |u(t)|\, dt > 1$. Но если положить $u_\varepsilon(t) = (1 - e^{-\varepsilon})^{-1}$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ и $u_\varepsilon(t) = 0$ при $\varepsilon < t \leqslant 1$, то легко вычислить, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} C(u_\varepsilon) = 1$. Следовательно, не существует оптимального управления, переводящего систему из состояния $x(0) = 0$ в состояние $x(1) = e$.]

7. Уравнения движения тела в плоском линейном центральном силовом поле имеют вид

$$\ddot{r} = -r + r\dot{\theta}^2 + u, \quad r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} + v,$$

где u и v — радиальная и трансверсальная составляющие управляющей силы (на единицу массы). Требуется перевести тело с круговой орбиты $r = 1$, $\dot{\theta} = 1$ на другую, концентрическую ей орбиту $r = 2$, $\dot{\theta} = 1$, сохраняя $\dot{\theta}(t) \equiv 1$. Найти оптимальное управление, если критерий качества имеет вид $C(u) = \int\limits_0^1 (u^2 + v^2)\, dt$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$.

8. Показать, что для функции $F(x)$ класса C^1 в R^n все следующие условия выпуклости являются эквивалентными:

а) $F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leqslant \lambda F(x_1) + (1 - \lambda) F(x_2)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$;

b) $F(x_1)-F(x_2)\geqslant \frac{\partial F}{\partial x}(x_2)(x_1-x_2)$;

c) множество $x^0+F(x)\leqslant 0$ выпукло в R^{n+1}.

9. Доказать, что функция $h^0(u)=|u^1|^p+|u^2|^p+\ldots+|u^m|^p$ в R^m является выпуклой, если $1\leqslant p<\infty$, и строго выпуклой, если $1<p<\infty$.

10. Доказать, что нижняя граница множества $\hat{K}$, рассмотренного в теореме 8, представляет собой непрерывную гиперповерхность над R^n.

11. Рассмотрим нелинейную управляемую систему в R^n:

$$\dot{x}=A(t)x+h(t,u),\qquad x(t_0)=x_0,$$

с критерием качества $C_0(u)=x^0(T)$, где

$$\dot{x}^0=f^0(t,x)+h^0(t,u)\quad \text{и}\quad x^0(t_0)=0.$$

Предположим, что $A(t)$, $h(t,u)$, $f^0(t,x)$, $h^0(t,u)$ и $(\partial f^0/\partial x)(t,x)$ непрерывны по всем аргументам. Предположим также, что $f^0(t,x)$ выпуклая функция при любом фиксированном t, и рассмотрим управления $u(t)$ на фиксированном интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$. Пусть $u^*(t)$ — допустимое управление с соответствующим решением $x^*(t)$, удовлетворяющее принципу максимума

$$-h^0(t,u^*)+\eta(t)h(t,u^*)=\max_u[-h^0(t,u)+\eta(t)h(t,u)]$$

для почти всех t, где $\eta(t)$ есть решение системы

$$\dot{\eta}=\frac{\partial f^0}{\partial x}(t,x^*(t))-\eta A(t),$$

и $\eta(T)=0$. Доказать, что $u^*(t)$ — оптимальное управление.

12. Рассмотрим линейную управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=A(t)x+B(t)u,\qquad x(t_0)=x_0,$$

с критерием качества $C_0(u)=x^0(T)$, где

$$\dot{x}^0=f^0(t,x)+h^0(t,u),\quad x^0(t_0)=0,$$

как и в теореме 9. Предположим, что система обладает допустимыми управлениями $u(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$, с соответствующими решениями $x(t)$, лежащими внутри некоторого заданного выпуклого замкнутого множества $\Delta\subset R^n$, и будем искать среди них оптимальное управление.

Для решения такой задачи с *ограниченными фазовыми координатами* рассмотрим выпуклую непрерывную функцию $F(x)$ в R^n, причем $F(x)=0$ на Δ и $F(x)>0$ вне Δ. Рассмотрим модифицированный критерий качества

$$C_\lambda(u)=\int_{t_0}^{T}[f^0(t,x)+h^0(t,u)+\lambda F(x)]\,dt$$

для больших $\lambda>0$. Пусть $u^*_\lambda(t)$ — оптимальное управление (не зависящее от Δ) для каждого $\lambda>0$, и предположим, что

$$\lim_{k\to\infty}u^*_{\lambda_k}(t)=u^*(t)$$

для некоторой подпоследовательности таких управлений, сходящейся в $L_1(t_0,T)$. Доказать, что $u^*(t)$ — допустимое управление, т. е. $C_0(u^*)<\infty$ и $x^*(t)\subset\Delta$. Доказать, что $u^*(t)$ — оптимальное управление данной задачи с ограниченными фазовыми координатами.

13. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [\alpha(t) + \beta(t)x + f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt,$$

где функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ непрерывны на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и выполняются все остальные обычные условия непрерывности и выпуклости (без предположения об управляемости системы $\mathscr{L}$). Сформулировать и доказать теоремы, аналогичные теоремам 8, 9 и 10.

14. Рассмотрим автономную управляемую систему в R^n:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

с начальным состоянием x_0 при $t_0 = 0$ для каждого интегрируемого с квадратом управления $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Получить оценку

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T,\ 1 \leqslant i \leqslant n} |x^i(t)| \leqslant M\left(\int_0^T [u(s)]^2\, ds\right)^{1/2}.$$

Здесь

$$M = \max_i \left(\int_0^T w_i^2(T, s)\, ds\right)^{1/2}$$

есть константа, где $(w_{ij}(t, s)) = e^{A(t-s)}B$,

$$w_i^2 = \sum_{j=1}^{m} w_{ij}^2, \quad u^2 = \sum_{j=1}^{m} |u^j|^2.$$

3.5. Интегральный выпуклый критерий качества при ограниченных управлениях

Мы будем рассматривать теперь линейные управляемые системы в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с интегральными критериями качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt.$$

Мы примем здесь следующие предположения: $A(t)$ и $B(t)$ — действительные непрерывные матрицы на заданном конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$; функции $g(x)$, $f^0(t, x)$ и $h^0(t, u)$ непрерывны при всех значениях аргументов $u \in R^m$, $x \in R^n$. Кроме того, $f^0(t, x)$ и $h^0(t, u)$ — выпуклые функции при любых фиксированных t из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Дополнительно к этим предположениям, которыми мы пользовались и в разделе 3.4, мы еще будем предполагать, что каждое управление $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$

лежит в некотором заданном выпуклом компактном множестве $\Omega \subset R^m$. Это ограничение $u(t) \subset \Omega$ дает возможность обойтись без каких-либо условий положительности или ограниченности роста на функции $f^0(t, x)$ и $h^0(t, u)$. Для простоты изложения будем также считать, что задача $(\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, T)$ является нормальной. Тогда область достижимости $K(T)$ в R^n будет строго выпуклым компактным множеством с непустой внутренностью (предполагаем, что Ω содержит более одной точки; см. теорему 3 главы 2). Тогда система $\mathscr{L}$ будет обладать свойством управляемости, и далее, каждая граничная точка $K(T)$ может быть достигнута с помощью единственного экстремального управления.

Мы воспользуемся здесь методами, разработанными в разделе 3.4. А именно, прежде всего рассмотрим случай, когда $g(x) \equiv 0$ и рассмотрим множество достижимости $\hat{K} \subset R^{n+1}$, состоящее из всех концов $\hat{x}(T)$ траекторий $\hat{x}(t)$, исходящих из точки $\hat{x}(t_0) = (0, \ x_0)$. Здесь $\hat{x}(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u(t), \quad \dot{x}^0 = f^0(t, x) + h^0(t, u)$$

при любом измеримом управлении $u(t) \subset \Omega$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Таким образом, $x^0(T) = C_0(u)$ и $x(T)$ определяется из формулы вариации произвольных постоянных

$$x(t) = \Phi(t)\,x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,B(s)\,u(s)\,ds.$$

Поскольку управление $u(t)$ принадлежит компактному ограничивающему множеству Ω, то множество достижимости $\hat{K}$ ограничено в R^{n+1}. Проекция множества $\hat{K}$ на пространство R^n с координатами x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть как раз множество $K(T)$, однако верхняя граница множества $\hat{K}$ может быть весьма неправильной формы. Поскольку мы ищем управление с минимальным значением критерия качества, то нас интересует лишь нижняя граница множества $\hat{K}$. Мы докажем, что эта нижняя граница представляет собой выпуклую гиперповерхность, определенную на множестве $K(T)$.

Определение. Пусть $\hat{K} \subset R^{n+1}$ — множество достижимости для управляемой системы

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u,$$

соответствующее критерию качества

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(t,x) + h^0(t,u)]\,dt$$

и выпуклому компактному ограничивающему множеству $\Omega \subset R^m$. Множество $\hat{K}_v$, состоящее из точек $(x^0, x) \in R^{n+1}$, для которых имеются точки $(y^0, x) \in \hat{K}$ такие, что $y^0 \leqslant x^0$, назовем *вертикальным насыщением* множества $\hat{K}$. Тогда нижняя граница множества $\hat{K}_v$, очевидно, совпадает с нижней границей множества $\hat{K}$, и управление, а также соответствующая ему траектория, приводящая систему в точку из этой границы, называются *экстремальными*.

Теорема 12. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt$$

и компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. *Пусть* $\hat{K} \subset R^{n+1}$ — *множество достижимости. Тогда его вертикальное насыщение* $\hat{K}_v$ *будет замкнутым выпуклым множеством в* R^{n+1}. *Нижняя граница множества* $\hat{K}_v$ *принадлежит* $\hat{K}$ *и представляет собой выпуклую гиперповерхность, определенную на множестве* $K(T) \subset R^n$.

Доказательство. Для доказательства замкнутости множества $\hat{K}_v$ рассмотрим последовательность точек $\hat{y}_k = (y_k^0, y_k)$ в $\hat{K}_v$, сходящуюся к $(\bar{y}^0, \bar{y})$ в R^{n+1}. Так как $\hat{K}_v$ является вертикальным насыщением множества $\hat{K}$, то мы можем найти последовательность управлений $u^{(k)}(t)$ с соответствующими решениями $\hat{x}_k(t)$, таких, что $x_k(T) = y_k$ и $x_k^0(T) \leqslant y_k^0$. Далее, можно считать, что некоторая подпоследовательность $u^{(k)}(t)$ слабо сходится к допустимому управлению $\bar{u}(t) \subset \Omega$ и соответствующие решения $x_k(t)$ сходятся к $\bar{x}(t)$, как в главе 2. Из неравенства, полученного в теореме 8, вытекает, что

$$\bar{y}^0 \geqslant \liminf_{k \to \infty} x_k^0(T) \geqslant \bar{x}^0(T).$$

Следовательно, траектория $(\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$, соответствующая управлению $\bar{u}(t)$, переведет систему в точку $(\bar{x}^0(T), \bar{y}) \in \hat{K}$. Поэтому точка $(\bar{y}^0, \bar{y})$ лежит в $\hat{K}_v$ и $\hat{K}_v$ замкнуто в R^{n+1}.

Предположим теперь, что точка $(\bar{y}^0, \bar{y})$ лежит на нижней границе множества $\hat{K}$. Тогда, повторяя те же рассуждения, получим, что $\bar{x}^0(T) = \bar{y}^0$ и $\bar{x}(T) = \bar{y}$, так что управление $\bar{u}(t)$ переводит сис-

тему из состояния $(0,\ x_0)$ в состояние $(\bar{y}^0,\ \bar{y})$. Следовательно, нижняя граница множества $\hat{K}_v$ принадлежит $\hat{K}$.

Доказательство того, что нижняя граница $\hat{K}$ является выпуклой гиперповерхностью над $K(T)$ и, значит, $\hat{K}_v$ является выпуклым множеством в R^{n+1}, проводится так же, как в теореме 8 этой главы. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим управляемую систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt$$

и компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. Тогда система обладает оптимальным управлением.

Доказательство. Мы ищем минимум действительной непрерывной функции $g(x) + x^0$ на ограниченном множестве $\hat{K} \subset R^{n+1}$. Поскольку функция $g(x) + x^0$ монотонно убывает по x^0 для каждого фиксированного x, то нижняя грань $g(x) + x^0$ как раз и будет минимумом $g(x) + x^0$ на нижней границе множества $\hat{K}$. Используя неравенство предыдущей теоремы, мы получим, что искомый минимум достигается, что и требовалось доказать.

Оптимальное управление $u^*(t)$ для системы $\mathscr{L}$ с критерием качества $C(u) = g(x(T)) + C_0(u)$ и ограничивающим множеством Ω должно переводить систему из точки $(0,\ x_0)$ в некоторую точку нижней границы множества $\hat{K}$ и, следовательно, $u^*(t)$ должно быть экстремальным управлением. Как и раньше, экстремальные управления будут характеризоваться принципом максимума. Предположим, что производная $(\partial f^0/\partial x)(t,\ x)$ непрерывна, и заметим, что из предположения о выпуклости следует, что

$$f^0(t,\ x) - f^0(t,\ \bar{x}) \geqslant \frac{\partial f^0}{\partial x}(t,\ \bar{x})(x - \bar{x}).$$

Теорема 13. *Рассмотрим нормальную управляемую систему в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C_0(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\, dt$$

и выпуклым компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. Управление $\bar{u}(t)$ с соответствующим решением $x(t)$ будет экстремальным в том и только том случае, если существует ненулевой $n+1$-мерный вектор-строка $\hat{\eta}(t) = (\eta_0,\ \eta(t))$, удовлетворяющий

системе уравнений

$$(\mathcal{A}) \qquad \begin{aligned} &\dot{\eta}_0 = 0, \quad \eta_0 \leqslant 0, \\ &\dot{\eta} = -\eta_0 \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, \bar{x}(t)) - \eta A(t), \end{aligned}$$

и принципу максимума

$$\eta_0 h^0(t, \bar{u}(t)) + \eta(t) B(t) \bar{u}(t) = \max_{u \in \Omega} [\eta_0 h^0(t, u) + \eta(t) B(t) u]$$

почти всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Пусть управление $\bar{u}(t)$ с решением $\hat{x}(t) = (\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$ и сопряженным решением $\hat{\eta}(t) = (\eta_0, \eta(t))$ удовлетворяет системам $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ и принципу максимума. Тогда, как и в теореме 9, мы получим, что $\hat{\eta}(T)\hat{x}(T) \geqslant \hat{\eta}(T)\hat{\omega}(T)$, где $\hat{\omega}(T)$ — решение, соответствующее произвольному допустимому управлению $u(t)$. Из этого неравенства следует, что точка $\hat{x}(T)$ лежит на нижней границе множества $\hat{K}$, если $\eta_0 < 0$, и на боковой границе множества $\hat{K}_v$, если $\eta_0 = 0$. Но если $\eta_0 = 0$, то решение $\bar{x}(t)$ системы $\mathcal{L}$ является экстремальным (в смысле главы 2) и, значит, $\bar{x}(t)$ лежит на границе множества $K(T)$ в R^n. Более того, поскольку задача $\{\mathcal{L}, \Omega, x_0, t_0, T\}$ нормальна, то $\bar{u}(t)$ является единственным управлением, переводящим систему из точки x_0 в граничную точку $\bar{x}(T)$. Следовательно, $\hat{x}(T) = (\bar{x}^0(T), \bar{x}(T))$ является единственной точкой множества $\hat{K}$, лежащей выше $\bar{x}(T)$. Итак, $\hat{x}(T)$ лежит на нижней границе множества $\hat{K}$ в любом случае, и значит, $\bar{u}(t)$ есть экстремальное управление.

Обратно, предположим, что $\bar{u}(t)$ — экстремальное управление, так что соответствующая ему траектория $\hat{x}(t) = (\bar{x}^0(t), \bar{x}(t))$ исходит из точки $(0, x_0)$ и заканчивается в точке $\hat{x}(T)$ на нижней границе множества $\hat{K}$. Пусть $\hat{\eta}(T) = (\eta_0, \eta(T))$ — внешняя нормаль к выпуклому множеству $\hat{K}_v$ в точке $\hat{x}(T)$. Очевидно, что $\eta_0 \leqslant 0$ и $\eta_0 = 0$ в том случае, когда точка $\bar{x}(T)$ лежит на границе множества $K(T)$. Определим вектор $\hat{\eta}(t)$ как решение сопряженной системы $\mathcal{A}$ с заданными граничными условиями $\hat{\eta}(T)$ при $t = T$. Надо доказать, что почти всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$

$$\eta_0 h^0(t, \bar{u}(t)) + \eta(t) B(t) \bar{u}(t) = \max_{u \in \Omega} [\eta_0 h^0(t, u) + \eta(t) B(t) u].$$

Если $\eta_0 = 0$, то $\eta(T)$ есть внешняя нормаль к $K(T)$ в точке $\bar{x}(T)$ и, значит, принцип максимума выполняется, как и в главе 2.

Если $\eta_0 < 0$, то доказательство проводится так же, как и в теореме 9. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим нормальную управляемую систему*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\,dt$$

и с компактным выпуклым ограничивающим множеством Ω *в* R^m. *Здесь* $g(x)$ — *выпуклая функция, а* $h^0(t, u)$ — *строго выпуклая функция при любом* t. *Тогда любые два экстремальных управления, переводящие систему из состояния* $(0, x_0)$ *в одну и ту же граничную точку множества* $\hat{K}$, *должны совпадать почти всюду. Иначе говоря, существует единственное оптимальное управление.*

Доказательство. Рассмотрим два экстремальных управления, $\bar{u}_1(t)$ и $\bar{u}_2(t)$, переводящие систему из состояния $(0, x_0)$ в одну и ту же точку $\hat{x}(T)$ нижней границы множества $\hat{K}$. Если $(\eta_0 = 0, \eta(T))$ определяет внешнюю нормаль к $\hat{K}_v$ в точке $\hat{x}(T)$, то из нормальности задачи $\{\mathscr{L}, \Omega, x_0, t_0, T\}$ следует, что $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_2(t)$ почти всюду. Если $\eta_0 < 0$ для внешней нормали в точке $\hat{x}(T)$, то можно применить доказательство следствия к теореме 9, и получить, что $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_2(t)$.

Единственность оптимального управления следует, как и в теореме 5, из того факта, что функционал $x^0 + g(x)$ принимает минимальное значение в единственной точке множества $\hat{K}$, что и требовалось доказать.

Как и в рассуждениях раздела 3.4, мы можем определить вектор $u^*(t, \eta)$ по принципу максимума (для случая $\eta_0 = -1$):

$$-h^0(t, u^*) + \eta B(t) u^* = \max_{u \in \Omega} [-h^0(t, u) + \eta B(t) u].$$

Если вектор-функция $\eta(t)$ непрерывна, то $u^*(t) = u^*(t, \eta(t))$ является допустимым управлением из Ω.

Следующая теорема показывает, как можно интерпретировать управление $u^*(t, \eta)$ как управление в цепи обратной связи для задачи синтеза оптимального управления.

Теорема 14. *Рассмотрим нормальную управляемую систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} [f^0(t, x) + h^0(t, u)]\,dt$$

и компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. *Предположим, что* $g(x) \in C^1$ — *выпуклая функция* R^n. *Тогда существует решение* $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ *системы уравнений*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^*(t, \eta),$$
$$\dot{\eta} = \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x) - \eta A(t)$$

с граничными условиями $x(t_0) = x_0$, $\eta(T) = -\operatorname{grad} g(x(T))$. Здесь *управление* $u^*(t, \eta)$ *определяется из принципа максимума*

$$-h^0(t, u^*) + \eta B(t)u^* = \max_{u \in \Omega} [-h^0(t, u) + \eta B(t)u].$$

Оптимальное управление $u^*(t) = u^*(t, \eta^*(t))$ *с соответствующим оптимальным решением* $x^*(t)$. *Если* $h^0(t, u)$ *строго выпуклая функция от* u *для всех* t, *то решение* $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ *единственно, и* $u^*(t)$ *является единственным оптимальным управлением.*

Доказательство. Среди гиперповерхностей семейства S_c $x^0 + g(x) = c$ в R^{n+1} имеется в точности одна (а именно, S_c при $c = m$), которая касается множества $\hat{K}_v$, и m есть оптимальное значение критерия качества. Поверхность S_m касается множества $\hat{K}_v$ в некоторой точке P, лежащей на нижней границе множества $\hat{K}$. Касательная гиперплоскость к S_m является также опорной гиперплоскостью к $\hat{K}_v$ в точке P, и поэтому можно считать вектор $\hat{\eta}^*(T) = (-1, \eta^*(T))$ нормалью к этой гиперплоскости. Пусть $u^*(t)$ — экстремальное управление, переводящее систему из точки $(0, x_0)$ в точку $P = \hat{x}^*(T)$ вдоль траектории $\hat{x}^*(t) = (x^{0*}(t), x^*(t))$. Пусть $\hat{\eta}^*(t) = (-1, \eta(t))$ определяется как решение системы

$$\dot{\eta} = \frac{\partial f^0}{\partial x}(t, x^*(t)) - \eta A(t),$$

удовлетворяющее условию $\eta^*(T) = -\operatorname{grad} g(x^*(T))$. По теореме 13 находим, что $u^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума при сопряженном решении $\hat{\eta}^*(t) = (-1, \eta^*(t))$, т. е. $u^*(t) = u^*(t, \eta^*(t))$.

Если $h^0(t, u)$ строго выпуклая функция от u для каждого t, то гиперповерхность S_m касается $\hat{K}$ лишь в одной точке P. В этом случае $u^*(t)$, $x^*(t)$, а значит, и $\eta^*(t)$ определены однозначно. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, как можно свести задачу на быстродействие с интегральными ограничениями к задаче с интегральным критерием качества.

Пример. Рассмотрим нормальную управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с компактным выпуклым ограничивающим множеством Ω: $|u^j| \leqslant 1$,

$j=1, 2, \ldots, m$. Требуется перевести систему из начального состояния x_0 в момент времени t_0 в точку $x_1 \neq x_0$ за минимальное время $T^* > t_0$. Кроме того, задано интегральное ограничение

$$C_0(u) = (\| u \|_p)^p = \int_{t_0}^{T} [| u^1 |^p + \ldots + | u^m |^p] \, dt \leqslant M$$

для $1 \leqslant p < \infty$ и данной границы M. Для каждого $T > t_0$ рассмотрим соответствующее множество достижимости $\hat{K}(T)$, состоящее из концов траекторий $\hat{x}(T) = (x^0(T), x(T))$. Здесь $x(t)$ есть решение системы $\mathscr{L}$, отвечающее управлению $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и $x^0(T) = (\| u \|_p)^p$, где $u(t) \subset \Omega$. Изучим ограниченное множество $\hat{K}(T) \cap [x^0 \leqslant M]$.

Сначала покажем, что $\hat{K}(T)$ выпукло, компактно и непрерывно зависит от T. В силу принципа релейного управления каждая точка из множества $K(T)$, являющегося проекцией множества $\hat{K}(T)$ на гиперплоскость $x^0 = 0$, может быть достигнута системой при управлении, удовлетворяющем условию $(\| u \|_p)^p = (mT)$. Таким образом, верхняя граница множества $\hat{K}(T)$ представляет собой часть горизонтальной гиперплоскости $x^0 = (mT)$, над выпуклой областью $K(T)$ в R^n. Нижняя граница $\hat{K}(T)$ есть выпуклая гиперповерхность над $K(T)$. Обе эти границы пересекаются над границей $\partial K(T)$.

Пусть управление $\bar{u}(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ переводит систему из точки $(0, x_0)$ в точку $(\bar{x}^0(T), \bar{x}(T))$, лежащую на нижней части границы множества $\hat{K}(T)$. Для каждого подынтервала $t_0 \leqslant t \leqslant s$ определим $v_s(t)$ как релейное управление, переводящее систему из точки x_0 в точку $\bar{x}(s)$ за время $t = s$. Определим для каждого s управление

$$u_s(t) = \begin{cases} v_s(t) & \text{на} \quad t_0 \leqslant t \leqslant s, \\ \bar{u}(t) & \text{на} \quad s < t \leqslant T. \end{cases}$$

Тогда управление $u_s(t)$ переводит систему из точки x_0 в точку $\bar{x}(T)$, и функционал $C_0(u_s)$ непрерывно меняется вместе с s от значения $C_0(u_0) = \bar{x}^0(T)$ до значения $C_0(v_T) = mT$. Следовательно, множество достижимости $\hat{K}(T)$ включает в себя все точки, заключенные между его верхней и нижней границей, т. е. множество $\hat{K}(T)$ выпукло и компактно. Поскольку каждое управление $u(t)$, заданное на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, можно продолжить для $t > T$ нулем ($u(t) \equiv 0$), то легко проверить, что множество $\hat{K}(T)$ непрерывно зависит от T. Это верно и для множества $\hat{K}(T) \cap [x^0 \leqslant M]$.

Минимальное время T^* — это наименьшее время $T > t_0$, для которого множество $\hat{K}(T) \cap [x^0 \leqslant M]$ пересекается с вертикальной прямой $x = x_1$ в R^{n+1}. Таким образом, если существует приемлемое управление, переводящее систему из состояния x_0 в состояние x_1 в R^n, то существует и оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T^*$. Более того, $u^*(t)$ можно рассматривать как управление, заданное на фиксированном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T^*$ и доставляющее критерию качества наименьшее значение $C_0(u) = (\|u\|_p)^p$ среди всех измеримых управлений из Ω, переводящих систему из точки x_0 в точку x_1. Если $p > 1$, то $u^*(t)$ единственно.

Итак, T^* можно определить как наименьшее $T > t_0$, для которого существует решение $x^*(t)$, $\eta^*(t)$ системы уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^*(t), \qquad \dot{\eta} = -\eta A(t),$$

удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ и $C_0(u^*) \leqslant M$. Следовательно, оптимальное управление u^* дает максимум выражению

$$\eta_0 [|u^1|^p + \ldots + |u^m|^p] + \eta(t) B(t) u,$$

для всех $u \subset \Omega$ и для некоторого постоянного $\eta_0 \leqslant 0$.

Имеются два наиболее интересных случая. Если $M \geqslant mT^*$, то интегральное ограничение является излишним, и задача сводится к оптимальной по быстродействию задаче (принять $\eta_0 = 0$) подобно задачам, рассмотренным в главе 2. Если $M < mT^*$, то можно принять $\eta_0 = -1$ и использовать $u^*(t) = u^*(t, \eta^*(t))$ из принципа максимума. В этом случае $C_0(u^*) = M$.

Упражнения

1. Рассмотрим скалярную управляемую систему $\dot{x} = u$ с ограничениями $|u(t)| \leqslant 1$ и $\int\limits_0^T u^2(t)\,dt \leqslant M$. Перевести систему из состояния $x_0 = 0$ в состояние $x_1 = 1$ за минимальное время T^*. Вычислить оптимальное управление $u^*(t)$ для каждого заданного $M > 0$.

2. Рассмотрим скалярную управляемую систему $\dot{x} = u$ с интегральным ограничением $\int\limits_0^1 u^2(t)\,dt \leqslant 4$ на заданном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 1$. Требуется перевести систему из точки $x_0 = 0$ в точку $x_1 = 1$ при минимальном значении критерия качества $C(u) = \|u\|_\infty = \sup|u(t)|$. Найти оптимальное управление. [Указание: найти наименьшее $k > 0$, для которого существует управление $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяющее ограничениям $\int\limits_0^1 u^2(t)\,dt \leqslant u$ и $|u(t)| \leqslant k$ и переводящее систему из точки x_0 в точку x_1.]

3. Рассмотрим автономную систему в R^n, нормальную в ограничивающем кубе $|u^i| \leqslant 1$ в R^m:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с критерием качества

$$C(u) = \int_0^\infty [f^0(x) + h^0(u)]\, dt.$$

Предположим, что функция $f^0(x) \geqslant 0$ выпукла и, кроме того, $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; $h^0(u) \geqslant 0$ строго выпуклая функция и $h^0(0) = 0$. Предположим также, что A — устойчивая матрица. Доказать, что тогда существует оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$, причем единственное. Доказать также, что допустимое управление $\bar{u}(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$ будет оптимальным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет принципу максимума при некотором сопряженном решении $(\bar{\eta}_0, \bar{\eta}(t))$, таком, что $\eta_0 < 0$ и $\bar{\eta}(\infty) = 0$ (см. теорему 11 раздела 3.4).

ГЛАВА 4

ПРИНЦИП МАКСИМУМА И СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этой главе мы рассмотрим основные геометрические свойства множества достижимости и докажем принцип максимума: конец траектории принадлежит границе множества достижимости лишь в том случае, если выполняется условие максимальности. Во втором разделе даются общие результаты, касающиеся существования оптимальных управлений при наличии ограничений, а в третьем разделе рассматриваются теоремы существования для неограниченных управлений.

4.1. Геометрия множества достижимости

Рассмотрим нелинейную систему, описываемую системой дифференциальных уравнений в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u),$$

где f есть функция класса C^1 в R^{n+1+m}. Допустим, что управления $u(t)$ заданы на конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и образуют некоторое семейство $\mathcal{F}$ измеримых m-мерных вектор-функций. Начальная точка x_0 лежит в заданном компактном начальном множестве X_0 в R^n и мы предполагаем, что каждое решение $x(t, x_0, t_0) = x(t)$, соответствующее $u(t) \in \mathcal{F}$, определено на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Для примера рассмотрим случай, когда для каждого управления $u(t) \in \mathcal{F}$ соответствующее решение удовлетворяет ограничению

$$|x(t, x_0, t_0)| < b \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

и, кроме того,

$$|f(x, t, u(t))| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, u(t))\right| \leqslant m(t),$$

$t_0 \leqslant t \leqslant T$, $|x| < b$, причем $\int\limits_0^T m(t)\,dt < \infty$. Тогда единственное

(абсолютно непрерывное) решение $x(t, x_0, t_0)$, исходящее из точки x_0 при $t=t_0$, определено на всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. В этом случае мы говорим, что управлению $u(t)$ соответствует ограниченное решение. Если число b и интегрируемая функция $m(t)$ могут быть выбраны независимо от управления $u(t) \in \mathscr{F}$, то задача $\{\mathscr{S}, x_0, \mathscr{F}, t_0, T\}$ называется *равномерно ограниченной*.

Пример 1. Рассмотрим нелинейную систему в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, t, u),$$

где $f \in C^1$ в R^{n+1+m}. Пусть семейство $\mathscr{F}$ управлений состоит из всех измеримых функций $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих ограничению $u(t) \subset \Omega \subset R^m$, где Ω — компактное множество. Предположим, что существуют положительные постоянные A и B такие, что

$$|f(x, t, u)| \leqslant A|x|+B$$

для $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $u \in \Omega$ и $|x| \leqslant (B/A+|x_0|)e^{A(T-t_0)}-B/A$. Тогда каждому управлению $u(t) \in \mathscr{F}$ соответствует ограниченное решение $x(t)$, определенное на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Более того, задача будет равномерно ограниченной. Действительно, имеем

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(x(s), s, u(s))|\, ds \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} (A|x(s)|+B)\, ds,$$

так что

$$|x(t)| + \frac{B}{A} \leqslant \left(|x_0| + \frac{B}{A}\right) + \int_{t_0}^{t} A\left(|x(s)| + \frac{B}{A}\right) ds,$$

откуда следует, что

$$|x(t)| + \frac{B}{A} \leqslant \left(|x_0| + \frac{B}{A}\right) e^{A(t-t_0)} \leqslant \left(|x_0| + \frac{B}{A}\right) e^{A(T-t_0)},$$

так что искомое ограничение на $|x(t)|$ установлено. Отсюда ясно также, что функции $|f(x, t, u(t))|$ и $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, u(t))\right|$ равномерно ограничены для всех управлений $u(t) \in \mathscr{F}$.

Определение. Рассмотрим нелинейную систему в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, t, u) \text{ в } R^{n+1+m},$$

с начальным состоянием x_0 в момент t_0 ($f(x, t, u) \in C^1(R^{n+1+m})$). Предположим, что семейство $\mathscr{F}$ допустимых управлений $u(t) \in R^m$ совпадает с некоторым подмножеством множества всех измеримых вектор-функций на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, для каждой из которых существует соответствующее решение $x(t)=x(t, x_0, t_0)$. Множество достижимости $K(x_0, t)=K(t)$ для каждого момента времени из

интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$ состоит, как обычно, из концов всех траекторий $x(t)$, соответствующих всем управлениям из $\mathcal{F}$.

В управляемых системах, рассмотренных в главе 3, решение, соответствующее каждому допустимому управлению, было ограничено, однако не было равномерной ограниченности, и множество достижимости было неограниченным. В следующей теореме исследуется поведение множества $K(t)$ для равномерно ограниченной задачи.

Теорема 1. *Рассмотрим нелинейную систему в R^n:*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u), \text{ где } f \in C^1(R^{n+1+m})$$

с начальным состоянием x_0 в момент t_0 и семейством допустимых управлений $\mathcal{F}$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Предположим, что задача $\{\mathcal{S}, x_0, \mathcal{F}, t_0, T\}$ равномерно ограничена. Тогда $\overline{K(t)}$ есть компактное, непрерывно зависящее от t на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ множество в R^n.

Доказательство. В силу условия равномерной ограниченности задачи каждое решение удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{T} m(t)\,dt,$$

где $m(t)$ такая интегрируемая функция, что

$$|f(x(t), t, u(t))| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t, u(t))\right| \leqslant m(t).$$

Таким образом, множество достижимости $K(t)$ лежит в некоторой ограниченной области пространства R^n, и $\overline{K(t)}$ — компактно. Чтобы доказать, что множество $\overline{K(t)}$ непрерывно зависит от t, выберем $P_1 \in \overline{K(t_1)}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует решение $x(t)$, такое, что $|x(t_1) - P_1| < \varepsilon/2$ и

$$|x(t) - x(t_1)| \leqslant \int_{t_1}^{t} m(s)\,ds < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $|t - t_1| < \delta(\varepsilon)$. Таким образом, каждая точка $P_1 \in \overline{K(t_1)}$ находится на расстоянии, меньшем ε, от некоторой точки $x(t)$ из $\overline{K}(t)$ для всех $|t - t_1| < \delta(\varepsilon)$. Но, аналогично, каждая точка $\overline{K(t)}$ удалена меньше, чем на ε от $\overline{K(t_1)}$, если только $\delta(\varepsilon) > 0$ достаточно мало́. Таким образом,

$$\operatorname{dist}[\overline{K(t_1)}, \overline{K(t)}] < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t - t_1| < \delta(\varepsilon)$$

и, значит, функция $t \to \overline{K(t)}$ является непрерывным отображением действительного интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$ в метрическое пространство непустых компактных подмножеств в R^n. Теорема доказана.

Замечание. Если начальное множество X_0 компактно, то полагаем $K(X_0, t) = \bigcup_{x_0 \in X_0} K(x_0, t)$. Предположим, что для всех управлений $u(t) \in \mathcal{F}$ и всех начальных точек $x_0 \in X_0$ имеется общая мажорирующая функция $m(t)$. Тогда очевидно, что множество $\overline{K(X_0, t)}$ компактно и непрерывно меняется со временем. Следовательно, множества

$$\bigcup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \overline{K(X_0, t)} \quad \text{в} \quad R^n$$

и

$$(t, \overline{K(X_0, t)}) \quad \text{в} \quad R^{n+1}$$

также компактны.

Пусть теперь семейство управлений $\mathcal{F}$ состоит из всех измеримых функций $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ со значениями в Ω, где Ω—некоторое компактное ограничивающее множество в R^m. В этом случае, если $f(x, t, u) \in C^1$ в R^{n+1+m}, и если имеется равномерная оценка $|x(t)| < b$ для всех решений, соответствующих $u(t) \in \mathcal{F}$, то существует и равномерная оценка для

$$|f(x(t), t, u(t))| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t, u(t))\right|.$$

Теорема 2. *Рассмотрим нелинейную систему в R^n:*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u), \quad f \in C^1(R^{n+1+m}),$$

с начальным состоянием x_0 в момент t_0. Допустимыми управлениями являются все измеримые функции $u(t) \subset \Omega$ $(t_0 \leqslant t \leqslant T)$, где Ω есть компактное ограничивающее множество в R^m. Предположим, что:

a) $|x(t)| < b$, *т. е. существует равномерная оценка для всех решений на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$;*

b) *множество $V(x, t) = \{f(x, t, u) \mid u \in \Omega\}$ выпукло для каждого фиксированного вектора (x, t), т. е. множество $V(x, t)$ векторов скорости при каждом фиксированном наборе (x, t) компактно и выпукло.*

Тогда множество достижимости $K(t)$ компактно и непрерывно меняется во времени на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. По предположению а) все решения системы определены на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, а функция $|f(x(t), t, u)| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t, u)\right|$ ограничена. Тогда множество $\overline{K(t)}$ компактно и непрерывно зависит от t на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Теперь используя предположение (b) о том, что множество скоростей $V(x, t)$ компактно и выпукло, мы докажем, что $K(t) = \overline{K(t)}$.

Рассмотрим решения $x_i(t)$, соответствующие управлениям $u_i(t)\subset\Omega$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$. Тогда

$$x_i(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(x_i(s),\, s,\, u_i(s))\, ds$$

и $x_i(t)\in K(t)$ для $i=1,\, 2,\, 3,\, \ldots$ Докажем, что любая предельная точка $\overline{x}(t_1)$ последовательности $\{x_i(t_1)\}$ для каждого момента времени t_1 из интервала $t_0\leqslant t\leqslant T$ принадлежит множеству $K(t_1)$. Пусть, например, некоторая подпоследовательность, которую мы вновь обозначим $x_i(t)$, такова, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i(t_1)=\overline{x}(t_1)$.

Поскольку $|f(x_i(t),\, t,\, u_i(t)|\leqslant m$ для некоторой постоянной m, то последовательность интегралов $\int\limits_{t_0}^{t} f(x_i(s),\, t, u_i(s))\, ds$ образует равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций. По теореме Асколи[1]) подпоследовательность сходится к некоторой функции, удовлетворяющей условию Липшица. Пусть

$$\lim_{i\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(x_i(s),\, s,\, u_i(s))\, ds=\int_{t_0}^{t}\overline{\varphi}(s)ds,$$

где $\overline{\varphi}(t)$ — интегрируемая функция. Таким образом,

$$\lim_{i\to\infty}\int_{t_0}^{T}\chi_E(s) f(x_i(s),\, s,\, u_i(s))\, ds=\int_{t_0}^{T}\chi_E(s)\,\overline{\varphi}(s)\, ds,$$

где χ_E — характеристическая функция подынтервала E. Однако каждое измеримое множество может быть аппроксимировано конечной суммой непересекающихся открытых интервалов, и, значит, указанная выше формула будет верна и для любого измеримого множества E из интервала $t_0\leqslant t\leqslant T$. Значит, последовательность $f(x_i,\, t,\, u_i)$ слабо сходится к $\overline{\varphi}(t)$. Если положить

$$\overline{x}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\overline{\varphi}(s)\, ds,$$

[1]) Имеется в виду следующая теорема (Арцела — Асколи). Из каждого бесконечного семейства функций $f(t,\,\lambda)$ ($\lambda\in\Lambda$, где Λ — компакт в R^n), равномерно ограниченного и равностепенно непрерывного на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$, можно выделить равномерно сходящуюся на $[a,\, b]$ последовательность $f(t,\,\lambda_k)$ ($k=1,\, 2,\, \ldots;\ \lambda_k\in\Lambda$). (Семейство функций $f(t,\,\lambda)$ ($t\in[a,\, b]$, $\lambda\in\Lambda$) называется *равномерно ограниченным* на $[a,\, b]$, если существует постоянная M такая, что $\max\limits_{t\in[a,\, b]}|f(t,\,\lambda|\leqslant M$ ($\lambda\in\Lambda$); оно называется *равностепенно непрерывным на* $[a,\, b]$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, не зависящее от λ и такое, что $|f(t',\,\lambda)-f(t'',\,\lambda)|<\varepsilon$, если только $|t'-t''|<\delta$, $t',\, t''\in[a,\, b]$. (*Прим. ред.*)

то

$$\lim_{i \to \infty} x_i(t) = \bar{x}(t)$$

всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Остается доказать, что $\bar{\varphi}(t) = f(\bar{x}(t), t, \bar{u}(t))$ для некоторого допустимого управления $\bar{u}(t) \subset \Omega$.

Сначала мы покажем, что $\bar{\varphi}(t) \in V(\bar{x}(t), t)$ для почти всех t. Предположим, что $\bar{\varphi}(t)$ лежит вне компактного выпуклого множества $V(\bar{x}(t), t)$ для некоторого подмножества W положительной меры из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда для каждого $t \in W$ существует гиперплоскость, даже с рациональной единичной нормалью [1]), отделяющая $\bar{\varphi}(t)$ от $V(\bar{x}(t), t)$. Поскольку множество рациональных чисел счетно, то существует постоянный единичный вектор-строка y, такой, что

$$y\bar{\varphi}(t) > \limsup_{i \to \infty} yf(\bar{x}(t), t, u_i(t)) = \limsup_{i \to \infty} yf(x_i(t), t, u_i(t))$$

для любого t из множества W_1 ненулевой меры. Тогда

$$\int_{W_1} y\bar{\varphi}(t)\, dt > \int_{W_1} \limsup_{i \to \infty} yf(x_i(t), t, u_i(t))\, dt$$

и, используя лемму Фату из теории интеграла Лебега, мы получим

$$\int_{W_1} y\bar{\varphi}(t)\, dt > \limsup_{i \to \infty} \int_{W_1} yf(x_i(t), t, u_i(t))\, dt,$$

что противоречит тому факту, что последовательность $f(x_i, t, u_i(t))$ слабо сходится к $\bar{\varphi}(t)$. Таким образом, $\bar{\varphi}(t) \in V(\bar{x}(t), t)$ почти всегда.

Можно доопределить $\bar{\varphi}(t)$ на множестве меры нуль так, что

$$\bar{\varphi}(t) \in f(\bar{x}(t), t, \Omega) = V(\bar{x}(t), t)$$

для всех t из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда, по лемме 3А главы 2, существует измеримый m-мерный вектор $\bar{u}(t) \subset \Omega$, такой, что

$$\bar{\varphi}(t) = f(\bar{x}(t), t, \bar{u}(t)) \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Итак, допустимое управление $\bar{u}(t)$ порождает решение $\bar{x}(t)$, причем $\bar{x}(t_1) \in K(t_1)$. Следовательно, множество $K(t_1)$ компактно и $K(t) = \overline{K(t)}$ для всех $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Теорема доказана.

Компактность (или хотя бы замкнутость) множества $K(t)$ является основой для доказательства общей теоремы существования оптимальных управлений. В главах 2 и 3 мы уже отмечали

[1]) То есть с нормалью, имеющей рациональные направляющие косинусы. (*Прим. ред.*)

компактность множества достижимости для различных линейных систем. Ниже, в этой главе, мы докажем несколько теорем существования оптимальных управлений для нелинейных систем при различных ограничениях.

Приведем теперь несколько примеров, иллюстрирующих значение свойства равномерной ограниченности решений и свойства компактности множества достижимости. В некоторых из этих примеров оптимального управления не существует, т. е. существует последовательность управлений $u_l(t) \in \mathcal{F}$ такая, что последовательность соответствующих значений критерия качества $C(u)$ стремится, убывая, к конечной нижней грани, однако сама эта нижняя грань не может быть достигнута ни при каком допустимом управлении из семейства $\mathcal{F}$.

Пример 2. Рассмотрим систему в R^4:

$$\dot{x} = \sin 2\pi u, \quad \dot{y} = \cos 2\pi u, \quad \dot{z} = -1, \quad \dot{w} = x^2 + y^2 + 1,$$

с начальным состоянием (0, 0, 1, 0) и ограничением на управление $|u(t)| \leqslant 1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда существует равномерная оценка для решений

$$|x| + |y| + |z| + |w| \leqslant 1 + 1 + 1 + 3 = 6,$$

так что множество $K(1)$ ограничено. Мы покажем, что множество $K(1)$ не является замкнутым. Выберем управления $u_l(t) = lt \pmod 1$ для $l = 1, 2, 3, \ldots$, так что $\sin 2\pi u_l(t) = \sin 2\pi lt$, $\cos 2\pi u_l(t) = \cos 2\pi lt$. Выпишем соответствующие решения

$$x_l(t) = \frac{1 - \cos 2\pi lt}{2\pi l}; \quad y_l(t) = \frac{\sin 2\pi lt}{2\pi l}, \quad z_l(t) = 1 - t$$

и

$$w_l(t) = \int_0^t \left[\frac{1 - \cos 2\pi ls}{2\pi^2 l^2} + 1\right] ds.$$

В $K(1)$ содержатся точки $(0, 0, 0, (2\pi^2 l^2)^{-1} + 1)$, $l = 1, 2, \ldots$ Но для любого допустимого управления $u(t)$

$$w(1) = \int_0^1 [x^2 + y^2 + 1]\, dt > 1.$$

Таким образом, точка (0, 0, 0, 1) лежит в $\overline{K(1)}$, но не в $K(1)$ и, значит, множество $K(1)$ не замкнуто в R^4.

Пример 3. Рассмотрим систему в R^3:

$$\dot{x} = \frac{\sin 2\pi u}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \dot{y} = \frac{\cos 2\pi u}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \dot{z} = \frac{-1}{x^2 + y^2 + 1},$$

с начальной точкой (0, 0, 1) и ограничением на управление $|u(t)| \leqslant 1$. Требуется перевести систему из точки (0, 0, 1) в точку (0, 0, 0) за минимальное время $t^* > 0$.

Для каждого управления $u(t)$ и решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ определим новую независимую переменную τ по формуле

$$\tau(t) = \int_0^t [x^2(s) + y^2(s) + 1]^{-1}\, ds.$$

Положим далее $u(\tau) = u(t(\tau))$. Тогда

$$\frac{dx}{d\tau} = \sin 2\pi u(\tau), \qquad \frac{dy}{d\tau} = \cos 2\pi u(\tau), \qquad \frac{dz}{d\tau} = -1$$

и $dt/d\tau = x^2 + y^2 + 1$. Используя вычисления примера 2, получим, что можно перевести систему из состояния $x = y = t = 0$, $z = 1$ в точку $x = y = z = 0$, $t > 1$. Однако сделать это за оптимальное время $t^* = 1$ нельзя, и значит, оптимального управления для этой задачи не существует.

Пример 4. Рассмотрим систему в R^2:

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = -xe^y u,$$

с ограничением на управление $0 \leqslant u(t) \leqslant 2$. Семейство $\mathcal{F}$ всех допустимых управлений состоит из всех измеримых функций $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 2$, переводящих систему из точки $(-1, 0)$ в точку $(1, 0)$. Требуется минимизировать критерий качества

$$C(u) = \int_0^2 (2 - y)\, dt = \int_{-1}^1 (2 - y)\, dx.$$

Для каждого решения $x(t) = t - 1$, $y(t)$ положим $y(x) = y(t(x))$. Пользуясь управлением $u(t) = 2$, получим неравенство $0 \leqslant y(x) \leqslant -\ln x^2$ при $x \neq 0$. Но кривая $y = -\ln x^2$ не ограничена, и значит, множество $K(2)$ замкнуто в R^2, но не ограничено. Имеем $C(u) > \int_{-1}^1 (2 + \ln x^2) = 0$. Однако на последовательности управлений $u_\varepsilon(t) = 2 - \varepsilon$ для малых $\varepsilon > 0$ критерий качества $C(u)$ стремится к нулю. Таким образом, оптимального управления, которое бы минимизировало $C(u)$, не существует.

Изучим теперь границу множества $K(X_0, t)$ и докажем, что экстремальное управление $u(t)$, переводящее систему в некоторую точку границы $\partial K(X_0, t)$, должно удовлетворять принципу максимума. Поскольку $x(t)$ может принадлежать $\partial K(X_0, t)$, лишь если $x(t_0)$ лежит в $\partial K(x_0, t)$, где $x(t_0) = x_0 \in X_0$, то будем считать, что множество X_0 состоит из одной точки x_0, и будем в дальнейшем писать $K(t)$ вместо $K(x_0, t)$.

Удобно сначала доказать принцип максимума для автономных систем в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

где $f(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные вектор-функции в R^{n+m}. Случай неавтономных систем будет рассмотрен в следующей главе в связи с выводом необходимых условий оптимальности управлений. Допустимыми управлениями являются все измеримые функции $u(t)$ на конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$, значения которых принадлежат некоторому ограничивающему множеству $\Omega \subset R^m$, причем Ω не обязательно компактное множество. Мы предполагаем, что каждое допустимое управление ограничено, и значит, существует соответствующее решение $x(t)$ $(x(0) = x_0)$, определенное на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Мы получим здесь непосредственное обобщение принципа максимума для линейного случая на нелинейные системы. Для этого нам потребуется разработать метод линеаризации системы $\mathcal{S}$ вблизи заданного решения $x(t)$ с помощью бесконечно малых касательных векторов и использовать систему (дифференциальных) уравнений в вариациях, которые будут описаны ниже. Для удобства этот предварительный материал разбит на три части, посвященные следующим вопросам: понятию переноса касательных пространств, понятию касательного конуса возмущений и одному аппроксимационному результату.

Перенос касательных пространств вдоль $\bar{x}(t)$

Пусть $\bar{u}(t)$ — допустимое управление с соответствующим решением $\bar{x}(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Потоку, определяемому уравнением

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}(t)),$$

соответствует перенос или смещение касательных векторов v вдоль $\bar{x}(t)$, которое определяется уравнениями в вариациях

$$\dot{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\, v.$$

Поясним это. Пусть $x = \varphi(\varepsilon)$ — гладкая кривая в R^n, определенная при малых значениях параметра ε и проходящая через точку x_1 при $\varepsilon = 0$. Такая кривая определяет (контравариантный) касательный вектор $v_1 = \dot{\varphi}(0)$ к R^n в точке x_1. [В действительности под касательным вектором к R^n в точке x_1 можно понимать класс всех гладких кривых $\varphi(\varepsilon)$, удовлетворяющих условию $\varphi(0) = x_1$ и имеющих одну и ту же «производную» $\dot{\varphi}(0)$.] Если кривая $\varphi(\varepsilon)$ определяет касательный вектор в точке $x_1 = \bar{x}(t_1)$, то можно определить смещенную кривую, полагая

$$\bar{A}_{t_2 t_1}\varphi(\varepsilon) = x(t_2, \varphi(\varepsilon)),$$

где $x(t, z)$ — решение уравнения $\dot{x} = f(x, \bar{u}(t))$ с начальным усло-

вием $x(t_1, z) = z$. Мы определяем перенос (или смещение) вектора $v_1 = \dot{\varphi}(0)$ из точки x_1 в точку x_2, полагая

$$v_2 = A_{t_2t_1}v_1 = \frac{d}{d\varepsilon}[\bar{A}_{t_2t_1}\varphi(\varepsilon)]_{\varepsilon=0} = \frac{\partial x}{\partial z}(t_2, z)\,|_{z=x_1}\dot{\varphi}(0).$$

Таким образом, n-мерное касательное пространство в точке $x_1 = \bar{x}(t_1)$ отображается на касательное пространство в точке $x_2 = \bar{x}(t_2)$ при помощи линейного преобразования $A_{t_2t_1}$ с матрицей $(\partial x/\partial z)(t_2, x_1)$. Но

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial z}(t, x_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\frac{\partial x}{\partial z}(t, x_1)$$

и значит, $(\partial x/\partial z)(t, x_1)$ есть фундаментальная матрица решений уравнений в вариациях, причем матрица $(\partial x/\partial z)(t_1, x_1)$ совпадает с единичной матрицей. Следовательно, смещенный вектор $v(t) = A_{tt_1}\dot{\varphi}(0)$ является решением уравнения в вариациях

$$(\mathcal{V}) \qquad \dot{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\,v$$

с начальным условием $v(t_1) = \dot{\varphi}(0)$. Из линейности системы $\mathcal{V}$ следует, что и преобразование A_{tt_1} также линейно. Ясно также, что матрица $(\partial x/\partial z)(t, \bar{x}(t_1))$ преобразования A_{tt_1} непрерывно зависит от t, t_1.

Определив смещение касательных пространств вдоль решения $\bar{x}(t)$ мы тем самым определили и смещение $(n-1)$-мерной гиперплоскости π_t (гиперплоскость является геометрическим местом нулей действительного линейного функционала, определенного на касательном пространстве). Пусть $\eta(t_1)$ — направляющая нормаль к гиперплоскости π_{t_1} в точке x_1 (действительный линейный функционал $\eta(t_1)v_1$ обращается в нуль при $v_1 \in \pi_{t_1}$). Определим $\eta(t)$ как решение сопряженной системы

$$(\mathcal{A}) \qquad \dot{\eta} = -\eta\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

со значением $\eta(t_1)$ при $t = t_1$. Тогда $\eta(t)v(t) = 0$ для всех $v(t)$ из π_t, поскольку $\eta(t_1)v(t_1) = 0$ и

$$\frac{d}{dt}[\eta(t)v(t)] = \dot{\eta}v + \eta\dot{v} = -\eta\frac{\partial f}{\partial x}v + \eta\frac{\partial f}{\partial x}v = 0.$$

Таким образом, каждое нетривиальное решение (т. е. не обращающееся тождественно в нуль) $\eta(t)$ системы $(\mathcal{A})$ определяет параллельное смещение гиперплоскости π_t вдоль решения $\bar{x}(t)$ и всякое параллельное поле π_t получается именно таким путем.

Элементарные возмущения и касательный конус возмущений

Дадим некоторое возмущение основному управлению $\bar{u}(t)$, меняя его значение на некоторую постоянную величину $u_1 \in \Omega$ вблизи момента t_1, т. е. положим

$$u_{\pi_1}(t, \varepsilon) = \begin{cases} u_1 & \text{на } t_1 - l_1\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1, \\ \bar{u}(t) & \text{на остальной части } 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

где параметры возмущения $\pi_1 = \{t_1, l_1, u_1\}$ для $0 < t_1 < T$, $l_1 \geqslant 0$ и $u_1 \in \Omega$. Для достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ возмущенная функция $u_{\pi_1}(t, \varepsilon)$ является вполне определенным управлением с соответствующим решением $x_{\pi_1}(t, \varepsilon)$, исходящим из точки $x_{\pi_1}(0, \varepsilon) = x_0$. Более того, легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_{\pi_1}(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) \quad \text{равномерно на} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Далее, $x_{\pi_1}(t, \varepsilon)$ есть непрерывная функция от параметров t_1, l_1, u_1, ε, t. Потребуем, чтобы точка t_1 была лебеговой (или правильной) точкой, т. е.

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} |f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))|\, dt = o(\varepsilon),$$

так что

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))\, dt = f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))\,\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Такие лебеговы точки t_1 образуют плотное подмножество интервала $[0, T]$; точнее говоря, почти все точки из $0 \leqslant t \leqslant T$ являются лебеговыми, и поэтому мы в дальнейшем для простоты будем считать, что все точки интервала $0 \leqslant t \leqslant T$ обладают этим свойством. Итак, определим $u_{\pi_1}(t, \varepsilon)$ как элементарное возмущение $\bar{u}(t)$, определяемое данными $\pi_1 = \{t_1, l_1, u_1\}$ и $\varepsilon \geqslant 0$.

Пусть теперь $u_{\pi_1}(t)$ — элементарное возмущение управления $\bar{u}(t)$ при $\pi_1 = \{t_1, l_1, u_1\}$. Тогда соответствующее решение $x_{\pi_1}(t, \varepsilon)$ дает касательный вектор в момент t_1, определяемый кривой $\varphi(\varepsilon) = x_{\pi_1}(t_1, \varepsilon)$. Именно,

$$\dot{\varphi}(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\,[x_{\pi_1}(t_1, \varepsilon) - \bar{x}(t_1)] = [f(\bar{x}(t_1), u_1) - f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))]\, l_1.$$

Это следует из оценки

$$x_{\pi_1}(t_1, \varepsilon) = \bar{x}(t_1 - l_1\varepsilon) + \int_{t_1 - l_1\varepsilon}^{t_1} f(x_{\pi_1}(t, \varepsilon), u_1)\, dt$$

или

$$x_{\pi_1}(t_1, \varepsilon)=\bar{x}(t_1)-f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))\,l_1\varepsilon+f(\bar{x}(t_1, u_1))\,l_1\varepsilon+o(\varepsilon),$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}=0.$$

Касательный вектор в точке $\bar{x}(t_1)$

$$v_{\pi_1}(t_1)=[f(\bar{x}(t_1), u_1)-f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))]\,l_1$$

называется *вектором элементарного возмущения* с параметрами $\pi_1=\{t_1, l_1, u_1\}$. Заметим, что параметрам $\{t_1, \lambda l_1, u_1\}$ при $\lambda\geqslant 0$ соответствует вектор возмущения $\lambda v_{\pi_1}(t_1)$, и значит, векторы элементарных возмущений образуют конус, лежащий в касательном пространстве в точке $\bar{x}(t_1)$. Образом при параллельном смещении вектора $v_{\pi_1}(t_1)$ в момент времени t является вектор $v_{\pi_1}(t)$ — решение системы уравнений в вариациях $(\mathcal{V}^0)$, совпадающее в момент времени $t=t_1$ с $v_{\pi_1}(t_1)$.

Определение. *Касательным конусом возмущений* K_t для любого момента из интервала $0\leqslant t\leqslant T$ называется наименьший замкнутый выпуклый конус в касательном пространстве в точке $\bar{x}(t)$, содержащий все векторы, полученные переносом векторов элементарных возмущений для всех лебеговых точек t_1 из $0<t_1<t$. Заметим, что $A_{\bar{t}t}K_t\subset K_{\bar{t}}$ для $t<\bar{t}$, и

$$K_{\bar{t}}=\overline{\cup_{0<t<\bar{t}}\, A_{\bar{t}t}\, K_t}\,.$$

В частности, окончательный предельный конус есть

$$K_T=\overline{\cup_{0<t<T} A_{Tt}K_t}\,.$$

Чтобы глубже понять природу конуса $K_{\bar{t}}$, рассмотрим выпуклую комбинацию векторов элементарных возмущений в $K_{\bar{t}}$,

$$v_\pi=\lambda_1 v_{\pi_1}(\bar{t})+\lambda_2 v_{\pi_2}(\bar{t})+\ldots+\lambda_s v_{\pi_s}(\bar{t})$$

с ненулевыми λ_i, причем $\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=1$. Здесь $\pi_i=\{t_i, l_i, u_i\}$, где $0<t_i<\bar{t}$, $l_i\geqslant 0$ и $u_i\in\Omega$; кроме того, для простоты будем считать все t_i различными. Определим совокупность параметров

$$\pi=\{t_1, \ldots, t_s, \lambda_1 l_1, \ldots, \lambda_s l_s, u_1, \ldots, u_s\}$$

и соответствующее возмущение:

$$u_\pi(t, \varepsilon)=\begin{cases} u_i \text{ при } t_i-\lambda_i l_i\,\varepsilon\leqslant t\leqslant t_i \text{ для } i=1, \ldots, s,\\ \bar{u}(t) \text{ в остальной части } 0\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

Тогда для малых $\varepsilon \geqslant 0$ функция $u_\pi(t, \varepsilon)$ будет представлять собой допустимое управление с решением $x_\pi(t, \varepsilon)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Соответствующее решение $x_\pi(t, \varepsilon)$ будет непрерывной функцией от $4s$ аргументов из π и (t, ε), что является непосредственным следствием теоремы о непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от коэффициентов и начальных условий.

Мы докажем теперь, что кривая $\varphi(\varepsilon) = x_\pi(\bar{t}, \varepsilon)$ имеет касательный вектор v_π в точке $\bar{x}(t)$. На интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1 - \lambda_1 l_1 \varepsilon$ имеем $x_\pi(t, \varepsilon) = \bar{x}(t)$ и тогда, как было показано выше,

$$x_\pi(t_1, \varepsilon) = \bar{x}(t_1) + \varepsilon\lambda_1 v_{\pi_1}(t_1) + o(\varepsilon).$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ вектор $x_\pi(t, \varepsilon)$ определяет кривую, имеющую в точке $\bar{x}(t_1)$ касательный вектор $\lambda_1 v_{\pi_1}(t_1)$. На интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon$ управление $u_\pi(t, \varepsilon) = \bar{u}(t)$, а значит, и кривая $x_\pi(\bar{t}_1, \varepsilon)$ переходит в кривую с касательным вектором $\lambda_1 v_{\pi_1}(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon)$ в точке $\bar{x}(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon)$, т. е.

$$x_\pi(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon, \varepsilon) = \bar{x}(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon) + \varepsilon\lambda_1 v_{\pi_1}(t_2) + o(\varepsilon)$$

или

$$x_\pi(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon, \varepsilon) = \bar{x}(t_2) - f(\bar{x}(t_2), \bar{u}(t_2))\lambda_2 l_2 \varepsilon + \varepsilon\lambda_1 v_{\pi_1}(t_2) + o(\varepsilon).$$

Однако

$$x_\pi(t_2, \varepsilon) = x_\pi(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon) + \int_{t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon}^{t_2} f(x_\pi(t, \varepsilon), u_2)\, dt$$

или

$$x_\pi(t_2, \varepsilon) = x_\pi(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon) + f(x_\pi(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon, \varepsilon), u_2)\lambda_2 l_2 \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$x_\pi(t_2, \varepsilon) = \bar{x}(t_2) - f(\bar{x}(t_2), \bar{u}(t_2))\lambda_2 l_2 \varepsilon + \\ + \varepsilon\lambda_1 v_{\pi_1}(t_2) + f(x_\pi(t_2 - \lambda_2 l_2 \varepsilon, \varepsilon), u_2)\lambda_2 l_2 \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Поэтому вычисляем при $t = t_2$:

$$x_\pi(t_2, \varepsilon) = \bar{x}(t_2) + \varepsilon\lambda_1 v_{\pi_1}(t_2) + \varepsilon\lambda_2 v_{\pi_2}(t_2) + o(\varepsilon).$$

Продолжая тот же процесс для $\bar{t} > t_3$, получим основную формулу возмущений:

$$(*) \qquad x_\pi(\bar{t}, \varepsilon) = \bar{x}(\bar{t}) + \varepsilon\lambda_1 v_{\pi_1}(\bar{t}) + \ldots + \varepsilon\lambda_s v_{\pi_s}(\bar{t}) + o(\varepsilon),$$

и значит, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{x_\pi(\bar{t}, \varepsilon) - \bar{x}(\bar{t})}{\varepsilon} = v_\pi(\bar{t}) = \lambda_1 v_{\pi_1} + \ldots + \lambda_s v_{\pi_s}$.

Важно отметить, что для фиксированных параметров возмущения $\{t_1, \ldots, t_s, l_1, \ldots, l_s, u_1, \ldots, u_s\}$ всегда имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0,$$

равномерно на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ и для всех $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$. Это последнее замечание следует из очевидной оценки:

$$\frac{o(\lambda\varepsilon)}{\tilde{o}(\varepsilon)} \to 1 \quad \text{равномерно на интервале} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

и из того факта, что вектор функции $x_\pi(t, \varepsilon)$ и $\bar{x}(t)$ равномерно близки, если исходить из априорных границ для $f(x, \bar{u}(t))$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \bar{u}(t))$.

Основная формула возмущений $(*)$ показывает, что любая выпуклая комбинация элементарных векторов возмущений (в различные моменты) определяет точку $\bar{x}(\bar{t}) + \varepsilon v_\pi$, принадлежащую, с точностью до $o(\varepsilon)$, множеству достижимости $K(\bar{t})$. Таким образом, касательный конус возмущений $K_{\bar{t}}$, рассматриваемый уже в макроскопических размерах, может служить для достаточно точной оценки множества достижимости $K(\bar{t})$. Пользуясь этим, мы можем описать некоторые геометрические свойства границы $K(\bar{t})$ и тем самым установить принцип максимума.

Определение. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — независимые векторы из K_t, каждый из которых является выпуклой комбинацией векторов элементарных возмущений, причем все моменты времени, в которые произведены возмущения, различны (для возмущений, составляющих каждое v_i, и даже для разных v_i). *Элементарным симплексным конусом* $\mathscr{G}$ мы будем называть совокупность всевозможных выпуклых комбинаций векторов $v_1, \ldots, v_n$.

Поскольку мы требуем, чтобы моменты времени, в которые произведены возмущения, были различными (в противном случае нам понадобился бы более сложный предельный переход), то из основной формулы для возмущений $(*)$ следует существование решения

$$x(t, \varepsilon, \lambda) = \bar{x}(t) + \varepsilon(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + o(\varepsilon),$$

соответствующего каждому вектору $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ из $\mathscr{G}$.

Лемма 1. *Пусть v — вектор, внутренний для K_t. Тогда найдется элементарный симплексный конус $\mathscr{G}$, содержащий вектор v внутри себя.*

Доказательство. Поскольку конус K_t есть замыкание всевозможных выпуклых комбинаций элементарных векторов возмущений, и поскольку вектор v лежит внутри K_t, то существуют независимые векторы $v_1, \ldots, v_n$, образующие конус в K_t, внутри которого лежит вектор v, и являющиеся выпуклыми комбинациями

векторов элементарных возмущений. Попытаемся изменить векторы $v_1, \ldots, v_n$, чтобы получить комбинации векторов элементарных возмущений с различными моментами возмущений.

Параметрам элементарного возмущения $\pi_1=\{t_1, l_1, u_1\}$ отвечает вектор возмущения

$$v_{\pi_1}(t_1)=[f(\bar{x}(t_1), u_1)-f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))]\, l_1.$$

Поскольку t_1 есть лебегова точка, то имеются достаточно близкие к ней лебеговы точки t'_1, например, $|t_1-t'_1|<\xi$, для которых $|f(\bar{x}(t'_1), \bar{u}(t'_1))-f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))|<\xi$ для любого малого $\xi>0$. Параметры $\pi'_1=\{t'_1, l_1, u_1\}$ порождают вектор v'_{π_1}. Так как линейное преобразование A_{tt_1} непрерывно по t и $A_{t_1t_1}$ есть единичное преобразование, то можно потребовать, чтобы вектор $v'_{\pi_1}(t)$ достаточно точно аппроксимировал вектор $v_{\pi_1}(t)$.

Таким путем мы можем модифицировать все элементарные возмущения, входящие в $v_1, \ldots, v_n$, и перейти к аппроксимирующим их векторам $v'_1, \ldots, v'_n$ с различными моментами возмущений. Очевидно, что векторы $v'_1, \ldots, v'_n$ порождают элементарный симплексный конус $\mathcal{G}$, содержащий вектор v внутри себя. Лемма доказана.

Топологическое отступление. В этом пункте мы докажем топологическую теорему, являющуюся аналогом теоремы о неявных функциях для случая, когда трудно установить, выполнены ли предположения о дифференцируемости.

Схолия. *Пусть $f(x)$ — непрерывное отображение компактного выпуклого подмножества $B^n \subset R^n$, имеющего внутренние точки, в пространство R^n. Пусть P — внутренняя точка множества B^n, и предположим, что*

$$\|f(x)-x\|<\|x-P\|$$

для каждого x из границы ∂B^n. Тогда точка P входит в образ $f(B^n)$.

Доказательство. Можно считать, что P есть начало координат в R^n, поскольку параллельные переносы не влияют на справедливость наших предположений. Рассмотрим топологическое [1]) отображение $x \longrightarrow h(x)$ множества B^n на единичный шар B^n_1 с центром в начале координат, полученное линейным растяжением или сжатием каждого луча, исходящего из начала координат.

Каждой точке x из B^n поставим в соответствие вектор $v(x)$ с началом в точке x и концом в точке $x+f(x)$. Положим $\bar{x}=h(x)$ и рассмотрим порожденное отображением $v(\bar{x})=v(h^{-1}(\bar{x}))$ непрерывное векторное поле на единичном шаре B^n_1. Из условия $\|f(x)-x\|<\|x-P\|$ вытекает, что вектор $v(x)$ образует острый угол с вектором Px для каждого $x \in \partial B^n$. Поэтому вектор $v(\bar{x})$ для

[1]) То есть взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны. (*Прим. ред.*)

каждой точки $x \in \partial B_1^n$ имеет радиальную компоненту, направленную вне B_1^n. В этом случае $v(\bar{x})$ должно обращаться в нуль в B_1^n или $v(x_0)=0$ для некоторого $x_0 \in B^n$, т. е. $f(x_0)=0$ и следовательно, точка $P=0$ является образом x_0.

Это последнее утверждение, хорошо известное в теории векторных полей, следует из теоремы Брауэра о неподвижной точке. Рассмотрим векторное поле $-v(\bar{x})$, имеющее отрицательную радиальную компоненту на границе шара B_1^n, и вблизи нее. Тогда для достаточно малого положительного числа α конец сегмента $\bar{x} \to \bar{x} - \alpha v(\bar{x})$ лежит внутри B_1^n. По теореме о неподвижной точке, в B_1^n существует точка $\bar{x}_0$, для которой $\bar{x}_0 = \bar{x}_0 - \alpha v(\bar{x}_0)$, так что $v(\bar{x}_0)=0$. Тогда точку $x_0 = h^{-1}(\bar{x}_0)$ в B^n можно принять за искомую точку, в которой $v(x_0)=f(x_0)=0$, что и требовалось доказать.

В качестве особого случая отметим следующий результат.

Следствие. *Пусть $f(x)$ — непрерывное отображение шара $B_1^n: \|x\| \leqslant 1$ в R^n; предположим, что*

$$\|f(x)-x\| \leqslant 1-\varepsilon \quad \text{для всех} \quad \|x\|=1 \quad \text{и} \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда каждая точка z внутри шара $\|z\|<\varepsilon$ входит в образ при отображении f.

Касательный конус возмущений K_t лежит в касательном пространстве в точке $\bar{x}(t)$, и следовательно, состоит из инфинитезимальных векторов. Однако можно рассматривать касательное пространство $\bar{x}(t)$ как векторное пространство с началом в $\bar{x}(t)$. В этом случае K_t превращается в макроскопический конус в R^n с вершиной в точке $\bar{x}(t)$, и он может служить приближением для $K(t)$, по крайней мере вблизи $\bar{x}(t)$.

Лемма 2. *Пусть v — ненулевой вектор, внутренний для K_t. Тогда существует элементарный симплексный конус $\mathscr{G}$ в K_t, такой, что*

1) $\mathscr{G}$ (как инфинитезимальный конус) содержит внутри себя v;

2) $\mathscr{G}$ лежит внутри $K(t)$ [как макроскопический конус, т. е. усеченный конус $\mathscr{G}$ без вершин лежит внутри $K(t)$ вблизи $\bar{x}(t)$].

Доказательство. По лемме 1 в K_t существует элементарный симплексный конус $\mathscr{G}_1$, содержащий вектор v внутри себя. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — выпуклые комбинации векторов элементарных возмущений, порождающих $\mathscr{G}_1$. Каждой выпуклой комбинации $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ соответствует решение

$$x(t, \varepsilon, \lambda) = \bar{x}(t) + \varepsilon(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + o(\varepsilon).$$

Рассмотрим множество $\mathscr{G}_1$ в R^n как макроскопический конус с вершиной в $\bar{x}(t)$. Можно выбрать векторы $v_1, \ldots, v_n$ так, чтобы их концы лежали на гиперплоскости, проходящей через конец вектора v и ортогональной к v. Тогда каждая точка

из $\mathscr{G}_1$ однозначно описывается барицентрическими координатами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и высотой $0 < l \leqslant \|v\|$, отсчитываемой от $\bar{x}(t)$ вдоль v.

Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы множество точек, описываемое концом вектора

$$x(t, \varepsilon l, \lambda) = \bar{x}(t) + \varepsilon l(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + o(\varepsilon l),$$

лежало в полупространстве $l > 0$. Таким образом, мы определили отображение конуса $\mathscr{G}_1$ [без вершины $\bar{x}(t)$] в полупространство $l > 0$:

$$(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) l \to x(t, \varepsilon l, \lambda).$$

Для каждого вектора $r \in R^n$ обозначим через ρ его проекцию на гиперплоскость, ортогональную к вектору v, а через l — ортогональную проекцию вектора r на вектор v, отсчитываемую от точки $\bar{x}(t)$. Тогда (ρ, l) — координаты в R^n.

В этих координатах определенное выше отображение при подходящем выборе ограничения $0 \leqslant l \leqslant b$ будет иметь вид

$$L = L(\rho, l) = l + o(l),$$
$$R = R(\rho, l) = \rho + o(\rho).$$

Здесь

$$\lim_{l \to 0} \frac{o(l)}{l} = 0$$

равномерно по ρ. Далее, выберем $b > 0$ так, чтобы

$$\|L(\rho, l) - l\|^2 + \|R(\rho, l) - \rho\|^2 \leqslant \frac{l^2}{100}$$

в соответствующем усеченном конусе $\mathscr{G}_1$.

Пусть $\mathscr{G}$ — очень узкий симплексный конус с осью v и высотой $l = b/3$. Возьмем точку $P = (l_0, r_0)$ в $\mathscr{G}$ с $0 \leqslant l_0 \leqslant b/3$. Расстояние от P до точки $Q = (l, r)$, лежащей на границе $\mathscr{G}_1$, удовлетворяет неравенствам

$$\|P - Q\| \geqslant \begin{cases} l_0/2, & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant 2l_0, \\ l/2, & \text{если } 2l_0 < l \leqslant b. \end{cases}$$

В силу приведенной выше топологической схолии можно утверждать, что P лежит в образе $\mathscr{G}_1$. Следовательно, усеченный конус $\mathscr{G}$, исключая вершину, лежит внутри образа $\mathscr{G}_1$, а значит, и внутри множества достижимости $K(t)$, что и требовалось доказать.

Получив эти предварительные результаты, мы можем приступить к доказательству принципа максимума для нелинейных автономных систем с произвольным ограничивающим множеством Ω, не обязательно компактным.

Теорема 3. *Рассмотрим систему в* R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

где $f(x, u)$ *и* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ — *непрерывные функции, определенные в* R^{n+m}. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *множество всех измеримых управлений* $u(t)$ *на интервале* $0 \leqslant t \leqslant T$, *удовлетворяющих ограничению* $u(t) \subset \Omega \subset R^m$ *и имеющих ограниченные решения, исходящие из точки* x_0. *Пусть некоторому управлению* $\bar{u}(t) \in \mathcal{F}$ *соответствует решение* $\bar{x}(t)$ *с концом* $\bar{x}(T)$, *лежащим на границе множества достижимости* $K(T)$. *Тогда существует нетривиальное сопряженное решение* $\bar{\eta}(t)$ *системы*

$$(\mathcal{A}) \qquad \dot{\eta} = -\eta \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)),$$

так что принцип максимума $H(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$ *выполняется почти всюду. Далее, если управление* $\bar{u}(t)$ *ограничено, то функция*

$$M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$$

почти всюду постоянна. Здесь функция Гамильтона имеет такой вид:

$$H(\eta, x, u) = \eta f(x, u) = \eta_1 f^1(x, u) + \ldots + \eta_n f^n(x, u)$$

и $M(\eta, x) = \max_{u \in \Omega} H(\eta, x, u)$ (*всюду, где обе части определены*).

Доказательство. Поскольку точка $\bar{x}(T)$ лежит на границе множества $K(T)$, то существует последовательность точек $\{P_n\}$ вне $K(T)$, таких, что $P_n \to \bar{x}(T)$, и единичные векторы вдоль отрезков, соединяющих $\bar{x}(T)$ с P_n, стремятся к предельному единичному вектору $w(T)$, исходящему из точки $\bar{x}(T)$.

Заметим, что вектор $w(T)$ не может лежать внутри касательного конуса возмущений K_T, так как иначе, по лемме 2, существовала бы макроскопическая коническая окрестность $\mathcal{G}$ вектора $w(T)$ в $K(T)$. А это противоречило бы предположению, что точки P_n все лежат вне $K(T)$.

Таким образом, существует гиперплоскость $\pi(T)$, проходящая через точку $\bar{x}(T)$ и отделяющая вектор $w(T)$ от K_T. Пусть $\bar{\eta}(T)$ — единичная внешняя нормаль к $\pi(T)$ в точке $\bar{x}(T)$; определим тогда $\bar{\eta}(t)$ как соответствующее решение линейной системы дифференциальных уравнений $\mathcal{A}$. Тогда

$$\bar{\eta}(T)\, v(T) = \bar{\eta}(t)\, v(t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \leqslant T,$$

где $v(t)$ — произвольный вектор возмущений из K_t.

Предположим, что принцип максимума не выполняется, т. е.

$$H(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) < H(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t), u_1(t))$$

ля $u_1(t) \in \Omega$ на некотором ненулевом промежутке времени из

$0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть t_1 есть лебегова точка интервала $0 < t_1 < T$ для $f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, в которой

$$\bar{\eta}(t_1) f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1)) < \bar{\eta}(t_1) f(\bar{x}(t_1), u_1)$$

при некотором $u_1 \in \Omega$. Рассмотрим вектор элементарного возмущения:

$$v_{\pi_1}(t_1) = [f(\bar{x}(t_1), u_1) - f(\bar{x}(t_1), \bar{u}(t_1))],$$

с параметрами

$$\pi_1 = \{t_1, 1, u_1\}.$$

Тогда, поскольку принцип максимума не выполняется, то

$$\eta(t_1) v_{\pi_1}(t_1) > 0,$$

что противоречит предположению о том, что

$$\bar{\eta}(t) v(t) \leqslant 0 \text{ для всех } t$$

и для всех $v(t) \in K_t$. Значит,

$$H(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$$

почти всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ (и правая часть существует почти всюду). Наконец, покажем, что функция $M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$ абсолютно непрерывна и имеет нулевую производную на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Здесь мы предполагаем, что управление $\bar{u}(t)$ ограничено, т. е. $|\bar{u}(t)| \leqslant \beta$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $m(\eta, x) = \max\limits_{|u| \leqslant \beta,\ u \in \Omega} H(\eta, x, u)$, так что $M(\eta, x) \geqslant m(\eta, x)$, но

$$M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t)) = m(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t)) \quad \text{почти всюду.}$$

Покажем сначала, что функция $m(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$ постоянна всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Если точка (η, x) принадлежит компактному множеству Q из $R^n \times R^n \times R^m$, содержащему все точки вида $(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$, а $|u| \leqslant \beta$, то для любых двух точек (η, x, u) и (η', x', u) имеем

$$|H(\eta, x, u) - H(\eta', x', u)| \leqslant kd,$$

где

$$d = |\eta - \eta'| + |x - x'|,$$

а k — константа Липшица, мажорирующая функции $|f(x, u)|$ и $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)\right|$ в Q. Пусть управления u и u' из Ω, с ограничениями $|u| \leqslant \beta$, $|u'| \leqslant \beta$, выбраны так, что

$$m(\eta, x) = H(\eta, x, u) \text{ и } m(\eta', x') = H(\eta', x', u').$$

Тогда

$$H(\eta, x, u') \leqslant H(\eta, x, u) \quad \text{и} \quad H(\eta', x', u) \leqslant H(\eta', x', u'),$$

так что

$$-kd \leqslant H(\eta, x, u') - H(\eta', x', u') \leqslant H(\eta, x, u) - H(\eta', x', u') \leqslant$$
$$\leqslant H(\eta, x, u) - H(\eta', x', u) \leqslant kd$$

и

$$|m(\eta, x) - m(\eta', x')| \leqslant kd.$$

Тогда $m(\eta, x)$ непрерывна по Липшицу в Q, и значит, $m(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$ абсолютно непрерывна на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $\tau (0 < \tau < T)$—точка, в которой $m(\tau) = m(\bar{\eta}(\tau), \bar{x}(\tau))$ и функции $\bar{x}(\tau)$ и $\bar{\eta}(\tau)$ имеют производные. Тогда для $t' > \tau$ имеем

$$m(t') \geqslant H(\bar{\eta}(t'), \bar{x}(t'), \bar{u}(\tau))$$

и

$$m(t') - m(\tau) \geqslant H(\bar{\eta}(t'), \bar{x}(t'), \bar{u}(\tau)) -$$
$$- H(\bar{\eta}(t'), \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) + H(\bar{\eta}(t'), \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - H(\bar{\eta}(\tau), \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)),$$

откуда

$$\lim_{t' \to \tau} \frac{m(t') - m(\tau)}{t' - \tau} = \frac{dm}{dt}\bigg|_{t=\tau} \geqslant \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dt}\bigg|_{t=\tau} = 0.$$

так как

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \eta_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} f^i, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dt} = f^i\left(-\eta_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right).$$

При $t' < \tau$ получаем $\frac{dm}{dt}\Big|_{t=\tau} \leqslant 0$, так что

$$\frac{dm}{dt}(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t)) = 0$$

почти всюду. Поскольку функция $m(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$ абсолютно непрерывна и имеет нулевую производную, то она должна быть постоянной, равной m почти всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

Из определения $M(\eta, x)$ непосредственно следует, что функция $M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t))$ полунепрерывна снизу на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е.

$$M(\bar{\eta}(t_1), \bar{x}(t_1)) \leqslant M(\bar{\eta}(t)), \bar{x}(t)) + \varepsilon$$

для всех t, достаточно близких к t_1, и для заранее заданного $\varepsilon > 0$. [Если $M(\bar{x}(t_1), \bar{\eta}(t_1)) = \infty$, то соответствующее утверждение также имеет место.] Итак,

$$M(\bar{\eta}(t_1), \bar{x}(t_1)) \leqslant m(\eta(\bar{t}), x(\bar{t})) = m + \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно $M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t)) \leqslant m$ всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Таким образом, $M(\bar{\eta}(t), \bar{x}(t)) = m$ всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Теорема доказана.

Для линейных систем управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума тогда и только тогда, когда оно является экстремальным, причем $x(T) \in \partial K(T)$. Для нелинейных же систем принцип максимума еще не гарантирует, что траектория $x(t)$ заканчивается на границе множества достижимости, хотя нетрудно видеть, что из $x(T) \in \partial K(T)$ следует, что $x(t) \in \partial K(t)$ при всех $t \leqslant T$. Следующие два примера демонстрируют это свойство нелинейных систем.

Пример 5. Рассмотрим в R^2 систему

$$\dot{x} = yu - xv, \quad \dot{y} = -xu - yv$$

с ограничениями на управления $|u(t)| \leqslant 1$ и $|v(t)| \leqslant 1$. В полярных координатах эта система уравнений примет вид

$$\dot{r} = -rv(t), \quad \dot{\varphi} = -u(t).$$

В качестве начальной точки рассмотрим $r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$ и будем изучать поведение системы в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$ входят независимо в уравнения для r и для φ. Поэтому нетрудно видеть, что множество достижимости $K(\pi)$ представляет собой кольцо $e^{-\pi} \leqslant r \leqslant e^{\pi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Здесь управляемая система равномерно ограничена и множество $K(\pi)$ компактно. Однако множество $K(\pi)$ будет не только не выпуклым, но даже и не связным.

Здесь понятие новой границы $K(t)$, введенное для линейных систем в главе 2, не имеет смысла. Например, точка $(-1, 0)$ сперва появляется в $K(\pi)$ как внутренняя точка. Кроме того, управление $u(t) \equiv 1$, $v(t) \equiv 0$ удовлетворяет принципу максимума на интервале $0 \leqslant t \leqslant \pi$, однако соответствующая траектория не приводит к границе $K(\pi)$.

Пример 6. Рассмотрим управляемую систему в R^2, полученную видоизменением системы примера 5:

$$\dot{r} = -rv(t)h(\varphi),$$
$$\dot{\varphi} = -u(t)\left[1 - \left(\frac{R-r}{2R}\right)^4 \left(\sin^2 \frac{1}{R-r}\right) h(\pi - \varphi)\right],$$

где функция $h(\varphi) = h(-\varphi) \in C^\infty$ удовлетворяет ограничению $0 \leqslant h(\varphi) \leqslant 1$, причем $h(\varphi) = 0$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $h(\varphi) = 1$ при φ, близком к нулю. Далее, $R = \exp \int\limits_0^{\pi/2} h(\varphi)\, d\varphi$. На управление наложены ограничения $|u(t)| \leqslant 1$, $|v(t)| \leqslant 1$, а начальной точкой является точка $r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$. При $t = \pi/2$ множество $K(\pi/2)$ пересекается с лучом $\varphi = \pi/2$ лишь при $u(t) \equiv 1$, так что $\dot{\varphi} = 1$. Тогда $\dot{r} = -rv(t)h(t)$ и, значит, отрезок $\varphi = \pi/2$, $\frac{1}{R} \leqslant r \leqslant R$ яв-

ляется ребром множества $K(\pi/2)$. Аналогично, отрезок $\varphi=-\pi/2$, $1/R\leqslant r\leqslant R$ из множества $K(\pi/2)$ может быть достигнут лишь при $u(t)\equiv+1$. Таким образом, множество $K(\pi/2)$ является полукольцом с центром в начале координат, шириной $(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})$ при $\varphi=0$, и $(R-1/R)$ при $\varphi=\pm\pi/2$.

Рассмотрим теперь множество $K(\pi)$. Лишь некоторые из точек, принадлежавших лучу $\varphi=\pm\pi/2$, при $t=\pi/2$ будут лежать на луче $\varphi=\pi$, в момент $t=\pi$. В левой полуплоскости система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{r}=0,\quad \dot{\varphi}=-u(t)\left[1-\left(\frac{R-r}{2R}\right)^4\left(\sin^2\frac{1}{R-r}\right)h(\pi-\varphi)\right].$$

Таким образом, множество $K(\pi)$ пересекается с лучом $\varphi=\pi$ лишь при значениях радиуса, удовлетворяющих уравнению $(R-r)^4\sin^2\left(\frac{1}{R-r}\right)=0$, т. е. на счетном множестве точек с точкой накопления $\varphi=\pi$, $r=R$.

Итак, мы видим, что $K(\pi)$ представляет собой кольцевую область, ширина которой достигает минимума $(R-1/R)$ при $\varphi=\pi$; из этой области вдоль луча $\varphi=\pi$ вырезано бесконечное число непересекающихся открытых областей. Таким образом, $K(\pi)$ является бесконечносвязным множеством, и его граница не может быть представлена в виде конечного числа гладких замкнутых кривых.

Упражнения

1. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{S})\qquad \dot{x}=f(x,t,u),\quad f\in C^1(R^{n+1+m}),$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$. Предположим, что для некоторого постоянного k

$$x'f(x,t,u)\leqslant k(|x|^2+1),$$

для всех $x\in R^n$, всех t из компактного интервала $\mathscr{I}$ и всех $u\in\Omega$. Показать, что для любого управления $u(t)\subset\Omega$ на интервале $\mathscr{I}$ существует решение $x(t)$ для всех $t\in\mathscr{I}$. Кроме того, для любого заданного начального состояния x_0 множество $K(x_0, t)$ достижимых точек равномерно ограничено.

2. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{S})\qquad \dot{x}=f(x,u),\quad f\in C^1(R^{n+m}),$$

с начальным состоянием x_0 в момент $t_0=0$ и компактным ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$. В качестве допустимых управлений рассмотрим все измеримые функции $u(t)\subset\Omega$ на интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, и предположим, что каждому управлению соответствует решение $x(t)$ на всем интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$. Предположим далее, что управлению $u^*(t)$ соответствует решение $x^*(t)$, где точка $x^*(t_1)$ принадлежит границе множества достижимости $K(t_1)$. Показать, то в этом случае $x(t)\in\partial K(t)$ для всех t из интервала $0\leqslant t\leqslant t_1$.

3. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x,\ t,\ u), \quad f\in C^1\ (R^{n+1+m}),$$

с измеримыми управлениями $u(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ и компактным ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$.

(a) Пусть управлению $u^*(t)$ соответствует решение $x^*(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$. Показать, что существует такое $\varepsilon>0$, что каждое управление $u_\varepsilon(t)\subset\Omega$ на $0\leqslant t\leqslant 1$, такое, что $|u_\varepsilon(t)-u^*(t)|<\varepsilon$ на множестве меры $1-\varepsilon$, с начальным состоянием $x_\varepsilon(0)$, $|x_\varepsilon(0)-x^*(0)<\varepsilon$, определяет решение $x_\varepsilon(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$. Более того, $x_\varepsilon(t)\to x^*(t)$ равномерно на $0\leqslant t\leqslant 1$ при $\varepsilon\to 0$.

(b) Показать, что для каждого начального состояния $|x_0|\leqslant\alpha$ и момента времени $|t_0|\leqslant\tau$ существует общий промежуток времени $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\zeta(\alpha,\ \tau)$, такой, что решение $x(t,\ x_0,\ t)$, соответствующее произвольному управлению $u(t)\subset\Omega$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\zeta$, определено на всем интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\zeta$.

4. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=A(x,\ t)+B(x,\ t)\,u,$$

где $A(x,\ t)$ и $B(x,\ t)$ принадлежат C^1 в R^{n+1}, и управления $u(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ удовлетворяют ограничению $\|u\|_1=\int\limits_0^1 |u(t)\,dt|\leqslant 1$.

(a) Пусть управлению $u^*(t)$ соответствует решение $x^*(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. Показать, что существует $\varepsilon>0$, такое, что любому управлению $u_\varepsilon(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, $\|u_\varepsilon-u^*\|_1<\varepsilon$ с начальным состоянием $x_\varepsilon(0)$, $|x_\varepsilon(0)-x^*(0)|<\varepsilon$, соответствует решение $x_\varepsilon(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. Более того, $x_\varepsilon(t)\to x^*(t)$ равномерно на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ при $\varepsilon\to 0$.

(b) Для любого начального состояния $|x_0|\leqslant\alpha$ и времени $|t_0|\leqslant\tau$ существует общий промежуток времени $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\zeta(\alpha,\ \tau)$ такой, что решение $x(t,\ x_0,\ t_0)$, соответствующее любому управлению $u(t)$ с ограничением $\int\limits_{t_0}^{t_0+1} |u(t)|\,dt\leqslant\zeta$, будет определено на всем интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\zeta$.

4.2. Существование оптимального управления при дополнительных ограничениях

В этом разделе мы докажем основные теоремы существования оптимальных управлений для нелинейных систем в случае, когда ограничивающее множество Ω является компактным. Мы воспользуемся теми же методами, что и в предыдущей теореме 2. На самом деле следующая теорема существования является непосредственным следствием теоремы 2 в случае, когда множество начальных состояний X_0 состоит из одной точки, а начальный момент t_0 и ограничивающее множество Ω фиксированы. Позднее мы распространим эти результаты на слабые и импульсные управления.

Теорема 4. *Рассмотрим нелинейную систему в* R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x,\ t,\ u), \quad f\in C^1\ (R^{n+1+m}).$$

Исходные данные таковы:

1) *Множество начальных состояний* $X_0(t)$ *и целевое множество* $X_1(t)$ *— непустые компактные множества, непрерывно меняющиеся по* t *в* R^n, *на некотором заданном промежутке времени* $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$.

2) *Ограничивающее множество* $\Omega(x, t)$ *есть непустое, компактное, непрерывно меняющееся в* R^m *по* $(x, t) \in R^n \times [\tau_0, \tau_1]$ *множество.*

3) *Имеется совокупность (быть может, пустая) ограничений на состояние системы* $h^1(x) \geqslant 0$, $h^2(x) \geqslant 0, \ldots,$ *где* $h^1, h^2, \ldots$ *— конечное или бесконечное семейство действительных непрерывных функций из* R^n.

4) *Семейство* $\mathcal{F}$ *допустимых управлений состоит из всех измеримых функций* $u(t)$ *на различных промежутках времени* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *из интервала* $[\tau_0, \tau_1]$, *таких, что каждому управлению* $u(t)$ *соответствует решение* $x(t)$ *на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *переводящее систему из точки* $x(t_0) \in X_0(t_0)$ *в точку* $x(t_1) \in X_1(t_1)$; *при этом* $u(t) \in \Omega(x(t), t)$, $h^1(x(t)) \geqslant 0, \ldots, h^r(x(t)) \geqslant 0$.

5) *Каждому управлению* $u \in \mathcal{F}$ *соответствует значение критерия качества*

$$C(u) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), t, u(t))\, dt + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(x(t)),$$

где $f^0 \in C^1$ в R^{n+1+m}, *а* $g(x)$ *и* $\gamma(x)$ *непрерывные функции в* R^n. *Предположим, что:*

(a) *семейство* $\mathcal{F}$ *допустимых управлений непусто;*

(b) *существует равномерная оценка*

$$|x(t)| \leqslant b \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

для всех $x(t)$, *соответствующих управлениям* $u \in \mathcal{F}$;

(c) *множество обобщенных скоростей*

$$\hat{V}(x, t) = \{f^0(x, t, u), f(x, t, u) \mid u \in \Omega(x, t)\}$$

выпукло в R^{n+1} *для любых фиксированных* (x, t).

Тогда существует оптимальное управление $u^*(t)$ *из* $\mathcal{F}$, *на интервале* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ *минимизирующее* $C(u)$.

Доказательство. Поскольку при $|x| \leqslant b$ и $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ множество $\Omega(x, t)$ лежит в некоторой ограниченной области пространства R^m, то все $u(t) \in \mathcal{F}$ и решения $x(t)$ должны быть равномерно ограничены. Таким образом, существует конечная нижняя грань значений критерия качества при допустимых управлениях. Выберем последовательность $u_k(t)$ $(t_0^k \leqslant t \leqslant t_1^k)$ управлений из $\mathcal{F}$ так, чтобы соответствующая последовательность $C(u_k)$, убывая, монотонно стремилась к $\inf C(u)$ для $u \in \mathcal{F}$, и пусть $x_k(t)$ — соответствующие траектории, переводящие систему из $X_0(t_0^k)$ в $X_1(t_1^k)$. Выберем теперь подпоследовательность u_k, не меняя обозначений, так, чтобы $t_0^k \to t_0^*$, $t_1^k \to t_1^*$ и $x_k(t_0^k) \to x_0^* \in X_0(t_0^*)$ при $k \to \infty$. Нужно

показать, что последовательность $u_k(t)$ стремится к допустимому управлению $u^*(t) \in \mathcal{F}$, доставляющему минимум критерию качества. Если $t_0^* = t_1^*$, то $\lim\limits_{k\to\infty} C(u_k) = g(x_0^*) + \gamma(x_0^*)$ и $x_0^* \in X_0(t_0^*) \cap X_1(t_0^*)$, так что на любом управлении $u^*(t_0^*) \in \Omega(x_0^*, t_0^*)$ критерий качества принимает минимальное значение $g(x_0^*) + \gamma(x_0^*)$. Поэтому, предположим, что $t_0^* < t_1^*$.

Как и при доказательстве теоремы 2, выберем подпоследовательность управлений, обозначенную снова $u_k(t)$, так, чтобы соответствующая последовательность $\hat{f}(x_k(t), t, u_k(t))$ слабо сходилась к интегрируемому $(n+1)$-мерному вектору $\hat{\varphi}(t) = (\varphi^0(t), \varphi(t))$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$. [Заметим, что $\hat{f} = (f^0, f)$, и мы здесь предполагаем, что $t_0^k \leqslant t_0^*$ и $t_1^k \geqslant t_1^*$, так что каждое из управлений $u_k(t)$ определено на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$; другие случаи будут рассмотрены ниже.] Пусть

$$\hat{x}^*(t) = \hat{x}_0^* + \int_{t_0}^{t} \hat{\varphi}(s)\, ds \quad \text{при} \quad t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*,$$

где

$$\hat{x}^*(t) = (x^{0^*}(t),\ x^*(t)) \quad \text{и} \quad \hat{x}_0^* = (0,\ x_0^*).$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \hat{x}_k(t) = \hat{x}^*(t) \quad \text{всюду на интервале} \quad t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*,$$

введем обозначение

$$\hat{x}_k = (x_k^0,\ x_k) \quad \text{и} \quad x_k^0(t) = \int_{t_0^k}^{t} f^0(x_k(s),\ s,\ u_k(s))\, ds.$$

Поскольку $\{\hat{x}_k(t)\}$ — равностепенно непрерывное семейство функций, $|\hat{x}_k(t_0^k) - \hat{x}_k(t_0^*)| \to 0$ и $|\hat{x}_k(t_1^k) - \hat{x}_k(t_1^*)| \to 0$, так что $x^*(t_0^*) = x_0^* \in X_0(t_0^*)$ и $x^*(t_1^*) \in X_1(t_1^*)$, то по теореме Асколи можно считать, что $\hat{x}_k(t) \to \hat{x}^*(t)$ равномерно на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, и значит, удовлетворяются ограничения

$$h^1(x^*(t)) \geqslant 0,\ \ldots,\ h^r(x^*(t)) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*.$$

Более того, из установленной сходимости следует, что

$$\lim_{k\to\infty} C(u_k) = g(x^*(t_1^*)) + \int_{t_0^*}^{t_1^*} \varphi^0(s)\, ds + \max_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t)).$$

Таким образом, нам остается только показать, что существует управление $u^*(t) \in \mathcal{F}$ с соответствующим решением $x^*(t)$, такое, что $\hat{f}(x^*(t),\ t,\ u^*(t)) = \hat{\varphi}(t)$.

Для того, чтобы найти $u^*(t)$, сначала покажем, что $\hat{\varphi}(t) \in \hat{V}(x^*(t), t)$ для любого t [после доопределения $\hat{\varphi}(t)$ на множестве меры нуль, как в теореме 2]. Предположим, что $\hat{\varphi}(t)$ лежит вне $\hat{V}(x^*(t), t)$ на некотором ненулевом промежутке времени W_1. Тогда существует постоянный единичный $n+1$-мерный вектор-строка y такой, что

$$y\hat{\varphi}(t) > \limsup_{k\to\infty} y\hat{f}(x^*(t), t, \bar{u}_k(t))$$

для всех t из промежутка W_1, и $\bar{u}_k(t)$ есть точка, ближайшая к $u_k(t)$ в $\Omega(x^*(t), t)$. Но для каждого фиксированного $t \in W_1$

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t)$$

и

$$\lim_{k\to\infty} |\bar{u}_k(t) - u_k(t)| = 0.$$

Таким образом,

$$y\hat{\varphi}(t) > \limsup_{k\to\infty} y\hat{f}(x_k(t), t, u_k(t)),$$

но это противоречит слабой сходимости последовательности $\hat{f}(x_k(t), t, u_k(t))$ к $\hat{\varphi}(t)$. Следовательно, $\hat{\varphi}(t) \in \hat{V}(x^*(t), t)$.

Рассмотрим теперь компактное множество $\Omega(x^*(t), t)$ в R^n, непрерывно зависящее от t. Так как

$$\hat{\varphi}(t) \in \hat{f}(x^*(t), t, \Omega(x^*(t), t)),$$

то с помощью некоторого обобщения леммы 3А главы 2, которое предоставляется читателю, можно показать, что существует измеримая функция $u^*(t) \in \Omega(x^*(t), t)$, такая, что

$$\hat{\varphi}(t) = \hat{f}(x^*(t), t, u^*(t)).$$

Тогда $u^*(t)$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ будет допустимым управлением из семейства $\mathcal{F}$ с соответствующим решением $x^*(t)$ и значением критерия качества

$$C(u^*) = g(x^*(t_1^*)) + \int_{t_0^*}^{t_1^*} f^0(x^*(t), t, u^*(t))\,dt + \max_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t)).$$

Отметим, наконец, что если управление $u_k(t)$ не определено на всем интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, то можно расширить область определения так, чтобы $u(t) \in \Omega(x, t)$ и полученная функция была ограниченной и измеримой на требуемом интервале. Для достаточно больших k решения $x_k(t)$ $(x_k(t_0^k) \in X_0(t_0^k))$ будут определены

на всем интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ и образуют равностепенно непрерывное семейство функций. Далее доказательство проводится так же, как в предыдущем случае. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть задан начальный момент времени* t_0^* *из интервала* $\tau_0 \leqslant t_0^* \leqslant \tau_1$, *и пусть семейство* $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ *состоит из всех допустимых управлений* $u(t)$ *на различных подынтервалах* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1$ *из* $[t_0^*, \tau_1]$. *Пусть выполнены предположения* 1—5 *теоремы, и кроме того,*

(а) $\mathcal{F}_0$ *непустое;*

(в) $|x(t)| \leqslant b$ *при* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1$ *для всех* $u(t) \in \mathcal{F}_0$;

(с) *множество* $\hat{V}(x, t)$ *выпукло в* R^{n+1} *для любых* (x, t).

Тогда существует оптимальное управление $u^*(t)$ *из* $\mathcal{F}_0$, *на интервале* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, *минимизирующее функционал* $C(u)$ *на множестве всех* $u \in \mathcal{F}_0$.

Аналогичная теорема существования верна и в случае, если семейство $\mathcal{F}_0$ заменить подсемейством $\mathcal{F}_{01} \subset \mathcal{F}_0$, состоящим из допустимых управлений на фиксированном промежутке времени $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ из интервала $[\tau_0, \tau_1]$.

Следствие 2. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = A(x, t) + B(x, t)\,u$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [A^0(x(t), t) + B^0(x(t), t)\,u(t)]\,dt + \operatorname*{ess\,sup}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(x(t), u(t)),$$

где A, B, A^0, B^0 *есть матрицы класса* C^1 *в* R^{n+1}, $g(x)$ *и* $\gamma(x, u)$ *непрерывны в* R^{n+m}, *и* $\gamma(x, u)$ *является выпуклой функцией от* u *для каждого фиксированного* x. *Предположим, что ограничивающее множество* $\Omega(x, t)$ *компактно и выпукло для всех* (x, t). *Тогда выполняется предположение* (с). *Если мы также будем предполагать выполнение условий* 1—4, (а), (в), *то на интервале* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ *существует оптимальное управление из* $\mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $u_k(t)$ $(t_0^k \leqslant t \leqslant t_1^k)$ — последовательность допустимых управлений из $\mathcal{F}$, для которых последовательность $C(u_k)$ монотонно убывает, стремясь к $\inf C(u)$ для $u \in \mathcal{F}$, и пусть $x_k(t)$ — соответствующие траектории, переводящие систему из $X_0(t_0^k)$ в $X_1(t_1^k)$. Выберем теперь подпоследовательность управлений, вновь обозначенную $u_k(t)$, так, чтобы $t_0^k \to t_0^*$, $t_1^k \to t_1^*$, $x_k(t_0^k) \to x_0^* \in X_0(t_0^*)$, и последовательность $u_k(t)$ слабо сходилась бы к управлению $u^*(t)$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$. Снова предположим, что $t_0^k \leqslant t_0^*$ и $t_1^k \geqslant t_1^*$ и по теореме Асколи выберем

новую подпоследовательность управлений так, чтобы равностепенно непрерывное семейство решений сходилось

$$\lim_{k \to \infty} \hat{x}_k(t) = \hat{x}^*(t) \quad \text{равномерно на} \quad t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*.$$

Здесь $\hat{x}_k(t) = (x_k^0(t), x_k(t))$ и $\hat{x}^*(t) = (x^{0*}(t), x^*(t))$, как и в теореме. Из установленной сходимости следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \hat{f}(x_k(t), t, u_k(t)) = \hat{f}(x^*(t), t, u^*(t))$$

в смысле слабой сходимости на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, где $\hat{f} = (A^0 + B^0 u, A + Bu)$. Кроме того, поскольку $\hat{f}$ линейно по u, имеем

$$\hat{x}^*(t) = \lim_{k \to \infty} \left[\hat{x}_k(t_0^k) + \int_{t_0}^{t} \hat{f}(x_k(s), s, u_k(s))\, ds \right],$$

так что

$$\hat{x}^*(t) = \hat{x}_0^* + \int_{t_0^*}^{t} f(x^*(s), s, u^*(s))\, ds.$$

Таким образом, в этом следствии роль функции $\hat{\varphi}(t)$ из теоремы 4 играет функция $\hat{f}(x^*(t), t, u^*(t))$.

Проверим теперь, что управление $u^*(t)$ $(t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*)$ принадлежит семейству $\mathcal{F}$ и что $\lim\limits_{k \to \infty} C(u_k) = C(u^*)$. Как и в теореме 4, управление $u^*(t)$ переводит систему из состояния $x_0^* \in X_0(t_0^*)$ в $X_1(t_1^*)$, так что выполнены ограничения: $h^1(x^*(t)) \geqslant 0, \ldots, h^r(x^*(t)) \geqslant 0$. Предположим теперь, что управление $u^*(t)$ лежит вне множества $\Omega(x^*(t), t)$ в течение некоторого ненулевого промежутка времени W_1. Тогда существует постоянный единичный m-мерный вектор-строка y, такой, что

$$yu^*(t) > \limsup_{k \to \infty} y\bar{u}_k(t)$$

для всех t из промежутка W_1, и $\bar{u}_k(t)$ — точка, ближайшая к $u_k(t)$, в $\Omega(x^*(t), t)$. Как и при доказательстве теоремы, мы заключаем, что

$$yu^*(t) > \limsup_{k \to \infty} yu_k(t)$$

для каждого t из W_1. Но это противоречит слабой сходимости последовательности $u_k(t)$ к $u^*(t)$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$. Следовательно, $u^*(t)$ $(t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*)$ есть допустимое управление из $\mathcal{F}$ с соответствующим решением $x^*(t)$. Вычислим теперь значение

критерия качества $C(u^*)$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k(t_1^k)) + \int_{t_0^k}^{t_1^k} [A^0(x_k(t),\ t) + B^0(x_k(t),\ t)\, u_k(t)]\, dt =$$

$$= g(x^*(t_1^*)) + \int_{t_0^*}^{t_1^*} [A^0(x^*(t),\ t) + B^0(x^*(t),\ t)\, u^*(t)]\, dt,$$

то нужно лишь проверить, что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^k \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(x_k(t),\ u_k(t)) \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t),\ u^*(t)).$$

В противном случае существовало бы $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0^k \leqslant t \leqslant t_1^k} \gamma(x_k(t),\ u_k(t)) < \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t),\ u^*(t)) - \varepsilon$$

для всех достаточно больших k. Однако тогда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x_k(t),\ u_k(t)) < \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t),\ u^*(t)) - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t),\ u_k(t) < \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t),\ u^*(t)) - \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех достаточно больших k. В этом случае существует ненулевой промежуток времени W_2 из интервала $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ такой, что при $t \in W_2$ $\gamma(x^*(t),\ u_k(t)) < \gamma(x^*(t)\, u^*(t)) - \frac{\varepsilon}{4}$ для всех больших k. Теперь, применив рассуждения о выпуклых функциях из теоремы 8 главы 3 [где роль $\gamma(x^*(t),\ u)$ играет $h^0(t,\ u)$], найдем, что

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{W_2} \gamma(x^*(t),\ u_k(t))\, dt \geqslant \int_{W_2} \gamma(x^*(t),\ u^*(t))\, dt.$$

Но это приводит к противоречию

$$\int_{W_2} \gamma(x^*(t),\ u^*(t))\, dt < \int_{W_2} \left[\gamma(x^*(t),\ u^*(t)) - \frac{\varepsilon}{4}\right] dt.$$

Итак, заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} C(u_k) \geqslant C(u^*),$$

и значит, управление $u^*(t)$ доставляет минимум критерию качества.

Заметим, наконец, что если последовательность $u_k(t)$ не определена на всем $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, то можно расширить ее область опре-

деления, как показано в доказательстве теоремы 4. Как и раньше, определим управление $u^*(t)$ из $\mathcal{F}$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ и соответствующее решение $x^*(t)$. В этом случае надо также показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^k \leqslant t \leqslant t_1^k} \gamma(x_k(t),\ u_k(t)) \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*} \gamma(x^*(t),\ u^*(t)).$$

В противном случае, существовали бы $\eta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t_0^k \leqslant t \leqslant t_1^k} \gamma(x_k(t),\ u_k(t)) < \operatorname*{ess\,sup}_{t_0^*+\eta \leqslant t \leqslant t_1^*-\eta} \gamma(x^*(t),\ u^*(t)) - \varepsilon$$

для всех достаточно больших k. Но $u_k(t)$ определено на $t_0^*+\eta \leqslant \leqslant t \leqslant t_1^*-\eta$ и слабо сходится к $u^*(t)$ на этом интервале. Получаем противоречие, как и прежде.

Итак, и в этом случае

$$\lim_{k\to\infty} C(u_k) \geqslant C(u^*),$$

и $u^*(t)$ является искомым оптимальным управлением на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, что и требовалось доказать.

Замечания. Существование оптимального управления для задачи, сформулированной в следствии 2, с начальным моментом времени t_0^*, или с промежутком управления $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, как в следствии 1, легко доказать. Заметим, что критерием качества в следствии 2 может служить функционал

$$C(u) = \operatorname*{ess\,sup}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \left[\alpha \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x^i(t)| + \beta \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |u^j(t)|\right]$$

с постоянными α и $\beta \geqslant 0$. Для нелинейной системы, рассмотренной в теореме 4, можно принять критерий качества равным указанному выше $C(u)$ с $\beta = 0$. Таким образом, нами доказано существование оптимальных управлений для довольно широкого класса так называемых *минимаксных задач*, т. е. задач, где требуется минимизировать максимум $\gamma(x(t),\ u(t))$ на промежутке управления.

Следующий пример иллюстрирует важность предположения о выпуклости в теореме 4, без которого оптимальное управление, вообще говоря, не существует.

Пример. Рассмотрим управляемую систему на плоскости

$$\dot{x} = -y^2 + u^2, \quad \dot{y} = u$$

с ограничением $|u(t)| \leqslant 1$. Требуется перевести систему из состояния $x(0) = y(0) = 0$ на отрезок $X_1 \{x = 1,\ |y| \leqslant 1\}$ за минимальное время $t^* > 0$. В этой задаче существует равномерная оценка

$$|x(t)| + |y(t)| \leqslant 12 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

для всех измеримых управлений, удовлетворяющих указанному

выше ограничению. Поскольку $\dot{x}(t) \leqslant 1$, то существует нижняя граница для t^*, а именно, $t^* \geqslant 1$. Действительно, для каждого управления $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ равенство

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} [u^2(t) - y^2(t)]\, dt = 1$$

возможно лишь для $t_1 > 1$. Для того чтобы построить минимизирующую последовательность управлений, разделим интервал $0 \leqslant t \leqslant 2$ на отрезки длины $1/k$, и пусть $u_k(t)$ равняется $+1$ или -1 на соответствующих отрезках. Тогда соответствующее решение удовлетворяет условиям:

$$|y_k(t)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \dot{x}_k(t) \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Система достигает целевого множества X_1 в момент t_1^k из интервала $1 \leqslant t_1^k \leqslant k^2/(k^2-1)$ и

$$\lim_{k \to \infty} t_1^k = 1.$$

Таким образом, минимальное оптимальное время $t^* = 1$ не может быть достигнуто ни при каком допустимом управлении. Заметим, что множество $\hat{V} = \{1,\ u,\ -y^2 + u^2\}$ не является выпуклым в R^3, и значит, основная теорема существования для оптимальных управлений неприменима. Интуитивно ясно, что «почти оптимальное» управление должно все время переключаться с $u = +1$ на $u = -1$ так, чтобы интеграл $y(t) = \int_0^t u(s)\, ds$ был почти нулем, а функция $x(t) = \int_0^t [u^2(s) - y^2(s)]\, ds$ была бы близка к t. На каждом промежутке времени $u(t)$ должно примерно половину времени быть равным $+1$, а половину -1; иначе говоря, $u(t) = +1$ с вероятностью $1/2$, и $u(t) = -1$ с вероятностью $1/2$ в каждый момент t. Мы покажем сейчас, что если *ослабить* понятие управления, введя в рассмотрение *вероятностную меру* на Ω, зависящую от времени, то это даст возможность доказать общую теорему существования оптимальных управлений без предположения выпуклости.

Определение. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x,\ t,\ u)$$

с правой частью из класса C^1 в R^{n+1+m} и с компактным ограничивающим множеством $\Omega(x,\ t) \subset R^m$, непрерывно зависящим от $(x,\ t)$. *Слабым управлением* $\mu(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ с реше-

нием $x(t)$ будем называть управление, которое определяется некоторой вероятностной мерой на множестве $\Omega(x(t), t)$ в каждый момент времени t. Мы будем рассматривать слабые управления вида

$$\mu(t) = \alpha_1(t)\,\delta(u_1(t)) + \ldots + \alpha_{n+1}(t)\,\delta(u_{n+1}(t)),$$

где $\alpha_1(t) \geqslant 0, \ldots, \alpha_{n+1}(t) \geqslant 0$ — измеримые функции, и $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) \equiv 1$; $u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t)$ — измеримые функции со значениями из $\Omega(x(t)\ t)$, называемые *вибрационным базисом* для $\mu(t)$, а $\delta(u)$ есть δ-мера, приписывающая вероятность 1 каждому измеримому подмножеству Ω, содержащему u, и вероятность нуль остальным множествам. Решение, соответствующее $\mu(t)$, определяется формулой

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left[\int\limits_{\Omega} f(x,\ t,\ u)\,d\mu\right] dt$$

или

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f_\mu(x,\ t)\,dt,$$

где

$$f_\mu(x,\ t) = \alpha_1(t) f(x,\ t,\ u_1(t)) + \ldots + \alpha_{n+1} f(x,\ t,\ u_{n+1}(t)).$$

Заметим, что (классическое) управление $u(t)$ можно рассматривать как слабое управление $\delta(u(t))$, и значит, решение (классическое) всегда является слабым решением. Для того чтобы единообразно интерпретировать решения, соответствующие классическим и слабым управлеияям, введем понятие *дифференциального включения*

$$\dot{x} \in U(x,\ t).$$

Здесь $U(x,\ t)$ есть непустое множество касательных векторов в точке $x \in R^n$ для каждого момента t из некоторого интервала $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$. Решение $x(t)$ является, по определению, абсолютно непрерывной кривой (на подынтервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$), касательный вектор $\dot{x}(t)$ к которой принадлежит множеству $U(x(t),\ t)$ почти для всех моментов t.

Лемма. *Рассмотрим управляемую систему в R^n:*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x,\ t,\ u), \quad f \in C^1(R^{n+1+m}),$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega(x,\ t)$, непрерывно зависящим от $(x,\ t) \in R^n \times [\tau_0,\ \tau_1]$.

Пусть $V(x,\ t) = f(x,\ t,\ \Omega(x,\ t))$ — множество скоростей. Тогда кривая $x(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ является классическим решением системы $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $x(t)$ есть

решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in V(x, t).$$

Пусть $H(V(x, t))$ — выпуклая оболочка множества $V(x, t)$. Тогда кривая $x(t)$ на интервале $t_0 \geqslant t \geqslant t_1$ является слабым решением системы $\mathscr{S}$ тогда и только тогда, когда $x(t)$ есть решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in H(V(x, t)).$$

Если множество $V(x, t)$ выпукло при каждом (x, t), то каждое слабое решение $x(t)$ является классическим решением. Если множество $V(x, t)$ не выпукло, но множество $\Omega(x, t) = \Omega(t)$ не зависит от x, то каждое слабое решение $x(t)$ является равномерным пределом классических решений на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ — классическое управление с решением $x(t)$. Тогда

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t, u(t)) \in f(x(t), t, \Omega(x(t), t))$$

и значит, $x(t)$ есть решение дифференциального включения

$$x(t) \in V(x(t), t).$$

Обратно, пусть $x(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in f(x(t), t, \Omega(x(t), t)).$$

Мы хотим найти измеримую функцию $u(t) \subset \Omega(x(t), t)$, такую, что $f(x(t), t, u(t)) = \dot{x}(t)$. Но из леммы 3А главы 2, если ее модифицировать, добавив непрерывную зависимость Ω от t, следует существование искомого управления $u(t)$, с соответствующим решением $x(t)$.

Рассмотрим теперь слабое управление

$$\mu(t) = \alpha_1(t)\,\delta(u_1(t)) + \ldots + \alpha_{n+1}(t)\,\delta(u_{n+1}(t))$$

с решением $x(t)$, удовлетворяющим уравнению

$$\dot{x}(t) = \alpha_1(t) f(x, t, u_1(t)) + \ldots + \alpha_{n+1}(t) f(x, t, u_{n+1}(t)).$$

Тогда для почти каждого момента t

$$f(x(t), t, u_1(t)),\ f(x(t), t, u_2(t)),\ \ldots,\ f(x(t), t, u_{n+1}(t))$$

принадлежат $V(x(t), t)$, и значит,

$$\dot{x}(t) \in H(V(x(t), t)).$$

Обратно, пусть $x(t)$ такая абсолютно непрерывная на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ кривая в R^n, что

$$\dot{x}(t) \in H(V(x(t), t)).$$

Рассмотрим непрерывную функцию

$$h(t,\ A)=\alpha_1 f(x(t),\ t,\ u_1)+\ldots+\alpha_{n+1} f(x(t),\ t,\ u_{n+1}),$$

где $A=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, u_1, \ldots, u_{n+1})$ принимает значения из некоторого подмножества $\Sigma\times\Omega^{n+1}(t)$ пространства $R^{n+1+(n+1)m}$. Здесь Σ есть единичный симплекс в R^{n+1} и $\Omega^{n+1}(t)=\Omega(x(t),\ t)\times\ldots\times\Omega(x(t),\ t)$ ($n+1$ — сомножитель).

Для каждого момента t и каждого $A\in\Sigma\times\Omega^{n+1}(t)$ точка $h(t,\ A)$ принадлежит $H(V(x(t),\ t))$. Действительно, поскольку выпуклая оболочка множества $V(x(t),\ t)$ представляет собой объединение всевозможных симплексов с вершинами из $V(x(t),\ t)$, то замечаем, что

$$h(t,\ \Sigma\times\Omega^{n+1}(t))=H(V(x(t),\ t)).$$

Поскольку $\dot{x}(t)\in h(t,\ \Sigma\times\Omega^{n+1})$, то из леммы 3А главы 2 вытекает, что можно выбрать измеримую функцию

$$A(t)=(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n+1}(t),\ u_1(t), \ldots, u_{n+1}(t))$$

на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ так, чтобы

$$\dot{x}(t)=\alpha_1(t)\ f(x(t),\ t,\ u_1(t))+\ldots+\alpha_{n+1}(t) f(x(t),\ t,\ u_{n+1}(t))$$

почти всюду. Значит, $x(t)$ есть решение, соответствующее слабому управлению

$$\mu(t)=\alpha_1(t)\,\delta(u_1(t))+\ldots+\alpha_{n+1}(t)\,\delta(u_{n+1}(t)).$$

Предположим, что множество $V(x,\ t)$ выпукло при всех $(x,\ t)$. Тогда $H(V(x,\ t))=V(x,\ t)$. Следовательно, слабое решение $x(t)$ является абсолютно непрерывной кривой в R^n, причем $\dot{x}(t)\in H(V(x(t),\ t))=V(x(t),\ t)$. Итак, слабое решение $x(t)$ является также классическим решением.

Наконец, предположим, что множество $V(x,\ t)$ не обязательно выпукло. Пусть $x(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ — слабое решение, соответствующее слабому управлению

$$\mu(t)=\alpha_1(t)\,\delta(u_1(t))+\ldots+\alpha_{n+1}(t)\,\delta(u_{n+1}(t)).$$

Мы хотим аппроксимировать $x(t)$ с помощью абсолютно непрерывных кривых $x_k(t)$, для которых $\dot{x}_k(t)\in V(x_k(t),\ t)$, $k=1, 2, 3, \ldots$ Имеем

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}[\alpha_1(s) f(x(s),\ s,\ u_1(s))+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_{n+1}(s) f(x(s),\ s,\ u_{n+1}(s))]\,ds.$$

Мы можем так изменить вектор-функцию $\alpha(t)=(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n+1}(t))$ на малом промежутке времени, чтобы $\alpha(t)$ была непрерывна, а решение $x(t)$ изменилось бы очень мало (по норме). Предположим,

что такое изменение уже произведено, и заметим, что мы все еще имеем $u_i(t) \in \Omega(t)$ для $i=1,\ldots,n+1$ и $\dot{x}(t) \in H(V(x(t), t))$, как и требовалось.

Определим теперь вектор

$$\tilde{\alpha}^{(k)}(t) = \begin{cases} (1,\ 0,\ 0,\ldots,0,\ 0) \text{ на } I_{k,1}, \\ (0,\ 1,\ 0,\ldots,0,\ 0) \text{ на } I_{k,2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (0,\ 0,\ 0,\ldots,0,\ 1) \text{ на } I_{k,n+1}, \end{cases}$$

где $I_{k,j}$ — сумма конечного числа подынтервалов интервала $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, при $k \geqslant 1$ и $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Для получения $I_{k,j}$ разделим интервал $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ на k равных последовательных интервалов точками $t_0 = t_{k0} < t_{k1} < t_{k2} < \ldots < t_{kk} = t_1$ и разделим каждый из этих k подынтервалов на $(n+1)$ интервалов, длины которых пропорциональны $(\alpha_1(t_{kl}),\ \alpha_2(t_{kl}),\ \ldots,\ \alpha_{n+1}(t_{kl}))$ для $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,k-1$. Тогда $I_{k,1}$ есть объединение первых кусков всех интервалов $t_{kl} < t < t_{k,l+1}$, а $I_{k,j}$, аналогично, объединение j-х кусков всех интервалов $t_{kl} < t < t_{k,l+1}$. Тогда легко проверить, что для каждого I из $[t_0, t_1]$

$$\lim_{k\to\infty} \int_I \tilde{\alpha}^{(k)}(t)\,dt = \int_I \alpha(t)\,dt,$$

и значит,

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\alpha}^{(k)}(t) = \alpha(t)$$

в смысле слабой сходимости на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Определим теперь классическое решение $x_k(t)$:

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_i^{(k)}(s)\ f(x_k(s), s, u_i(s))\,ds =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_k(s), s, \tilde{u}(s))\,ds.$$

Заметим, что $x_k(t)$ является решением (на всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, как показывает нижняя оценка), соответствующим классическому управлению

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{на} & I_{k,1}, \\ \vdots & & \\ u_{n+1}(t) & \text{на} & I_{k,n+1}, \end{cases}$$

причем $\tilde{u}(t) \in \Omega(t)$. Для того чтобы показать, что $x_k(t)$ сходится

к $x(t)$, произведем оценку

$$|x(t)-x_k(t)| = \left| \sum_{i=1}^{n+1} \int_{t_0}^{t} \alpha_i(s) f(x(s), s, u_i(s)) - \right.$$
$$-\tilde{\alpha}_i^{(k)}(s) f(x(s), s, u_i(s)) + \tilde{\alpha}_i^{(k)}(s) f(x(s), s, u_i(s)) -$$
$$\left. -\alpha_i^{(k)}(s) f(x_k(s), s, u_i(s))\, ds \right|$$

и

$$|x(t)-x_k(t)| \leqslant \varepsilon_k + K \int_{t_0}^{t} |x(s)-x_k(s)|\, ds,$$

где $\varepsilon_k \to 0$ и константа K зависит от значения максимума $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$. Но тогда

$$|x(t)-x_k(t)| \leqslant \varepsilon_k e^{K|t_1-t_0|}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t)$$

равномерно на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Лемма доказана.

Замечание. Если множество $\Omega(x, t)$ зависит от x, то наше доказательство просто дает последовательность абсолютно непрерывных функций $x_k(t)$, сходящихся равномерно к слабому решению $x(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, но являющихся лишь приближенными решениями для управлений $u_k(t)$, т. е.

$$\operatorname{dist}(u_k(t), \Omega(x_k(t), t)) \leqslant \frac{1}{k}$$

и

$$\operatorname{dist}(\dot{x}_k(t), V(x_k(t), t)) \leqslant \frac{1}{k}.$$

Однако, в случае, когда $\Omega(x, t) = \Omega(t)$, мы получаем тот важный результат, что классическое оптимальное управление является также оптимальным среди всех слабых управлений для системы (как в теореме 4):

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u),$$

с управлениями из $\Omega(t)$ и критерием качества

$$C(u) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega} f^0(x(t), t, u)\, d\mu \right] dt + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(x(t)),$$

если только целевое множество совпадает со всем пространством $X_1(t) = R^n$. Это легко получается из следующего выражения

для $C(u)$:

$$C(u)=g(x(t_1))+x^0(t_1)+\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}(x(t)),$$

где

$$x^0(t)=\int_{t_0}^{t}[\alpha_1(s)f^0(x(s),s,u_1(s))+\ldots+\alpha_{n+1}(s)f^0(x(s),s,u_{n+1}(s))]\,ds,$$

и из существования классических решений $\hat{x}_k(t)$, равномерно сходящихся к оптимальному слабому решению. Если целевое множество $X_1\neq R^n$, например, $X_1=0$ в R^n, то классические решения $x_k(t)$ могут не достичь X_1 и значит, они не могут претендовать на минимальное значение критерия качества, и наше предположение неверно. Однако, даже в случае $X_1=0$, можно все же заключить, что классический оптимум равняется слабому оптимуму, если только система $\mathcal{S}$ обладает свойством управляемости вблизи $x=0$, $u=0$, как это будет показано в следующей главе.

Наконец, последний результат относительно слабых управлений — это общая теорема существования без предположения (с) теоремы 4 о выпуклости. Однако в силу присущих слабым управлениям свойств выпуклости эта теорема является простым следствием теоремы 4.

Теорема 5. *Рассмотрим нелинейную систему в* R^n

$$(\mathcal{S})\qquad \dot{x}=f(x,t,u),\quad f\in C^1\quad \text{в}\quad R^{n+1+m}.$$

Выполнены следующие условия:

1) *Начальное и целевое множества* $X_0(t)$ и $X_1(t)$ *суть непустые компактные множества, непрерывно меняющиеся в* R^n *в зависимости от* t, *когда* t *принадлежит основному заданному интервалу управления,* $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$.

2) *Ограничивающее множество* $\Omega(x,t)$ *есть непустое компактное множество в* R^m, *непрерывно зависящее от* $(x,t)\in R^n\times[\tau_0,\tau_1]$.

3) *Имеются ограничения на состояние системы (в конечном или бесконечном числе)*

$$h^1(x)\geqslant 0,\ \ldots,\ h^r(x)\geqslant 0,$$

где $h^1,\ldots,h^r$ — *действительные непрерывные функции из* R^1.

4) *Семейство* $\mathfrak{F}$ *допустимых управлений состоит из всех слабых управлений* $\mu(t)=\alpha_1(t)\delta(u_1(t))+\ldots+\alpha_{n+1}(t)\delta(u_{n+1}(t))$ *на различных подынтервалах времени* $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ *из интервала* $[\tau_0,\tau_1]$, *таких, что каждому* $\mu(t)$ *соответствует решение*

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}[\alpha_1(s)f(x(s),s,u_1(s))+\ldots+\alpha_{n+1}(s)f(x(s),s,u_{n+1}(s))]\,ds$$

на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, *переводящее систему из состояния*

$x(t_0) \in X_0(t_0)$ *в состояние* $x(t_1) \in X_1(t_1)$. *Функции* $u_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ *составляют соответствующий вибрационный базис*

$$u_1(t) \in \Omega(x(t), t), \ \ldots, \ u_{n+1}(t) \in \Omega(x(t), t),$$

причем $h^1(x(t)) \geqslant 0, \ \ldots, \ h^r(x(t)) \geqslant 0$.

5) *Критерий качества для всех* $\mu(t) \in \mathcal{F}$ *имеет вид*

$$C(\mu) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [\alpha_1(s) f^0(x(s), s, u_1(s)) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n+1}(s) f^0(x(s), s, u_{n+1}(s))] \, ds + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(x(t)),$$

где $f^0 \in C^1$ в R^{n+1+m}, *а функции* $g(x)$ и $\gamma(x)$ *непрерывны в* R^n.

Предположим, что:

(а) *множество* $\mathcal{F}$ *допустимых слабых управлений непусто;*

(в) *решения равномерно ограничены*

$$|x(t)| \leqslant b \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

для всех слабых управлений $\mu(t) \in \mathcal{F}$.

Тогда существует слабое оптимальное управление

$$\mu^*(t) = \alpha_1^*(t)\,\delta(u_1^*(t)) + \ldots + \alpha_{n+1}^*(t)\,\delta(u_{n+1}^*(t))$$

из $\mathcal{F}$, *минимизирующее* $C(\mu)$. *В этом случае оптимальное управление разлагается по базису*

$$u_1^*(t), \ \ldots, \ u_{n+1}^*(t)$$

с соответствующими вероятностями $\alpha_1^*(t), \ldots, \alpha_{n+1}^*(t)$, *в каждый момент времени* t *из интервала* $t_0^* \leqslant t \leqslant t^*$.

Доказательство. Рассмотрим управляемую систему в R^n

$$(\mathcal{S}_r) \quad \dot{x} = f_r(x, t, \tilde{u}) = \alpha_1 f(x, t, u_1) + \ldots + \alpha_{n+1} f(x, t, u_{n+1})$$

с классическим управлением

$$\tilde{u}(t) = (\alpha_1(t), \ \ldots, \ \alpha_{n+1}(t), \ u_1(t), \ \ldots, \ u_{n+1}(t))$$

из компактного множества $\Sigma \times \Omega^{n+1}(t)$. Здесь Σ есть единичный симплекс из R^{n+1}, и $\Omega^{n+1}(t) = \Omega(x(t), t) \times \Omega(x(t), t) \times \ldots \times \Omega(x(t), t)$. Начальное и целевое множества, ограничения на состояния и критерий качества

$$C_r(\tilde{u}) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_r^0(x(s), s, \tilde{u}(s)) \, ds + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(x(t))$$

такие же, как и выше. Каждому классическому управлению $\tilde{u}(t)$ системы $\mathcal{S}_r$ соответствует слабое управление

$$\mu(t) = \alpha_1(t)\,\delta(u_1(t)) + \ldots + \alpha_{n+1}(t)\,\delta(u_{n+1}(t)) \ \text{ системы } \mathcal{S};$$

более того, каждое слабое управление $\mu(t)$ системы $\mathcal{S}$ получается именно таким образом. Решения системы $\mathcal{S}$, соответствующие $\mu(t)$, совпадают с решениями системы $\mathcal{S}_r$, соответствующими $\tilde{u}(t)$; совпадают также и значения критерия качества $C_r(\tilde{u}) = C(\mu)$. Заметим, однако, что для задачи $\mathcal{S}_r$ множество скоростей из R^{n+1}

$$\hat{V}_r(x, t) = \begin{cases} \alpha_1 f^0(x, t, \Omega(x, t)) + \ldots + \alpha_{n+1} f^0(x, t, \Omega(x, t)), \\ \alpha_1 f(x, t, \Omega(x, t)) + \ldots + \alpha_{n+1} f(x, t, \Omega(x, t)), \end{cases}$$

где вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ пробегает множество Σ, будет с необходимостью выпуклым множеством при любых (x, t). Действительно, $\hat{V}_r(x, t) = H(\hat{V}(x, t))$, где под $\hat{V}(x, t)$ понимается множество скоростей для первоначальной классической задачи $\mathcal{S}$. Отсюда следует, что задача $\mathcal{S}_r$ с классическими управлениями удовлетворяет всем условиям и предположениям теоремы 4, и следовательно, классическое оптимальное управление $\tilde{u}^*(t) = (\alpha_1^*(t), \ldots$ $\ldots, \alpha_{n+1}^*(t), u_1^*(t), \ldots, u_{n+1}^*(t))$ существует на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, и доставляет минимум критерию качества $C_r(\hat{u})$. Но тогда

$$\mu^*(t) = \alpha_1^*(t)\,\delta(u_1^*(t)) + \ldots + \alpha_{n+1}^*(t)\,\delta(u_{n+1}^*(t))$$

будет искомым слабым оптимальным управлением для данной задачи $\mathcal{S}$. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим управляемую систему в* R^n

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = A(x, t) + B(x, t)\,u$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [A^0(x(t), t) + B^0(x(t), t)\,u(t)]\,dt + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(x(t)),$$

где матрицы A, B, A^0, B^0 *принадлежат* C^1 *в* R^{n+1}, *а* $g(x)$ *и* $\gamma(x)$ — *непрерывные функции в* R^n. *Предположим, что компактное ограничивающее множество* $\Omega(x, t) \subset R^m$ *непрерывно зависит от точки* (x, t), *принадлежащей множеству* $R^n \times [\tau_0, \tau_1]$. *Тогда каждое слабое управление из* $\Omega(x(t), t)$

$$\mu(t) = \alpha_1(t)\,\delta(u_1(t)) + \ldots + \alpha_{n+1}(t)\,\delta(u_{n+1}(t)),$$

с соответствующим решением $x(t)$ *системы* $\mathcal{S}$, *определяет классическое управление*

$$\tilde{u}(t) = \alpha_1(t)\,u_1(t) + \ldots + \alpha_{n+1} u_{n+1}(t),$$

принадлежащее слабому ограничивающему множеству $H(\Omega(x(t), t))$. *Обратно, каждое классическое управление* $\tilde{u}(t) \subset H(\Omega(x(t), t))$ *системы* $\mathcal{S}$ *возникает из некоторого слабого управления* $\mu(t)$ *из* $\Omega(x(t), t)$; *более того, обоим управлениям соответствует одно и то же значение критерия качества.*

Поэтому оптимальное слабое управление $\mu^*(t)$ *из* $\Omega(x^*(t), t)$ *определяет классическое оптимальное управление* $\tilde{u}^*(t)$ *системы* $\mathcal{S}$, *принадлежащее слабому ограничивающему множеству* $H(\Omega(x, t))$.

Доказательство. Соответствие $\mu(t) \longrightarrow \tilde{u}(t)$ вытекает непосредственно из свойства линейности системы $\mathcal{S}$ и из того, что подынтегральное выражение критерия качества зависит от u. Для того чтобы определить $\mu(t)$, соответствующее заданному $\tilde{u}(t)$, поступим так же, как и при доказательстве теоремы 5; так как выражения для $C(\tilde{u})$ и $C(\mu)$ идентичны, то следствие доказано.

Это следствие показывает, что для линейных систем переход от множества Ω к множеству $H(\Omega)$ эквивалентен введению в Ω слабых управлений μ. Ниже мы продолжим изучение таких управлений, но сначала целесообразно показать, что такие обобщения вовсе не обязательны для линейных систем обычного типа.

Мы получим теорему существования для оптимальных управлений без всяких предположений о выпуклости, и без ослабления понятия множества допустимых управлений. Управление входит в систему нелинейно, однако основные динамические характеристики входят в нее линейно. Поэтому можно использовать то свойство выпуклости, которое следует из результатов Ляпунова о выпуклости области значений векторной меры. Эти сведения из теории меры можно найти в приложении к главе 2 (лемма 4А), а также в некоторых упражнениях после этого раздела.

Теорема 6. *Рассмотрим систему в* R^n

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t, u),$$

где $A(t)$ *и* $B(t, u)$ — *непрерывные матрицы в* R^{1+m}. *Исходные данные таковы:*

1) *начальное и целевое множества* $X_0(t)$ *и* $X_1(t)$ — *непусты, компактны, непрерывно зависят от* t *в* R^n, *при* t *из некоторого заданного компактного интервала* $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$;

2) *ограничивающее множество* $\Omega(t)$ *есть непустое компактное множество, непрерывно меняющееся в* R^m, *при* $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$;

3) *заданы интегральные ограничения на состояние системы*

$$\int_{t_0}^{t_1} h^1(t, u(t))\,dt \geqslant 0, \quad \ldots, \quad \int_{t_0}^{t_1} h^r(t, u(t))\,dt \geqslant 0$$

(*множество этих ограничений конечно или пусто*), *где* $h^1, \ldots, h^r$ — *действительные непрерывные функции из* R^{1+m};

4) *семейство* $\mathcal{F}$ *допустимых управлений состоит из всех измеримых функций* $u(t)$ *на различных подынтервалах* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *в* $[\tau_0, \tau_1]$, *таких, что каждому управлению соответствует траектория* $x(t)$ *на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *переводящая систему из со-*

стояния $x(t_0) \in X_0(t_0)$ *в* $x(t_1) \in X_1(t_1)$ *причем выполняются как ограничения на управление* $u(t) \subset \Omega(t)$ *на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *так и интегральные ограничения* 3);

5) *критерий качества, определенный для* $u \in \mathcal{F}$, *имеет вид*

$$C(u) = g(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} A^0(t)\,x(t) + B^0(t, u(t))\,dt,$$

где $g(x)$, $A^0(t)$, $B^0(t, u)$ *непрерывны при всех* (x, t, u).

Предположим, что множество $\mathcal{F}$ *допустимых управлений непусто. Тогда существует оптимальное управление* $u^*(t)$ *из* $\mathcal{F}$, *на интервале* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, *минимизирующее* $C(u)$.

Доказательство. Дополнив систему $\mathcal{S}$, получим систему

$$(\hat{\mathcal{S}}) \qquad \begin{aligned} \dot{x}^0 &= A^0(t)\,x + v^0(t), \\ \dot{x} &= A(t)\,x + v(t), \\ \dot{x}^\alpha &= v^\alpha(t) \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, r \end{aligned}$$

и рассмотрим семейство $\hat{\mathcal{F}}$ всех измеримых управлений

$$\hat{v}(t) = (v^0(t),\ v(t),\ v^\alpha(t))$$

на интервале $\tau_0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant \tau_1$, с соответствующими решениями $\hat{x}(t) = (x^0(t), x(t), x^\alpha(t))$ в R^{1+n+r}, переводящих систему из состояния $\hat{X}_0(t_0) = (0, X_0(t_0), 0)$ в состояние $\hat{X}_1(t_1) = (x^0, X_1(t_1), x^\alpha(t_1))$, причем $x^\alpha(t_1) \geqslant 0$, а управление $\hat{v}(t)$ удовлетворяет ослабленному ограничению $\hat{v}(t) \subset H(\hat{\Omega}(t))$, где

$$\hat{\Omega}(t) = B^0(t, \Omega(t)) \times B(t, \Omega(t)) \times h^1(t, \Omega(t)) \times \ldots \times h^r(t, \Omega(t)).$$

Заметим, что множество $\hat{\mathcal{F}}$ непусто, так как

$$v^0(t) = B^0(t, u(t)), \quad v(t) = B(t, u(t)), \quad v^\alpha(t) = h^\alpha(t, u(t)),$$

где $u(t) \in \mathcal{F}$ обозначает допустимое дополненное управление. Из свойства линейности системы $\hat{\mathcal{S}}$ по $\hat{x}$ следует существование равномерной оценки $|\hat{x}(t)| \leqslant b$ для всех решений. Поскольку система $\hat{\mathcal{S}}$ линейна по отношению к управлениям $\hat{v}$, а $H(\hat{\Omega}(t))$ — непрерывное выпуклое множество в R^{1+m+r}, то можно непосредственно применить теорему 4 и доказать существование оптимального управления $\hat{v}^*(t)$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, минимизирующего функционал $g(x(t_1)) + x^0(t_1)$.

Пусть оптимальная траектория будет $\hat{x}^*(t) = (x^{0*}(t), x^*(t), x^{\alpha*}(t))$ $(t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*)$. Тогда множество достижимости $K_{H(\hat{\Omega})}(t)$ в R^{1+n+r}, состоящее из решений, исходящих из $\hat{x}^*(t_0^*)$, пересекается с множеством $\hat{X}_1(t)$ (компактным при $|x^0| \leqslant b$, $|x^\alpha| \leqslant b$) в момент $t = t_1^*$,

так что действительная функция $g(x)+x^0$ достигает при этом минимума. Но теорема 1А из приложения к главе 2 утверждает, что $K_{\hat{\Omega}}(t) \equiv K_{H(\hat{\Omega})}(t)$ [обобщение этой теоремы не случай, когда множество $\hat{\Omega}(t)$ зависит от t, дается в качестве упражнения]. Итак, существует управление $\bar{v}^*(t) \subset \hat{\Omega}(t)$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1$, которое также доставляет минимум критерию качества.

Однако из леммы 3А того же приложения, также обобщенной на случай, когда $\Omega(t)$ зависит от t,—следует существование допустимого управления $u^*(t)$ из $\mathcal{F}$ на интервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, такого, что

$$\bar{v}^{0*}(t) = B^0(t, u^*(t)), \quad \bar{v}^*(t) = B(t, u^*(t)), \bar{v}^{\alpha *}(t) = h^\alpha(t, u^*(t)).$$

Таким образом, $u^*(t)$ доставляет то же самое минимальное значение критерию качества $C(u^*) = g(x^*(t_1^*)) + x^{0*}(t_1^*)$. Поскольку каждое допустимое управление $u(t) \in \mathcal{F}$ определяет некоторое расширенное управление $\hat{v}(t) \in \hat{\mathcal{F}}$, то $C(u) \geqslant C(u^*)$, и $u^*(t)$ является искомым оптимальным управлением. Теорема доказана.

Здесь следует повторить обычные замечания относительно существования оптимальных управлений при предположениях теоремы 6, с фиксированным начальным моментом времени t_0^* или на фиксированном подынтервале $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ из интервала $[\tau_0, \tau_1]$.

Заметим, что основная идея теоремы 6 [для линейных систем множество Ω заменяется его расширением $H(\Omega)$ и, кроме того, вводятся слабые управления μ в Ω] нисколько не облегчает дело по сравнению с применением обычных классических управлений $u(t) \subset \Omega$.

Рассмотрим теперь теорему существования оптимальных управлений для нелинейных систем при различных других обобщениях понятия управления, в частности, при *импульсных управлениях*. Траектория системы будет тогда определяться как решение некоторого интегрального уравнения, и может не быть непрерывной, а иметь скачки, соответствующие импульсам управления. Поэтому описание таких систем потребует особой аккуратности.

Пусть вектор-функция $u(t)$ со значениями из R^m определена на некотором интервале $\mathcal{I}$ из R^1. Определим ее полную вариацию,

$$\operatorname{var} u(t) = \sup \sum_{j=0}^{k} | u(t'_{j+1}) - u(t'_j) |,$$

где $t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_k < t'_{k+1}$— произвольное конечное подмножество из $\mathcal{I}$, а супремум берется по всевозможным таким конечным наборам точек. Вектор-функция $u(t)$ имеет ограниченную вариацию в $\mathcal{I}$, если $\operatorname{var} u(t) < \infty$, а это будет тогда и только тогда, когда каждая ее компонента $u(t)$ имеет ограниченную вариацию в $\mathcal{I}$. Если

интервал $\mathcal{I}$ компактен, и функция $u(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица на $\mathcal{I}$, то очевидно, что $\operatorname{var} u(t) < \infty$. Однако функция $u(t)$ ограниченной вариации может иметь конечное число разрывов первого рода. Такие функции мы всегда будем доопределять (на конечном множестве точек), чтобы они были непрерывными справа на открытом интервале $\mathcal{I}$.

Если функция $u(t)$ имеет ограниченную вариацию на открытом интервале $\mathcal{I}$, то ей можно сопоставить векторную меру Du как (обобщенную) производную от $u(t)$, полагая для каждого подынтервала $t'_j < t \leqslant t'_{j+1}$ из $\mathcal{I}$

$$Du\,(t'_j,\ t'_{j+1}] = u(t'_{j+1}) - u(t'_j),$$

и продолжая ее затем на всех лебеговых подмножествах интервала $\mathcal{I}$ обычным образом так, чтобы полученная мера была счетно аддитивной. Каждая (векторная) мера на $\mathcal{I}$ порождается некоторой функцией ограниченной вариации, и две такие функции дают одну и ту же меру лишь в том случае, если они отличаются на постоянную. Если, кроме того, функция $u(t)$ непрерывна, то мера Du приписывает нулевой вес каждой точке в $\mathcal{I}$; если же $u(t)$ имеет скачок в t', то

$$Du\,[t'] = u(t') - u(t'-) \equiv \mathcal{I}\,(u\,(t')).$$

Таким образом, $\int\limits_{\mathcal{I}} Du$ есть обычный интеграл Римана — Стилтьеса.

В частности, в случае $n = 1$ и

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty < t < 0, \\ 1 \text{ при } 0 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Du представляет собой δ-функцию, или, точнее, Du есть мера, приписывающая вес $+1$ каждому измеримому множеству, содержащему точку $t = 0$, и вес 0 множествам, не содержащим этой точки.

Пусть функция $u(t)$ имеет ограниченную вариацию на открытом интервале $\mathcal{I}$ из R^1. Тогда мы можем рассматривать меру Du на любом подмножестве $\mathcal{I}$. В частности, норма Du на компактном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ в $\mathcal{I}$ определяется так:

$$\|Du\| = \int\limits_{t_0}^{t_1} |Du| = |\,\mathcal{I}\,(u\,(t_0))\,| + \operatorname*{var}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} u(t).$$

Рассмотрим теперь обобщенную, или *импульсную дифференциальную* систему в R^n

$$Dx = f(x,\ t,\ u) + e(t)\,Du,$$

где вектор-функция $u(t)$ имеет ограниченную вариацию на открытом интервале $\mathcal{I}$, а функции $f(x,\ t,\ u)$ и $e(t)$ всюду принадлежат C^1,

Тогда решение $x(t)$, проходящее через x_0 в момент $t_0 \in \mathcal{J}$, есть некоторая функция ограниченной вариации в открытой окрестности точки $t=t_0$ (и непрерывная справа в t_0), удовлетворяющая интегральному уравнению

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(x(s),\ s,\ u(s))\,ds+\int_{t_0}^{t} e(s)\,Du,$$

где интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса. Заметим, что

$$x(t_0-)=x_0,$$

и начальное значение принимается именно в этом смысле. Теорема существования и единственности решения для этого интегрального уравнения может быть доказана методом последовательных приближений, так же как и теорема о непрерывной зависимости решения от начальных условий.

Управлением для импульсной системы

$$Dx=f(x,\ t,\ u)+e(t)\,Du$$

на компактном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ будет функция ограниченной вариации $u(t)$ в некоторой открытой окрестности $\mathcal{J}$ интервала $[t_0, t_1]$, определяющая, следовательно, траекторию $x(t)$, по которой система переходит из начального состояния $x(t_0-)=x_0$ в заданную цель $x(t_1)$. Заметим, что норма соответствующей меры Du зависит, так же как и полная вариация функции $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, от скачка $J(u(t_0))$. Заметим также, что интервал $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ может быть вырожденным, т. е. состоять из одной точки $t=t_0$; следующий ниже пример иллюстрирует именно такой случай мгновенного скачка системы в целевую точку.

Пример. Рассмотрим импульсную систему в R^1:

$$Dx=u+Du,$$

со скалярными управлениями $u(t)$, обладающими ограниченной вариацией в некоторой окрестности интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Мы хотим перевести систему из точки $x_0=-2$ в точку $x_1=0$ с помощью управлений, удовлетворяющих ограничениям $|u(t)| \leqslant 1$, $\|Du\| \leqslant 1$, минимизируя критерий качества $C(u)=\int_{t_0}^{t_1} |u(t)|\,dt$. Легко видеть, что управление

$$u^*(t)=\begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ 1, & 0 \leqslant t \leqslant t_1 = 1 \end{cases}$$

с соответствующим решением

$$x^*(t)=\begin{cases} -2, & -\infty < t < 0, \\ -1+t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

переводит систему из точки x_0 в точку x_1 за минимально возможное время $t_1=1$, поскольку при управлении $u(t)=+1$ решение обладает максимально возможной скоростью, и это сочетается здесь с максимально возможным положительным скачком. Таким образом, управление $u^*(t)$ доставляет также минимум критерию качества

$$C(u^*)=\int_0^1 |u^*(t)|\,dt=1,$$

так как $\dot{x}(t)=u$ в интервалах между скачками $u(t)$, и с помощью скачков мы приблизились к точке $x_0=-2$ как только возможно. Итак, оптимальное управление получается наложением импульса в виде δ-функции при $t=0$ на управление $u\equiv 1$.

Ослабим теперь ограничения на управление до $|u(t)|\leqslant 2$, $\|Du\|\leqslant 2$. Оптимальное управление

$$u^+(t)=\begin{cases} 0, & -\infty<t<0,\\ 2, & 0\leqslant t\leqslant t_1,\end{cases}$$

так что

$$x^+(t)=\begin{cases} -2, & -\infty<t<0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

Тогда минимальное время $t_1=0$, и минимум критерия качества $C(u^+)=0$. Если бы не допускать таких скачков из точки $x_0=-2$ в точку $x_1=0$, то оптимального управления вовсе не существовало бы. Конечно, всегда можно аппроксимировать импульсное управление $u^*(t)$ с помощью гладкого управления $\tilde{u}(t)$ из C^1, с соответствующим гладким [решением $\tilde{x}(t)=\int_0^{t_1}[\tilde{u}(t)+\dot{\tilde{u}}(t)]\,dt$, причем значение критерия качества также будет приближаться к минимуму. Чем круче будет функция $\tilde{u}(t)$ на все меньшем интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, т. е. чем ближе она будет к δ-функции $u^+(t)$, тем ближе $C(\tilde{u})$ к нулю. Однако нулевое значение не будет достигнуто ни при каком гладком управлении; для этого необходимо введение импульсного управления.

Теорема 7. *Рассмотрим импульсную управляемую систему в R^n:*

$$(\mathscr{S})\qquad Dx=f(x,\ t,\ u)+e(t)\,Du,$$

где $f(x,\ t,\ u)$ принадлежит C^1 в R^{n+1+m}. Исходные данные таковы:

1) *начальное и целевое множества $X_0(t)$ и $X_1(t)$ суть непустые, компактные множества, непрерывно меняющиеся в R^n с изменением t, когда t принадлежит основному интервалу $\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$;*

2) *ограничивающее множество* $\Omega(x, t)$ *есть непустое компактное множество в* R^m, *непрерывно зависящее от точки* (x, t) *в* $R^n \times [\tau_0, \tau_1]$;

3) *существуют ограничения на состояние (в конечном или бесконечном числе)*

$$h^1(x, t, u) \geqslant 0, \ \ldots, \ h^r(x, t, u) \geqslant 0,$$

непрерывные в R^{n+1+m} *(возможно, множество этих ограничений пусто)*;

4) *семейство* $\mathfrak{F}$ *допустимых управлений состоит из функций ограниченной вариации* $u(t)$ *на различных подынтервалах* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *интервала* $\tau_0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \tau_1$ [*в действительности вектор-функция* $u(t)$ *имеет ограниченную вариацию в открытой окрестности, непрерывна справа вместе с соответствующим решением* $x(t)$ *и порожденной им мерой* Du]. *Далее, функция* $u(t)$ *на интервале* $(t_0-) \leqslant t \leqslant t_1$ *удовлетворяет ограничениям* $u(t) \subset \Omega(x(t), t)$, $h^1(x(t), t, u(t)) \geqslant 0, \ \ldots, \ h^r(x(t), t, u(t)) \geqslant 0$ *и* $\|Du\| \leqslant E$ *для заданного конечного* $E \geqslant 0$. *Траектория же* $x(t)$ *переводит систему из точки* $x(t_0-) \in X_0(t_0)$ *в точку* $x(t_1) \in X_1(t_1)$.

5) *Критерий качества, определенный на управлениях* $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ *из семейства* $\mathfrak{F}$ *имеет вид*

$$C(u) = g(x(t_1), u(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), t, u(t))\, dt + \\ + \int_{t_0-}^{t_1} g^0(t)\, Du + \gamma(\sup|x(t)|, \|Du\|),$$

где функции g, f^0, g^0, γ *непрерывны по всем действительным аргументам, а функция* γ *монотонно не возрастает по каждому из аргументов.*

Предположим, что:

(а) *семейство управлений* $\mathfrak{F}$ *непусто;*

(в) *существует равномерная оценка* $|x(t)| \leqslant b$ *на интервале* $(t_0-) \leqslant t \leqslant t_1$ *для решений, соответствующих всем управлениям из* $\mathfrak{F}$.

Тогда существует оптимальное управление $u^*(t)$ *из семейства* $\mathfrak{F}$ *на интервале* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, *минимизирующее функционал* $C(u)$.

Доказательство. Пусть имеется последовательность управления $u_k(t)$ с соответствующими решениями $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ $(t_0^k \leqslant t \leqslant t_1^k)$, такая, что

$$t_0^k \to t_0^*, \quad t_1^k \to t_1^*,$$

и соответствующая последовательность $C(u_k)$ монотонно стремится к нижней грани своих значений. Для удобства положим

$$u_k(t) = u_k(t_0^k-) \text{ для } t < t_0^k \quad \text{и} \quad u_k(t) = u_k(t_1^k) \text{ для } t > t_1^k,$$

и рассмотрим решение $x_k(t)$, соответствующее этому управлению в некоторой окрестности интервала $t_0^*-\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1^*+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно больших k решения $x_k(t)$ будут определены и равномерно ограничены на интервале $t_0^*-2\varepsilon < t < t_1^*+2\varepsilon$.

Поскольку функция $|u_k(t)|+\operatorname{var} u_k(t)$ равномерно ограничена на интервале $t_0^*-\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1^*+\varepsilon$, то по теореме Асколи существует подпоследовательность [назовем ее снова $u_k(t)$], сходящаяся в каждой точке к предельной функции $u^*(t)$ ограниченной вариации. Сделаем функцию $u^*(t)$ непрерывной справа на $t_0^*-\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1^*+\varepsilon$ (изменив ее значения на счетном множестве точек, не включающем концы интервала), и пусть $x^*(t)$ — соответствующее решение уравнения

$$x^*(t)=x^*(t_0^*-\varepsilon)+\int_{t_0^*-\varepsilon}^{t} f(x(s),\ s,\ u^*(s))\,ds+\int_{t_0^*-\varepsilon}^{t} e(s)\,Du^*,$$

где $x_k(t_0^*-\varepsilon) \to x^*(t_0^*-\varepsilon)$. Заключаем также, что

$$\operatorname{var} u^* \leqslant \liminf_{k\to\infty} \operatorname{var} u_k \quad \text{при} \quad t_0^*-\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1^*+\varepsilon$$

и, следовательно, $\|Du^*\| \leqslant E$ при $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$. Поскольку функции $x_k(t)$ имеют равномерно ограниченную вариацию, то составленная из них подпоследовательность [вновь обозначаемая $x_k(t)$] сходится и, используя теорему Лебега о сходимости, а также теорему Хелли — Брея[1]), получим

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t)=x^*(t) \quad \text{при} \quad t_0^*-\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1^*+\varepsilon,$$

исключая точки разрыва $u^*(t)$. Поэтому решение $x^*(t)$ определено на всем интервале $t_0^*-\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1^*+\varepsilon$. Легко проверить, что

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t_1^k-)=x^*(t_0^*-)$$

и управление $u^*(t)$ удовлетворяет всем ограничениям, накладываемым на допустимые управления из $\mathscr{F}$.

---

[1]) Теорема (Хелли—Брей). Если $\{\alpha_n\}$ есть последовательность функций равномерно ограниченной вариации на отрезке [0,1] и если существует функция α ограниченной вариации на [0,1] такая, что $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$, где x принадлежит некоторому всюду плотному подмножеству отрезка [0,1], содержащему 0 и 1, то

$$\int_0^1 f(s)\,\alpha_n(ds) \longrightarrow \int_0^1 f(s)\,\alpha(ds), \quad f \in C[0,1].$$

(*Прим. ред.*)

Из теоремы Хелли — Брея следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{t_0^*-\varepsilon}^{t_1^*+\varepsilon} g^0(s)\, Du_k = \int\limits_{t_0^*-\varepsilon}^{t_1^*+\varepsilon} g^0(s)\, Du^*.$$

Поскольку

$$\sup|x^*(t)| \leqslant \lim_{k\to\infty} \inf(\sup|x_k(t)|),$$

и

$$\|Du^*\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \inf \|Du_k\|,$$

то

$$C(u_k) \longrightarrow C(u^*).$$

Итак, $u^*(t)$ $(t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*)$ и есть искомое оптимальное управление. Теорема доказана.

Следствие 1. *Рассмотрим линейную импульсную систему в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad Dx = A(t)\,x + B(t)\,u + e(t)\,Du,$$

где $A(t)$, $B(t)$, *и* $e(t)$ *непрерывны в* R^1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1)—5) *и пункта* (а). *Тогда необходимо существует равномерная граница* [см. (в)], *и оптимальное управление* $u^*(t)$ *на интервале* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ *существует.*

Следствие 2. *Рассмотрим нелинейную систему в* R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u)$$

т. е. частный случай теоремы при $e(t) \equiv 0$. *Предположим, что выполняются условия* 1)—5), *включая ограничение* $\|Du\| \leqslant E$, *а также условия* (а) *и* (в), *а критерий качества* $C(u)$ *остался без изменений. Тогда в* $\mathfrak{F}$ *существует оптимальное управление* $u^*(t)$ *на* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$. *Разумеется, и здесь верны обычные замечания о существовании оптимального управления в подсемействе* $\mathfrak{F}$ *для фиксированного начального момента, или фиксированной длины интервала.*

Упражнения

1. Обобщить теорему 4 на системы в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u),$$

где функция $f(x, t, u)$ кусочно-непрерывна по t на интервале $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$, т. е. существует конечное разбиение $\tau_0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_l = \tau_1$, такое, что на каждом замкнутом интервале $\sigma_i \leqslant t \leqslant \sigma_{i+1}$ функции $f(x, t, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, u)$ непрерывны в $R^n \times [\sigma_i, \sigma_{i+1}] \times R^m$. Остальные условия остаются такими же, как в теореме 4.

2. Обобщить следствие 2 из теоремы 4 на системы в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = A(x, t) + B(x, t)\,u$$

с критерием качества

$$C(u)=g(x(t_1))+\int_{t_0}^{t_1}[A^0(x(t),\ t)+h^0(t,\ u(t))]\,dt+\operatorname*{ess\,sup}_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\gamma(x(t),\ u(t)),$$

где функция $h^0(t,\ u)$ непрерывна по $(t,\ u)$ и выпукла по u при каждом фиксированном t. Предполагается, что ограничивающее множество $\Omega(x,\ t)$ компактно и выпукло при всех $(x,\ t)$ и непрерывно зависит от этих аргументов. Все остальные условия такие же, как и в следствии.

3. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S})\qquad \dot{x}=f(x,\ t,\ u),\qquad f\in C^1\ \text{ в }\ R^{n+1+m},$$

с начальным состоянием x_0 в момент t_0 и заданным целевым множеством G. Допустимыми управлениями являются абсолютно непрерывные функции $u(t)$ на интервалах $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ с ограничениями $|u(t)|\leqslant 1$, $|\dot{u}(t)|\leqslant 1$. Показать, что замена обозначений приводит к задаче с *ограниченными фазовыми координатами*, где допустимыми являются измеримые управления.

4. *В задаче Больца* из вариационного исчисления рассматривается минимум интеграла $C=\int_{t_1}^{t_2}f^0(z,\ t,\ \dot{z})\,dt$ на всех абсолютно непрерывных кривых $z(t)\subset R^n$, соединяющих две точки z_0 и z_1, и удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\dot{z}=w(z,\ t).$$

Вводя новые обозначения, свести эту задачу к стандартной задаче оптимального управления.

5. Обобщить результаты лемм 1А, 2А, 3А и теоремы 1А из приложения к главе 2 на случай, когда $\Omega(t)$ есть компактное множество, непрерывно зависящее от времени.

6. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S})\qquad \dot{x}=f(x,\ t,\ u),\qquad f\in C^1\ \text{ в }\ R^{n+1+m},$$

с компактным (невыпуклым) ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$. Допустимыми управлениями являются все непрерывные, удовлетворяющие условию Липшица функции $u(t)\subset\Omega$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, т. е. такие, что

$$|u(t')-u(t'')|\leqslant k\,|t'-t''|\quad\text{для}\quad t_0\leqslant t'\leqslant t''\leqslant t_1$$

с заданной постоянной k. Сформулировать и доказать теорему существования оптимального управления для таких систем.

7. Пусть $U(x,\ t)$ — непустое выпуклое компактное множество из R^n, непрерывно зависящее от $(x,\ t)\in R^n\times R^1$. Пусть $x_0\in R^n$ — начальное состояние в момент t_0; доказать существование решений дифференциального включения

$$\dot{x}\in U(x,\ t)$$

с начальным условием $x(t_0)=x_0$.

Пусть $t_1>t_0$ таково, что каждое решение дифференциального включения, с началом в x_0 в момент t_0, существует на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ (доказать существование t_1). Тогда множество $K(x_0,\ t_1)$ достижимости компактно.

8. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S})\qquad \dot{x}=A(x,\ t)+B(x,\ t)\,u,\qquad A,\ B\in C^1\ \text{в}\ R^{n+1+m}$$

с начальным состоянием x_0 в момент t_0. Предположим, что ограничивающее множество Ω замкнуто и выпукло в R^m и пусть допустимыми управлениями $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ являются $u(t) \subset \Omega$, которые удовлетворяют неравенству $\int\limits_{t_2}^{t_1} |u(t)|^p\, dt \leqslant 1$ для заданного $p > 1$. Предположим также, что каждому допустимому управлению соответствует равномерно ограниченное решение $x(t)$, т. е. $|x(t)| \leqslant b$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Сформулировать и доказать теорему существования оптимального управления $u^*(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящего систему из точки x_0 в некоторую точку компактного множества X_1, и минимизирующего критерий качества

$$C(u) = \int\limits_{t_0}^{t} [A^0(x, t) + B^0(x, t)\, u]\, dt.$$

[Указание: пусть $u_k(t)$ — такая последовательность допустимых управлений, что соответствующая последовательность $C(u_k)$ стремится к нижней границе значений критерия качества, и $u_k \longrightarrow u^*$ слабо в L_p. Выберем из нее подпоследовательность так, чтобы решения $x_k(t)$ слабо сходились бы к некоторой функции $x^*(t)$. Показать, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k(t) = x^*(t)$ в каждой точке t из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Неравенство Гёльдера показывает, что управлению $u^*(t)$ соответствует некоторое решение $x^*(t)$ и что $C(u^*) = \lim\limits_{k \to \infty} C(u_k)$.]

9. Рассмотрим импульсную систему в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad Dx = A(t)\, x + B(t)\, Du,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы в R^1. Требуется перевести систему из состояния x_0 в момент $\tau_0 = 0$ в состояние x_1 в момент $\tau_1 = 1$ с помощью m-мерного управления $u(t) \in \mathscr{G}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с минимальной нормой

$$\| u \|_{v,\, p} = STV_p u = \sup \sum_{i=1}^{\nu} | u(t_i) - u(t_{i-1}) |_p.$$

Здесь сильная полная вариация вычисляется по всем конечным разбиениям

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\nu = 1 \quad \text{и} \quad |u|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |u^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

при $1 \leqslant p < \infty$, $|u|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |u^i|$; следовательно, она будет конечной тогда и только тогда, когда $u(t)$ есть функция ограниченной вариации на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Банахово пространство $\mathscr{G}_p$ состоит из всех функций $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, обладающих конечной сильной p-вариацией, таких, что $u(0) = 0$, так что функции $u(t)$ непрерывны справа на интервале $0 < t < 1$. Каждая функция из $\mathscr{G}_p$ определяет меру Лебега — Стилтьеса Du на $0 \leqslant t \leqslant 1$ (как в теореме 7), а пространство $\mathscr{G}_p$ является дуальным пространством по отношению к $\mathscr{S}_q$ $\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right.$ и $\mathscr{S}_q$ состоит из всех непрерывных m-мерных векторов $y(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ с нормой $\| y \|_{\infty,\, q} = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} | y(t) |_q$; действие $\mathscr{G}_p$ на $\mathscr{S}_q$ вычисляется по формуле $\left. \int\limits_0^1 y(t)\, Du \right]$.

Доказать, что если существует хотя бы одно допустимое управление из $\mathcal{G}_p$, переводящее систему из точки x_0 в точку x_1, то существует оптимальное управление $u^*(t)$ с минимальной нормой в $\mathcal{G}_p$. [Указание: использовать слабую компактность замкнутой единичной сферы в $\mathcal{G}_p$ и далее — как обычно.]

10. Рассмотрим импульсную управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad Dx = f(x, t, u) + e(t)\, Du,$$

где функции $f(x, t, u)$ и $e(t)$ принадлежат C^1 в R^{n+1+m}. Пусть управление $u(t)$ имеет ограниченную вариацию и является непрерывной справа функцией в открытой окрестности точки $t=t_0$. Доказать, что имеется единственное (локальное) решение $x(t, x_0)$, такое, что $x(t_0-)=x_0$. Показать, что решение $x(t, x_0)$ непрерывно по x_0 при каждом фиксированном t.

11. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = A(x) + B(x)\, u,$$

где матрицы $A(x)$, $B(x)$ принадлежат C^1 в R^n, и $A(0)=0$. Начальное состояние $x_0 \neq 0$ в момент $t_0=0$, а цель — начало координат $x_1=0$. Предположим, что существует измеримое управление $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, переводящее систему из точки x_0 в точку x_1 и удовлетворяющее ограничению:

$$u(t) \subset \Omega_{\bar{c}} : \max |u^i| \leqslant \bar{c},$$

где $\bar{c}$ некоторая положительная постоянная. Предположим также, что семейство решений, соответствующих управлениям $u(t) \subset \Omega_{\bar{c}}$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, является равномерно ограниченным.

(а) Показать, что на заданном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ существует оптимальное управление $u^*(t)$, переводящее систему из точки x_0 в точку x_1 и минимизирующее критерий качества:

$$C(u) = \underset{0 \leqslant t \leqslant T}{\mathrm{ess}} \ \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} |u^i(t)|.$$

[Указание: пусть $K_c(T)$ — множество достижимости, соответствующее начальной точке x_0, при управлениях из Ω_c. Показать, что $K_c(T)$ — компактное множество, непрерывно расширяющееся монотонно с ростом c на интервале $0 \leqslant c \leqslant \bar{c}$. Затем рассмотреть c^* — наименьшее из всех c, для которых $x_1 \in K_c(T)$, а соответствующее управление $u^*(t)$ таково, что $C(u^*)=c^*$.]

(в) Предположим, что система $\mathcal{S}$ обладает свойством управляемости в начале координат, т. е.

$$\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n,$$

где $B=B(0)$ и $A=\dfrac{\partial A}{\partial x}(0)$ (подробнее см. главу 6). Рассмотрим теперь множество всех измеримых управлений $u(t) \in \Omega_{c^*}$ на различных интервалах $0 \leqslant t \leqslant t_1$, переводящих систему из точки x_0 в точку x_1. Показать, что указанное выше управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ является минимальным по быстродействию (для заданного ограничивающего множества Ω_{c^*}). [Указание: предположим, что управление $\hat{u}(t)$ из Ω_{c^*} на интервале $0 \leqslant t \leqslant T - \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ переводит систему из состояния x_0 в состояние x_1. Тогда можно равномерно аппроксимировать управление $\hat{u}(t)$ некоторым управлением $\bar{u}(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon$, переводящим систему из точки x_0 в точку $\bar{x}_1$, лежащую в некоторой окрестности точки $x_1=0$, причем $\bar{u} \subset \Omega_{c^*-\delta}$ для малого $\delta > 0$. Тогда из условия управляемости следует, что некоторое управление, получающееся из управления $\bar{u}(t)$ продолжением на интервал $0 \leqslant t \leqslant T - \dfrac{\varepsilon}{2}$

и принадлежащее множеству $\Omega_{c^*-\delta}$, будет переводить систему из точки x_0 в точку $x_1=0$.]

12. В задаче 11 предположим, что матрица $B(x)$ всюду имеет ранг n. Показать, что тогда множество $K_{c_1}(T)$ лежит внутри множества $K_{c_2}(T)$ для $0<c_1<c_2\leqslant c$. [Указание: использовать принцип максимума.]

13. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x,\ u),$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^\infty f^0(x,\ u)\,dt.$$

Здесь функции $f(x,\ u)$ и $f^0(x,\ u)\geqslant 0$ принадлежат C^1 в R^{n+m}, и $f(0,\ 0)=0$. Для каждого начального состояния x_0 при $t_0=0$ допустимыми управлениями $u(t)$ на интервале $0\leqslant t<\infty$ будут такие управления, для которых значение критерия качества конечно, а $x(\infty)=0$. Предположим, что существуют функции $v(x)$ и $u^*(x)$ из C^1 вблизи начала координат в R^n, такие, что:

(а) $v(x)>0$ при $x\neq 0$, $v(0)=0$;

(в) $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x)\,f(x,\ u)+f^0(x,\ u)\geqslant 0$, причем равенство достигается при $u=u^*(x)$. Тогда для каждой точки x_0, лежащей вблизи начала координат, решение $x^*(t)$, определяемое из системы

$$\dot{x}=f(x,\ u^*(x)), \qquad x(0)=x_0,$$

является оптимальным, а управление

$$u(t)=u^*(x^*(t))$$

также оптимально (если $x^*(t)$ и $u^*(t)$ определены на интервале $0\leqslant t<\infty$ с $C(u^*)<\infty$ и $x^*(\infty)=0$).

4.3. Существование оптимального управления без дополнительных ограничений

В этом разделе мы рассмотрим три задачи управления, в которых величина оптимального управления не ограничена. Первая задача является непосредственным обобщением теорем существования главы 3 на нелинейные системы. Две другие задачи касаются применения управлений с обратной связью к нелинейным системам.

Рассмотрим нелинейную систему в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=A(x,\ t)+B(x,\ t)\,u,$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^T [A^0(x,\ t)+B^0(u,\ t)]\,dt.$$

Мы будем предполагать, что $A^0(x,\ t)\geqslant 0$ и $B^0(u,\ t)\geqslant a\,|u^p|$ для некоторых постоянных $a>0$, $p>1$. Тогда допустимыми управлениями будут все m-мерные вектор-функции $u(t)$ из класса L_p на

заданном конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, такие, что соответствующие им решения $x(t)$, исходящие из точки x_0, определены на всем интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, а значение критерия качества $C(u)$ конечно. В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^T |u|\,dt \leqslant \left(\int_0^T |u|^p\,dt\right)^{1/p} T^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

каждое допустимое управление $u(t)$ принадлежит L_1 на $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е.

$$\|u\|_1 = \int_0^T |u(t)|\,dt < \infty.$$

Теорема 8. *Рассмотрим систему в R^n:*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = A(x,\ t) + B(x,\ t)\,u$$

с критерием качества

$$C(u) = \int_0^T [A^0(x,\ t) + B^0(u,\ t)]\,dt,$$

где A, A^0, B, B^0, $\partial A/\partial x$, $\partial B/\partial x$ непрерывны при всех $x \in R^n$, $u \in R^m$ и *$t \in R^1$. Предположим, что*

(a) $A^0(x,\ t) \geqslant 0$;

(в) $B^0(u,\ t) \geqslant a|u|^p$ *для постоянных $a>0$, $p>1$;*

(c) $B^0(u,\ t)$ *выпукло по u при любом фиксированном t.*

Допустимыми являются все управления $u(t)$ из L_p на заданном конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, которые вместе с соответствующим решением $x(t)$, исходящим из точки x_0, доставляют критерию качества конечное значение. Предположим также, что

(d) $|x(t)| \leqslant \beta(\|u\|_1)$, *где граница β монотонно возрастает вместе с $\|u\|_1$.*

Тогда существует оптимальное управление $u^*(t)$, минимизирующее критерий качества.

Доказательство. Заметим, что каждому ограниченному измеримому управлению $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ соответствует решение $x(t)$, ограниченное величиной $\beta(\|u_1\|)$ на $0 \leqslant t \leqslant T$, и значит, $u(t)$ является допустимым управлением. Поскольку $C(u) \geqslant 0$, то существует неотрицательная нижняя грань m значений $C(u)$. Пусть $u^{(k)}(t)$ — последовательность допустимых управлений, таких, что соответствующая последовательность $C(u^{(k)})$ монотонно стремится к пределу m. Заметим, что

$$C(u^{(k)}) \leqslant m+1$$

и, значит,

$$a\int_0^T |u^{(k)}|^p\,dt \leqslant m+1$$

для больших k. Поэтому можно выбрать подпоследовательность [также обозначаемую $u^{(k)}(t)$], которая слабо сходилась бы к пределу $u^*(t)$ из $L_p(0, T)$ и такую, что

$$\int_0^T |u^{(k)}|^p dt \leqslant \frac{m+1}{a}.$$

Далее $\| u^{(k)} \|_1 \leqslant \left[\frac{m+1}{a}\right]^{1/p} T^{1/q}$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, поэтому все решения равномерно ограничены:

$$|x^{(k)}(t)| \leqslant \beta\left(\left(\frac{m+1}{a}\right)^{1/p} T^{1/q}\right).$$

Убедимся теперь, что равномерно ограниченное семейство функций $x^{(k)}(t)$ будет также равностепенно непрерывным на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Для любых двух моментов времени t_1 и t_2 $(0 \leqslant t_1 \leqslant \leqslant t_2 \leqslant T)$ имеем

$$|x^{(k)}(t_1)-x^{(k)}(t_2)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} |A(x^{(k)}(s), s)|+|B(x^{(k)}(s), s)|\,|u^{(k)}(s)|\,ds.$$

Таким образом, существует постоянная $c>0$ (не зависящая от k), для которой

$$|x^{(k)}(t_1)-x^{(k)}(t_2)| \leqslant c\,|t_2-t_1|+c\left(\int_{t_1}^{t_2} |u^{(k)}(s)|^p ds\right)^{1/p} |t_2-t_1|^{1/q}$$

и

$$|x^{(k)}(t_1)-x^{(k)}(t_2)| \leqslant c\,|t_2-t_1|+c\left(\frac{m+1}{a}\right)^{1/p} |t_2-t_1|^{1/q}.$$

Из теоремы Асколи следует, что можно выбрать подпоследовательность, также обозначаемую $x^{(k)}(t)$, так, что

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}(t)=\bar{x}(t)$$

при каждом t из интервала $0 \leqslant t \leqslant T$. Покажем теперь, что $\bar{x}(t)$ есть решение, соответствующее $u^*(t)$. Запишем

$$\bar{x}(t)=x_0+\lim_{k\to\infty}\int_0^t [A(x^{(k)}(s), s)+B(x^{(k)}(s), s)\,u^{(k)}(s)]\,ds.$$

Пользуясь предельными соотношениями

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T |A(x^{(k)}(s), s)-A(\bar{x}(s), s)|\,ds=0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t B(\bar{x}(s), s)\,[u^{(k)}(s)-u^*(s)]\,ds=0,$$

а также соотношением

$$\lim_{k \to \infty} B(x^{(k)}(t),\ t) = B(\bar{x}(t),\ t),$$

выполняющимся равномерно, вне некоторого множества S произвольно малой меры, и неравенством

$$\int_S |u^{(k)}|\, ds \leqslant \left(\int_0^T |u^{(k)}|^p\, ds \right)^{1/p} |S|^{1/q},$$

можно доказать, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T |B(x^{(k)}(s),\ s) - B(\bar{x}(s),\ s)|\, |u^{(k)}(s)|\, ds = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_0^t [A(\bar{x}(s),\ s) + B(\bar{x}(s),\ s)\, u^*(s)]\, ds,$$

т. е. $\bar{x}(t)$ есть решение, соответствующее управлению $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Из выпуклости $B^0(u,\ t)$ в силу теоремы 8 главы 3 следует, что

$$C(u^*) \leqslant \lim_{k \to \infty} C(u^{(k)}) = m.$$

Следовательно, $C(u^*) = m$ и $u^*(t)$ есть оптимальное управление. Теорема доказана.

Следующие две задачи посвящены использованию управлений с обратной связью $u = u(x)$ в нелинейных системах в R^n. Мы уже встречали управления с обратной связью раньше, при синтезе оптимальных управлений в виде разомкнутой цепи. Здесь же мы будем отыскивать непосредственно управления с обратной связью, причем обозначения по сравнению с использованными в теореме 7 главы 3 несколько изменятся.

Обратимся сначала к задаче стабилизации нелинейной системы в R^n,

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x,\ u) = f(x,\ u(x)),$$

с помощью линейных управлений $u(x) = Fx$, где матрица обратной связи F выбрана так, чтобы оптимизировать степень убывания решений вблизи начала координат. Уточним постановку этой задачи, введя понятия *обобщенной характеристической экспоненты* и *критического демпфирования*, как указано ниже.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений класса C^1 в R^n:

$$(\mathcal{S}_1) \qquad \dot{x} = g(x),$$

где $g(0)=0$, и обозначим матрицу $\frac{\partial g}{\partial x}(0)$ через G. Если постоянная матрица G устойчива (т. е. все ее собственные значения имеют отрицательные действительные части, так что $\max \operatorname{Re} \lambda [G] < 0$), то нелинейная система устойчива в окрестности начала координат. (Для каждой окрестности N_1 начала координат найдется такая меньшая окрестность N_2, что каждое решение, исходящее из N_2, навсегда остается внутри N_1). Если G имеет хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью, то нелинейная система не будет устойчивой в окрестности начала координат. (Все эти сведения об устойчивости излагаются в главе 6 и содержатся также в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям.)

Если G — устойчивая матрица, то можно показать, что существует окрестность N начала координат, такая, что каждое решение $x(t) \not\equiv 0$, исходящее из N, навсегда остается в N, и

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

Более точное исследование предельного поведения решения $x(t)$ показывает, что

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\log |x(t)|}{t} = \mu.$$

Величина μ в этом равенстве не зависит от выбора N, а также от выбора нормы в R^n; она называется *обобщенной характеристической экспонентой системы* $\mathcal{S}_1$. Известно, что обобщенные характеристические экспоненты системы $\mathcal{S}_1$ совпадают с действительными частями собственных значений матрицы G.

Пусть G и $\hat{G}$ — устойчивые матрицы с собственными значениями $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и $\{\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n\}$, соответственно расположенными в порядке возрастания действительных частей

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda_n < 0$$

и

$$\operatorname{Re} \hat{\lambda}_1 \leqslant \operatorname{Re} \hat{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \hat{\lambda}_n < 0.$$

Мы скажем, что $G \prec \hat{G}$, т. е. матрица G более устойчива, чем матрица $\hat{G}$, если

$$\operatorname{Re} \lambda_n < \operatorname{Re} \hat{\lambda}_n$$

или

$$\operatorname{Re} \lambda_n = \operatorname{Re} \hat{\lambda}_n \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \lambda_{n-1} < \operatorname{Re} \hat{\lambda}_{n-1}$$

или

$$\operatorname{Re} \lambda_n = \operatorname{Re} \hat{\lambda}_n, \ \ldots, \ \operatorname{Re} \lambda_j = \operatorname{Re} \hat{\lambda}_j \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \lambda_{j-1} < \operatorname{Re} \hat{\lambda}_{j-1}$$

для некоторого j $(1 < j < n)$. Будем писать также, что $G \preccurlyeq \hat{G}$ в случае, когда либо $G \prec \hat{G}$, либо собственные значения матриц G и $\hat{G}$ имеют одинаковые действительные части.

Дадим теперь определение критического демпфирования системы дифференциальных уравнений, используя рассмотренные понятия.

Определение. Рассмотрим автономную систему в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

где вектор-функция $f(x, u)$ принадлежит C^1 в окрестности начала координат в R^{n+m}, и

$$f(0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0) = A, \quad f_u(0, 0) = B.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое подмножество пространства $\mathcal{M}_{mn}$ всех действительных $(m \times n)$-матриц. Матрица $F^* \in \mathcal{F}$ определяет критическое демпфирование для системы $\mathcal{S}$ с обратной связью в $\mathcal{F}$, в случае, если матрица $(A + BF^*)$ устойчива, и $(A + BF^*) \preccurlyeq (A + BF)$ для всех $F \in \mathcal{F}$. Тогда $u = F^*x$ есть оптимальное управление, осуществляющее критическое демпфирование для системы $\mathcal{S}$ в $\mathcal{F}$.

Замечание. Для того чтобы существовало критическое демпфирование для системы $\mathcal{S}$, необходимо, чтобы систему

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu + \dots$$

можно было стабилизировать управлением $u = Fx$ с обратной связью, где $F \in \mathcal{F}$, т. е. матрица $A + BF$ должна быть устойчивой. Если система (A, B) обладает свойством управляемости, и если $\mathcal{F} = \mathcal{M}_{mn}$, то система всегда может быть стабилизирована; однако критического демпфирования для нее не существует. Это следует из изложенного в главе 2 исследования управляемых линейных систем, где показано, что матрица $(A + BF)$ может иметь произвольные действительные собственные значения.

Теорема 9. *Рассмотрим автономную систему в R^n:*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

где вектор-функция $f(x, u)$ принадлежит C^1 вблизи начала координат в R^{n+m}, и

$$f(0, 0) = 0, \quad f_x(0, 0) = A, \quad f_u(0, 0) = B.$$

Пусть $\mathcal{F}$ есть некоторое подмножество пространства $\mathcal{M}_{mn}$ действительных $(m \times n)$-матриц. Предположим, что матрица $(A + BF_0)$ устойчива при некотором $F_0 \in \mathcal{F}$. Если при этом либо

1) *множество $\mathcal{F}$ компактно,*

либо

2) $\lim\limits_{F \to \infty} \inf \{\max \operatorname{Re} \lambda [A + BF]\} \geqslant 0$ *в том смысле, что для каждого действительного $\varepsilon > 0$ найдется компактное подмножество $\mathcal{F}_\varepsilon \subset \mathcal{F}$ такое, что любая матрица $A + BF$, не принадлежащая $\mathcal{F}_\varepsilon$, имеет собственное значение с действительной частью, большей, чем $-\varepsilon$, то существует оптимальное управление $u = F^*x$, осуществляющее критическое демпфирование системы.*

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторое компактное подмножество $\mathcal{F}$ пространства $\mathcal{M}_{mn}$ (топологически совпадающего с R^{mn}). Так как собственные значения матрицы F непрерывно зависят от F, то существует матрица $F_1 \in \mathcal{F}$, минимизирующая выражение $\max \operatorname{Re} \lambda [A+BF]$ и, в частности, такая, что

$$\max \operatorname{Re} \lambda [A+BF_1] \leqslant \max \operatorname{Re} \lambda [A+BF_0] < 0.$$

Пусть $\mathcal{F}_1$ — такое компактное подмножество $\mathcal{F}$, что на нем

$$\max \operatorname{Re} \lambda [A+BF] = \max \operatorname{Re} \lambda [A+BF_1].$$

Пусть матрица $F_2 \in \mathcal{F}_1$ минимизирует выражение $\operatorname{Re} \lambda_{n-1} [A+BF]$ на $\mathcal{F}_1$. Пусть $\mathcal{F}_2$ — компактное подмножество в $\mathcal{F}_1$, на котором

$$\operatorname{Re} \lambda_n [A+BF] = \operatorname{Re} \lambda_n [A+BF_1]$$

и

$$\operatorname{Re} \lambda_{n-1} [A+BF] = \operatorname{Re} \lambda_{n-1} [A+BF_2]$$

(имеется ввиду, что $\operatorname{Re} \lambda_1 \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda_n$). Действуя таким образом, получим цепочку компактных множеств

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$$

таких, что каждая матрица $F^* \in \mathcal{F}_n$ осуществляет критическое демпфирование. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — некомпактное подмножество из $\mathcal{M}_{mn}$, удовлетворяющее условию (2). Тогда

$$\max \operatorname{Re} \lambda [A+BF] > \frac{1}{2} \max \operatorname{Re} \lambda [A+BF_0]$$

для всех $F \in \mathcal{F}$, не принадлежащих некоторому компактному подмножеству $\mathcal{F}_0$. Тогда оптимальное управление $u = F^*x$, осуществляющее критическое демпфирование $\mathcal{S}$ в $\mathcal{F}_0$, дает также критическое демпфирование $\mathcal{S}$ в $\mathcal{F}$. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим автономную систему в R^n:*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu + \ldots$$

с правой частью $f(x, u)$, принадлежащей C^1 вблизи начала координат в R^{n+m}. Пусть управление $u = F_0 x$ стабилизирует систему $\mathcal{S}$, и пусть множество $\mathcal{F}$ состоит из всех матриц $\{cF_0\}$ для всевозможных действительных чисел c. Если имеются два собственных значения μ_1 и μ_2 матрицы BF_0, такие, что

$$(\operatorname{Re} \mu_1)(\operatorname{Re} \mu_2) < 0,$$

то существует оптимальное управление $F^* = c^* F_0$, осуществляющее критическое демпфирование системы $\mathcal{S}$ в $\mathcal{F}$. С другой стороны, если все собственные значения матрицы BF_0 имеют действительные части одного и того же знака, то критического демпфирования не существует.

Доказательство. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\mu_1 > 0$. Тогда собственные значения матрицы $A+cBF_0$ совпадают с собственными значениями матрицы $(1/c)A+BF_0$, умноженными на $c \neq 0$. Но если $c > 0$ очень велико, то имеется собственное значение $\tilde{\mu}$ матрицы $(1/c)A+BF_0$, такое, что $\operatorname{Re}\tilde{\mu} > \frac{1}{2}\operatorname{Re}\mu_1$. Таким образом, имеется собственное значение матрицы $A+cBF_0$ с положительной действительной частью, и значит, матрица $A+cBF_0$ неустойчива. Аналогично, матрица $A+cBF_0$ не будет устойчивой при $c \to -\infty$. Следовательно, существует такое $\gamma > 0$, что матрица $A+cBF_0$ не будет устойчивой при $|c| > \gamma$. Поэтому критическое демпфирование должно существовать и соответствовать некоторому c^* из интервала $-\gamma \leqslant c \leqslant \gamma$.

С другой стороны, если все собственные значения матрицы BF_0 имеют отрицательные (или положительные) действительные части, то для больших значений c при $c \to +\infty$ (или $c \to -\infty$), матрица $A+cBF^0$ будет устойчивой, причем

$$\lim_{c \to +\infty} \max \operatorname{Re}\lambda\,[A+cBF_0] = -\infty.$$

Поэтому в этих случаях критического демпфирования не существует. Следствие доказано.

Пример. Рассмотрим скалярную систему

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n x = u$$

с управлениями в виде обратной связи $u = cx^{(n-1)}$, где c — действительное число.

Имеем в R^n линейную систему относительно вектора x,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Fx,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$F = (0\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ c).$$

Предположим, что свободная система устойчива (значит, замкнутая цепь дает устойчивую систему при достаточно малых $c_0 > 0$), и покажем, что существует критическое демпфирование при некотором $c \in R^1$.

При $c > a_1$ система неустойчива (так как необходимым условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического многочлена). При $c \to -\infty$ сумма $c - a_1$ собственных значений матрицы $A+BF$ стремится к $-\infty$. Поэтому хотя бы одно из собственных значений должно иметь большую

по абсолютной величине действительную часть. Но произведение собственных значений матрицы $A+BF$ равно a_n. Поэтому

$$\lim_{c\to-\infty} \inf \{\max \operatorname{Re} \lambda [A+BF]\} \geqslant 0.$$

Следовательно, критическое демпфирование существует.

В специальном случае, при $n=2$,

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=c\dot{x}, \quad a_1>0,\ a_2>0,$$

критическое демпфирование происходит при

$$(a_1-c)^2-4a_2=0 \quad \text{и} \quad a_1-c>0.$$

Отсюда получаем оптимальное значение для c:

$$c^*=a_1-2\sqrt{a_2}.$$

Примечания. Сходная задача возникает в связи с системой дифференциальных уравнений в R^n,

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u),$$

где u — постоянный m-мерный вектор из множества $\Omega\subset R^m$. Пусть правая часть $f(x, u)$ принадлежит C^1 в R^{n+m}, причем каждому постоянному u соответствует решение $x(t)$ (определенное на некотором заданном интервале), исходящее из заданной начальной точки x_0. Пусть $C(u)$ — действительная непрерывная функция от $u\subset\Omega$. Требуется найти оптимальное значение $u^*\subset\Omega$, минимизирующее $C(u)$.

Если множество Ω компактно, то оптимальное управление u^* существует. Если Ω не компактно, но

$$\lim_{u\to\infty} \inf C(u) > C(u_0) \text{ для некоторого } u_0\in\Omega$$

(в смысле теоремы 9), то должно существовать оптимальное u^*, для которого $C(u^*)\leqslant C(u_0)$.

Обратимся теперь к построению оптимальной нелинейной цепи обратной связи на бесконечном промежутке времени. Рассмотрим нелинейную систему в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u),$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^\infty G(x, u)\,dt.$$

Вместо обычного управления $u(t)$ в R^m, выбираемого для каждого начального состояния x_0, будем искать оптимальное управление $u(x)$, минимизирующее функционал

$$J(x_0, u)=\int_0^\infty G(x(t, x_0), u(x(t, x_0)))\,dt$$

вдоль траекторий $x(t, x_0)$ замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad x(0, x_0) = x_0$$

для всех начальных точек x_0 из некоторой окрестности начала координат в R^n. Будем предполагать, что $f(x, u)$, $G(x, u)$ и $u(x)$ — действительные аналитические функции в окрестности точки $x = u = 0$ в R^{n+m}. Это означает, что в этой окрестности они разлагаются в абсолютно сходящиеся степенные ряды и, следовательно, эти ряды определяют соответствующие комплексные аналитические функции, если аргументы их рассматривать в некоторой окрестности начала координат комплексного $(n+m)$-мерного пространства. Предположим, что члены низшего порядка в разложении для $f(x, u)$ линейны

$$f(x, u) = Ax + Bu + h(x, u),$$

а в разложении для $G(x, u)$ — квадратичны,

$$G(x, u) = x'Wx + u'Uu + H(x, u),$$

где $h(x, u)$ и $H(x, u)$ — степенные ряды, начинающиеся с членов соответственно второго и третьего порядка относительно (x, u). Действительные постоянные матрицы (A, B) определяют вполне управляемую или, по крайней мере, стабилизируемую систему, а действительные постоянные матрицы $W > 0$ и $U > 0$ симметричны и положительно определены. Мы будем рассматривать управления в виде цепи обратной связи,

$$u = u(x) = Fx + \mathcal{H}(x),$$

где F — действительная постоянная матрица, а $\mathcal{H}(x)$ — члены более высоких порядков. Будем всегда выбирать F так, чтобы управление $u(x)$ стабилизировало систему

$$\dot{x} = f(x, u(x)) = Ax + BFx + h(x, u(x)) + B\mathcal{H}(x),$$

т. е. будем требовать, чтобы матрица $A + BF$ была устойчивой. В этом случае вектор-функции $x(t, x_0)$ и $u(x(t, x_0))$ будут убывать экспоненциально, стремясь к нулю, если $|x_0|$ достаточно мало. Точнее, если собственные значения λ матрицы $A + BF$ имеют действительные части, меньшие, чем $-\mu$

$$\operatorname{Re} \lambda [A + BF] < -\mu < 0,$$

то

$$|x(t, x_0)| \leqslant c_1 e^{-\mu t} |x_0| \quad \text{для } 0 \leqslant t < \infty$$

при некотором положительном $c_1 > 0$. Более того, эта оценка верна и для решений с комплексными начальными значениями z_0, т. е.

$$|x(t, z_0)| \leqslant c_1 e^{-\mu t} |z_0| \quad \text{для } 0 \leqslant t < \infty$$

и существует положительная константа c_2, такая, что

$$u\,|x(t, z_0)| \leqslant c_2\,|x(t, z_0)| \leqslant c_1 c_2 e^{-\mu t}\,|z_0|,$$

при достаточно малом $|z_0|$. Эти основные оценки для $|x(t, z_0)|$ и $|u(x(t, z_0))|$ показывают, что интеграл, представляющий критерий качества, должен сходиться к конечному значению $J(z_0, u)$. Требуется найти оптимальное управление, которое минимизировало бы функционал $J(x_0, u)$ при всех x_0 из некоторой окрестности начала координат в R^n.

Итак, наша задача является обобщением задачи синтеза оптимальных управлений из главы 3, где рассматривалась упрощенная система в R^n,

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$C(u) = \int_0^\infty [x'Wx + u'Uu]\,dt,$$

и отыскивалось оптимальное линейное управление с обратной связью

$$u = F^* x.$$

Напомним, что $F^* = U^{-1}B'E^*$ определялось с помощью единственной отрицательно определенной матрицы E^*, удовлетворяющей матричному квадратному уравнению

$$A'E + EA + EBU^{-1}B'E = W.$$

Мы будем рассматривать вопросы построения и единственности оптимального управления $u^*(x)$ с обратной связью для нелинейной системы $\mathscr{S}$, опираясь на основную лемму об аналитических свойствах критерия качества $J(x_0, u)$. Заметим, что функционал $J(x_0, u)$ является действительнозначной функцией действительного вектора x_0 (вблизи начала координат в R^n) и аналитической функцией от u. Как только функция $u = u_1(x)$ определена, функционал $J(z_0, u_1)$ можно рассматривать как комплекснозначную функцию комплексного переменного z_0.

Лемма. *Рассмотрим действительную аналитическую систему в R^n:*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu + h(x, u),$$

с критерием качества

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty G(x, u)\,dt = \int_0^\infty [x'Wx + u'Ux + H(x, u)]\,dt,$$

зависящим от аналитического управления с обратной связью

$$\hat{u}(x) = \hat{F}(x) + \hat{\mathscr{H}}(x)$$

и с начальным состоянием x_0. *Предположим, что* $A+B\hat{F}$ — *устойчивая матрица. Тогда:*

1) *существует окрестность* $\hat{N}_c$ *начала координат в комплексном* n*-мерном пространстве, где*

$$J(z_0, \hat{u}) = -z_0'\hat{E}z_0 + \hat{J}^{(3)}(z_0) + \ldots$$

будет аналитической функцией от z_0. *Более того, матрица*

$$\hat{E} = -\int_0^\infty e^{(A'+\hat{F}'B')t}(W+\hat{F}'U\hat{F})e^{(A+B\hat{F})t}dt$$

зависит лишь от упрощенной системы (с коэффициентами A, B, W, U, $\hat{F}$), а функция $J(x_0, \hat{u})$ *разлагается в действительный степенной ряд;*

2) *в окрестности* $\hat{N}_c$ *функция* $J(z, \hat{u})$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\frac{\partial J(z, \hat{u})}{\partial z} f(z, \hat{u}(z)) + G(z, \hat{u}(z)) \equiv 0.$$

Доказательство. Так как матрица $A+B\hat{F}$ устойчива, то $\operatorname{Re}\lambda[A+B\hat{F}] < -\mu < 0$ для некоторого $\mu > 0$. Следовательно, существует окрестность $\hat{N}_c$ начала координат в комплексном n-мерном пространстве, в которой каждое решение $x(t, z_0)$ системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)) = (A+B\hat{F})x + \ldots,$$

исходящее из точки $x_0 \in \hat{N}_c$, навсегда остается в $\hat{N}_c$, и удовлетворяет основному неравенству

$$|x(t, z_0)| \leqslant c_1 e^{-\mu t}|z_0| \text{ при } 0 \leqslant t < \infty.$$

Пользуясь этой оценкой для $|x(t, z_0)|$ и неравенством

$$|\hat{u}(z)| \leqslant c_2|z| \text{ в } \hat{N}_c,$$

получаем

$$|G(z, \hat{u}(z))| \leqslant c_3 e^{-2\mu t}|z_0|$$

для положительных постоянных c_1, c_2, c_3, не зависящих от z_0 в $\hat{N}_c$.

Функции $x(t, z_0)$ и $\hat{u}(x(t, z_0))$ аналитически зависят от z_0 в $\hat{N}_c$ при каждом фиксированном $t \geqslant 0$. Поскольку интеграл

$$J(z_0, \hat{u}) = \int_0^\infty G(x(t, z_0), \hat{u}(x(t, z_0)))\,dt$$

равномерно сходится в $\hat{N}_c$, то можно заключить, что $J(z_0, \hat{u})$ есть аналитическая функция от z_0 в $\hat{N}_c$.

Для того чтобы получить степенной ряд для $J(x_0, \hat{u})$, нужно разложить функцию $x(t, x_0)$ в ряд по степеням x_0 в $\hat{N} = \hat{N}_c \cap R^n$. Легко видеть, что

$$x(t, x_0) = e^{(A+B\hat{F})t} x_0 + \text{члены высших порядков}$$

и

$$\hat{u}(x(t, x_0)) = \hat{F}e^{(A+B\hat{F})t} x_0 + \text{члены высших порядков.}$$

Если произвести почленное интегрирование $G(x(t, x_0), \hat{u}(x(t, x_0)))$, то легко вычислить

$$J(x_0, \hat{u}) = \int_0^\infty x_0' e^{(A'+\hat{F}'B')t} W e^{(A+B\hat{F})t} x_0\, dt +$$

$$+ \int_0^\infty x_0' e^{(A'+\hat{F}'B')t} \hat{F}' U \hat{F} e^{(A+B\hat{F})t} x_0\, dt + \textit{члены 3-го и высших порядков.}$$

В этом случае $J(x_0, u)$ имеет требуемую форму.

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, нужно оценить члены высших порядков в $x(t, x_0)$. Для этого запишем

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \hat{f}(x(s, x_0))\, ds$$

и

$$x_L(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \hat{f}_x(0)\, x_L(s, x_0)\, ds,$$

где

$$\hat{f}(x) = f(x, \hat{u}(x)) \text{ и } \hat{f}_x(0) = A + B\hat{F}.$$

Тогда разность

$$\Delta(t, x_0) = x(t, x_0) - x_L(t, x_0) = \int_0^t [\hat{f}(x(s, x_0)) - \hat{f}_x(0)\, x_L(s, x_0)]\, ds,$$

так что

$$\Delta = \int_0^t [\hat{f}_x(0)\, x(s, x_0) + \varepsilon(s, x_0) - \hat{f}_x(0)\, x_L(s, x_0)]\, ds$$

и

$$\Delta = \int_0^t [\hat{f}_x(0)\, \Delta(s, x_0) + \varepsilon(s, x_0)]\, ds,$$

где

$$|\varepsilon(t, x_0)| \leqslant c_4 |x(t, x_0)|^2 \leqslant c_5 e^{-2\mu t} |x_0|^2.$$

Следовательно,

$$\Delta(t, x_0) = e^{(A+B\hat{F})t} \int_0^t e^{-(A+B\hat{F})s} \varepsilon(s, x_0)\, ds$$

и

$$|\Delta(t, x_0)| \leqslant c_6 e^{-\mu t} |x_0|^2 \text{ для } x_0 \in \hat{N}, \quad t \geqslant 0.$$

Это дает требуемую оценку

$$x(t, x_0) = e^{(A+B\hat{F})t} x_0 + \Delta(t, x_0).$$

Заметим теперь, что

$$G(x, \hat{u}(x)) = x'Wx + \hat{u}'U\hat{u} + \gamma(x),$$

где $|\gamma(x)| \leqslant c_7 |x|^3$. Таким образом,

$$G(x(t, x_0), \hat{u}(x(t, x_0))) = x'Wx + \hat{u}'U\hat{u} + \gamma(x(t, x_0))$$

и

$$\int_0^\infty |\gamma(x(t, x_0))| \, dt \leqslant c_8 \int_0^\infty e^{-3\mu t} |x_0|^3 \, dt \leqslant c_9 |x_0|^3.$$

Следовательно, в степенной ряд для $J(x_0, \hat{u})$ входят линейные и квадратичные члены от x_0 из выражения

$$\int_0^\infty \left[e^{(A+B\hat{F})t} x_0 + \Delta\right]' W \left[e^{(A+B\hat{F})t} + \Delta\right] dt + \int_0^\infty \hat{u}'(x) U \hat{u}(x) \, dt.$$

Но

$$\hat{u}(x(t, x_0)) = \hat{F}\left[e^{(A+B\hat{F})t} x_0 + \Delta\right] + \Delta_1(t, x_0),$$

где

$$|\Delta_1(t, x_0)| \leqslant c_{10} |x(t, x_0)|^2 \leqslant c_{11} e^{-2\mu t} |x_0|^2.$$

Таким образом, квадратичные члены в $J(x_0, \hat{u})$ равняются $\hat{J}^{(2)}(x_0) = -x_0'\hat{E}x_0$, и значит,

$$J(x_0, \hat{u}) = -x_0'\hat{E}x_0 + \hat{J}^{(3)}(x_0) + \ldots$$

как и требовалось.

Проверим, наконец, функциональное уравнение для $J(x, \hat{u})$ в $\hat{N}$. (Заметим, что первый аргумент функции J для простоты часто обозначен через x или z.) Решение $x(t, x_0)$ достигает точки x_{t_1} в момент $t = t_1$, и эта новая точка может служить исходной точкой в $\hat{N}$. Таким образом,

$$J(x_t, \hat{u}) = \int_0^\infty G(x(s+t, x_0), \hat{u}(x(s+t), x_0)) \, ds = \int_t^\infty G(x(s), \hat{u}(x(s))) \, ds.$$

Дифференцируя по t, получим

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x_t, \hat{u}) f(x_t, \hat{u}(x_t)) = -G(x(t, x_0), \hat{u}(x(t, x_0))).$$

При $t=0$ имеем

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x_0, \hat{u}) f(x_0, \hat{u}(x_0)) + G(x_0, \hat{u}(x_0)) \equiv 0.$$

В силу аналитичности в этом функциональном уравнении можно заменить x_0 произвольным $z \in \hat{N}_c$. Лемма доказана.

Определение. Аналитическое управление с обратной связью

$$u^*(x) = F^* x + \mathscr{H}^*(x),$$

стабилизирующее аналитическую систему

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu + h(x, u) \text{ в } R^n,$$

называется *оптимальным*, если оно минимизирует критерий качества, т. е. если

$$J(x_0, u^*) \leqslant J(x_0, u_1)$$

для каждого аналитического управления $u_1(x)$. [Неравенство справедливо в некоторой окрестности N_1 начала координат в R^n, зависящей от $u_1 = u_1(x)$.]

Будем искать оптимальное управление u^*, как решение функционального уравнения

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, u^*) \frac{\partial f}{\partial u}(x, u^*(x)) + \frac{\partial G}{\partial u}(x, u^*(x)) = 0.$$

Позже мы исследуем структуру решения $u^*(\dot{x})$, и покажем, что матрица F^* имеет вид $F^* = U^{-1}B'E^*$ так же, как и для упрощенной системы. Перед тем как доказывать единственность оптимального управления $u^*(x)$, условимся считать две аналитические функции равными (или эквивалентными), если они совпадают в какой-либо окрестности начала координат в R^n.

Теорема 10. *Пусть $u^* = u^*(x) = F^*x + \mathscr{H}^*(x)$ — аналитическое управление с обратной связью, стабилизирующее аналитическую в R^n систему:*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu + h(x, u)$$

с конечным критерием качества

$$J(x_0, u^*) = \int_0^\infty G(x, u^*(x))\, dt = \int_0^\infty [x'Wx + u^{*\prime}Uu^* + H(x, u^*)]\, dt.$$

Если u^* является решением функционального уравнения

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, u^*) \frac{\partial f}{\partial u}(x, u^*(x)) + \frac{\partial G}{\partial u}(x, u^*(x)) = 0$$

вблизи начала координат, то u^* будет оптимальным управлением с обратной связью вблизи начала координат в R^n.

Более того, u^* будет единственным в том смысле, что:

1) *u^* есть единственное аналитическое решение функционального уравнения;*

2) *u^* — единственное оптимальное аналитическое управление с обратной связью;*

3) *u^* дает единственное оптимальное управление в виде разомкнутой цепи. Это означает, что существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность N^* такие, что для каждого $x_0 \in N^*$ решение $x^*(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\dot{x} = f(x, u^*(x)), \quad x^*(0) = x_0, \quad x^*(t) \subset N^*,$$

а соответствующее управление

$$u^*(t) = u^*(x^*(t))$$

является единственным управлением в виде разомкнутой цепи среди всех измеримых управлений $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющих ограничению $|u(t)| \leqslant \varepsilon$ с соответствующим решением $x(t) \subset N^*$, доставляющим критерию качества

$$C(u) = \int_0^\infty G(x, u(t))\, dt$$

минимальное значение.

Доказательство. Рассмотрим действительнозначную функцию от $u \in R^m$, при x близком к началу координат в R^n,

$$Q(u) = \frac{\partial J}{\partial x}(x, u^*) f(x, u) + G(x, u).$$

Имеем симметричную квадратичную форму

$$\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial u^i \partial u^j}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} = U > 0.$$

Поэтому существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $|x_1| < \varepsilon_1$ и $|u_1| < \varepsilon_1$ график функции $Q(u)$ лежит выше касательной гиперплоскости при $u = u_1$ (по крайней мере, для всех $|u| < \varepsilon_1$). Из предположений теоремы следует, что

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial u^i}\right|_{u=u^*(x)} = 0$$

и, значит,

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, u^*) f(x, u^*(x)) + G(x, u^*(x)) < \frac{\partial J}{\partial x}(x, u^*) f(x, u_1) + G(x, u_1)$$

для всех $u_1 \neq u^*(x)$, если только $|x| < \varepsilon_1$, $|u^*(x)| < \varepsilon_1$ и $|u_1| < \varepsilon_1$.

Пусть $u_1(x) \neq u^*(x)$ — аналитическое управление с обратной связью, и N_1^0 — такая окрестность начала координат в R^n, что

$$|x| < \varepsilon_1, \quad |u_1(x)| < \varepsilon_1, \quad |u^*(x)| < \varepsilon_1 \quad \text{в} \quad N_1^0,$$

и все решения $x^*(t)$ или $x_1(t)$, соответствующие управлениям с обратной связью и исходящие из $N_1 \subset N_1^0$, навсегда остаются в N_1^0. Пусть $u_1(x_0) \neq u^*(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in N_1$; тогда из леммы следует, что

$$0 < \int_0^\infty \left[\frac{\partial J}{\partial x}(x_1(t),\ u^*) f(x_1(t),\ u_1(x_1(t))) + G(x_1(t),\ u_1(x_1(t)))\right] dt.$$

Отсюда получаем нужный результат:

$$0 < -J(x_0,\ u^*) + J(x_0,\ u_1).$$

Следовательно,

$$J(x_0,\ u^*) < J(x_0,\ u_1)$$

и u^* есть единственное оптимальное аналитическое управление с обратной связью. Следовательно, u^* будет единственным аналитическим решением функционального уравнения, указанного в условии теоремы.

Наконец, пусть $\hat{u}(t)$ — любое измеримое управление в виде разомкнутой цепи, приложенное к системе с начальным состоянием $\hat{x}_0$. Выберем положительное $\varepsilon < \varepsilon_1$ и окрестность $N^* \subset N_1$ начала координат так, чтобы

$$|x^*(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad |u^*(x^*(t))| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty$$

для оптимального решения $x^*(t)$, исходящего из $\hat{x}_0$. Предположим также, что N^* есть окрестность, в которой остаются все решения, соответствующие оптимальному управлению $u^*(x)$. Потребуем теперь, чтобы $|\hat{u}(t)| \leqslant \varepsilon$ и чтобы соответствующее решение $\hat{x}(t)$ лежало в N^*. Тогда, как и выше,

$$0 = \frac{\partial J}{\partial x}(x,\ u^*) f(x,\ u^*(x)) + G(x,\ u^*(x)) <$$

$$< \frac{\partial J}{\partial x}(x,\ u^*) f(x,\ \hat{u}(t)) + G(x,\ \hat{u}(t))$$

всюду, где $\hat{u}(t) \neq u^*(\hat{x})$. Если $\hat{u}(t) \equiv u^*(\hat{x}(t))$ почти всюду на интервале $0 \leqslant t < \infty$, то из теоремы единственности для дифференциальных уравнений следует, что $\hat{x}(t) \equiv x^*(t)$, откуда и $\hat{u}(t) \equiv \equiv \hat{u}^*(x^*(t))$. Предположим теперь, что $\hat{u}(t) \neq u^*(\hat{x}(t))$ на некотором промежутке времени ненулевой длины. Тогда

$$0 < \int_0^\infty \left[\frac{\partial J}{\partial x}(\hat{x}(t),\ u^*) f(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t)) + G(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t))\right] dt.$$

Поскольку управление $\hat{u}(t)$ доставляет конечное значение критерию

качества

$$C(\hat{u}) = \int_0^\infty G(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t))\,dt,$$

то легко показать, что $\lim\limits_{t\to\infty} \hat{x}(t) = 0$. Следовательно,

$$0 < -J(x_0,\ u^*) + C(\hat{u})$$

и

$$C(u^*) = J(x_0,\ u^*) < C(\hat{u}).$$

Итак, $u^*(x^*(t))$ является единственным оптимальным управлением в виде разомкнутой цепи для $\hat{x}_0$ при заданных ограничениях. Теорема доказана.

Замечания. Для упрощенной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad J(x_0,\ u) = \int_0^\infty [x'Wx + u'Uu]\,dt$$

оптимальное управление с обратной связью имеет вид

$$u^* = F^*x,$$

где $F^* = U^{-1}B'E^*$, а E^*—единственная отрицательно определенная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$A'E + EA + EBU^{-1}B'E = W.$$

Заметим теперь, что для нелинейной системы

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu + h(x,\ u),$$

$$J(x_0,\ u) = \int_0^\infty [x'Wx + u'Uu + H(x,\ u)]\,dt$$

оптимальное управление с обратной связью

$$u^* = F^*x + \mathscr{H}^*(x)$$

имеет тот же самый член первого порядка F^*x, что и для упрощенной линейной системы (если предполагать существование аналитического решения функционального уравнения из теоремы 10).

Чтобы показать это, будем искать оптимальное управление

$$\hat{u} = \hat{F}x + \hat{\mathscr{H}}(x)$$

с критерием качества

$$J(x_0, \hat{u}) = -x_0'\hat{E}x_0 + \hat{J}^{(3)}(x_0) + \ldots,$$

где

$$\hat{E} = -\int_0^\infty e^{(A' + \hat{F}'B')\,t}(W + \hat{F}'U\hat{F})e^{(A + B\hat{F})\,t}\,dt,$$

и потребуем, чтобы удовлетворялось функциональное уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, \hat{u})\frac{\partial f}{\partial u}(x, \hat{u}(x)) + \frac{\partial G}{\partial u}(x, \hat{u}(x)) = 0.$$

Выделим линейную часть этого функционального уравнения,

$$-2x'\hat{E}B + 2x'\hat{F}'U = 0,$$

или

$$\hat{F} = U^{-1}B'\hat{E}.$$

Однако интегральное выражение для $\hat{E}$ показывает, что $\hat{E}$ есть единственное отрицательно определенное решение уравнения Ляпунова

$$\hat{E}(A + B\hat{F}) + (A' + \hat{F}'B')\hat{E} = W + \hat{F}'U\hat{F}.$$

Отсюда заключаем, что $\hat{E}$ должно удовлетворять уравнению

$$A'E + EA + EBU^{-1}B'E = W.$$

Следовательно, $\hat{E} = E^*$ и, значит, $\hat{F} = F^*$, как и требовалось.

В заключение мы покажем, что кубические члены критерия качества $J(x, u) = -x'E^*x + J^{(3)}(x) + \ldots$, вычисленного для управления с обратной связью

$$u = F^*x + \mathscr{H}(x),$$

которое начинается с члена $F^*(x)$, полностью определяются следующими данными: $\{A, B, W, U, F^*, h^{(2)}, H^{(3)}\}$. Заметим, что

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, u) f(x, u(x)) + G(x, u(x)) = 0,$$

и приравняем кубические члены нулю:

$$-2x'E^*[BU^{(2)}(x) + h^2(x, F^*x)] + \frac{\partial J^{(3)}}{\partial x}[Ax + BF^*x] +$$
$$+ (F^*x)'Uu^{(2)} + u^{(2)\prime}UF^*x + H^{(3)}(x, F^*x) \equiv 0.$$

Поскольку $F^* = U^{-1}B'E^*$, то

$$-2x'E^*B + 2x'F^{*\prime}U = 0$$

и, значит,

$$\frac{\partial J^{(3)}}{\partial x}[Ax + BF^*x] = 2x'E^*h^{(2)}(x, F^*x) - H^{(3)}(x, F^*x).$$

Однако это дифференциальное уравнение в частных производных может иметь лишь одно решение $J^{(3)}(x)$, так как разность $\Delta J(x)$ между любыми двумя решениями должна быть постоянна вдоль каждой интегральной кривой асимптотически устойчивой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (A + BF^*)x.$$

В этом случае $\Delta J(x)$ должна иметь постоянное значение $\Delta J(0)=0$ в некоторой окрестности начала координат в R^n. Итак, любые два решения $J^{(3)}(x)$ могут отличаться самое большее на аддитивную постоянную. Но $J^{(3)}(0)=0$, и значит, $J^{(3)}(x)$ однозначно определяется из указанного выше дифференциального уравнения в частных производных, а в него входят лишь данные $\{A, B, W, U, F^*, h^{(2)}, H^{(3)}\}$, как и требовалось.

Доказательство существования решения $u^*(x)$ функционального уравнения

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, u^*)\frac{\partial f}{\partial u}(x, u^*(x))+\frac{\partial G}{\partial u}(x, u^*(x))=0,$$

а значит, и существования единственного оптимального управления с обратной связью намечено ниже в упражнении 4.

Упражнения

1. Вычислить действительные части собственных значений матрицы критического демпфирования для скалярной системы

$$\ddot{x}+x=u, \qquad u=c\dot{x}.$$

2. Рассмотрим скалярную систему

$$\dddot{x}+\ddot{x}=c_1\ddot{x}+(c_1+c_2)\dot{x}+c_2x,$$

c_1 и c_2 — действительные числа. Показать, что для нее не существует критического демпфирования, несмотря на то, что

$$\min\{\max \operatorname{Re}\lambda\}=-1.$$

3. Рассмотрим автономную систему класса C^1 в R^n,

$$\dot{x}=g(x)=Gx+\ldots,$$

где G — устойчивая матрица. Известно, что всегда существует гомеоморфизм класса C^1 в малой окрестности начала координат в R^n,

$$x\to y(x)=x+\ldots,$$

переводящий данную нелинейную систему в линейную систему

$$\dot{y}=Gy.$$

Используя этот факт, доказать, что обобщенные характеристические экспоненты нелинейной системы также равняются действительным частям собственных значений матрицы G. Показать, что утверждение останется верным, если обычную норму в R^n заменить ей эквивалентной.

4. В этом упражнении мы наметим путь доказательства существования оптимального управления с обратной связью $u^*(x)$ в R^m для действительного аналитического процесса в R^n,

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u)=Ax+Bu+h(x, u),$$

с критерием качества

$$J(x_0, u)=\int_0^\infty G(x, u)\,dt=\int_0^\infty [x'Wx+u'Uu+H(x, u)]\,dt.$$

Здесь $W > 0$, $U > 0$, матрицы (A, B) определяют вполне управляемую систему, и $h(x, u)$, $H(x, u)$ — аналитические функции высокого порядка вблизи точки $x = u = 0$. Мы будем строить управление $u^*(x)$ как аналитическое решение функционального уравнения

$$(\mathcal{F}) \qquad \frac{\partial J}{\partial x}(x, u)\,\frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) + \frac{\partial G}{\partial u}(x, u(x)) = 0,$$

как в теореме 10.

Для упрощенной задачи, при $h \equiv 0$, $H \equiv 0$, известно, что оптимальное управление с обратной связью представляет собой линейную функцию $u^* = F^*x$, где $F^* = U^{-1}B'E^*$, а E^* есть единственное отрицательно определенное решение матричного уравнения

$$A'E + EA + EBU^{-1}B'E = W,$$

а значение критерия качества равно

$$J(x_0, F^*x) = -x_0'E^*x_0$$

(см. раздел 3, упражнение 15). Переходя к полной нелинейной задаче, определим функцию Гамильтона $H(\eta, x, u)$ — действительную аналитическую функцию в окрестности начала координат в R^{2n+m}, по формуле

$$H(\eta, x, u) = -G(x, u) + \eta f(x, u),$$

где x — m-мерный вектор-столбец, а η — n-мерный вектор-строка.

(а) Рассмотреть линейную задачу и проверить, что линейное управление с обратной связью $u^* = F^*x$, где $F^* = U^{-1}B'E^*$, а матрица $E^* < 0$, удовлетворяет указанному выше квадратному матричному уравнению и является решением функционального уравнения $(\mathcal{F})$.

(в) Для каждой точки (η, x), близкой к $(0, 0)$, будем искать значение u^*, максимизирующее функцию Гамильтона $H(\eta, x, u)$.

Рассмотрим следующее уравнение для определения управления $u^*(\eta, x)$:

$$H_u(\eta, x, u) = 0 \quad \text{или} \quad -G_u(x, u^*) + \eta f_u(x, u^*) = 0.$$

Пользуясь теоремой о неявной функции, доказать существование единственного аналитического решения $u^*(\eta, x)$, обращающегося в нуль при $\eta = 0$, $x = 0$ и удовлетворяющего условию $H_u(\eta, x, u) = 0$. Проверить, что

$$u^*(\eta, x) = \frac{1}{2}U^{-1}B'\eta' + \ldots,$$

где члены высших порядков для упрощенной системы равняются нулю.

(с) Определим функцию Гамильтона с учетом обратной связи

$$H^*(\eta, x) = H(\eta, x, u^*(\eta, (x)))$$

и систему Гамильтона в R^{2n}:

$$(\mathcal{H}^*) \qquad \begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H^*}{\partial \eta_i}, \\ \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial H^*}{\partial x^i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Проверить, что эта система имеет вид

$$(\mathcal{H}^*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(\eta, x)) = Ax + \frac{1}{2}BU^{-1}B'\eta' + \ldots, \\ \dot{\eta}' &= 2Wx - A'\eta' + \ldots, \end{aligned}$$

и что для упрощенной системы члены высшего порядка равны нулю.

(d) Показать, что матрица

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{2} BU^{-1}B' \\ 2W & -A' \end{bmatrix}$$

имеет в точности n собственных значений с отрицательными действительными частями. Это можно сделать, произведя замену переменных

$$\begin{bmatrix} y \\ \zeta \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ \eta' \end{bmatrix}$$

так, чтобы упрощенная система Гамильтона приняла вид

$$\dot{y} = (A + BF^*)\, y, \quad \dot{\zeta} = -(A + BF^*)'\, \zeta.$$

Здесь

$$M = \begin{bmatrix} I - 2QE^* & Q \\ 2E^* & -I \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} I & Q \\ 2E^* & 2E^*Q - I \end{bmatrix},$$

а $Q \leqslant 0$ есть решение уравнения Ляпунова

$$(A + BF^*)\, Q + Q\, (A + BF^*)' = \frac{1}{2} BU^{-1}B'.$$

(e) Пусть для упрощенной системы $\zeta = 0$, или

$$\eta' = 2E^* x,$$

есть единственное n-мерное многообразие устойчивости системы Гамильтона $\mathscr{H}^*$. Определим управление с обратной связью:

$$u^*(x) = u^*(2E^*x,\ x) = U^{-1}B'E^*x.$$

Заметим, что это есть оптимальное управление с обратной связью.

(f) Из общей теории обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений известно, что вблизи начала координат в R^m существует такое невырожденное преобразование координат,

$$y = (I - 2QE^*)\, x + Q\eta' + \ldots, \quad \zeta = 2E^*x - I\eta' + \ldots,$$

которое переводит систему Гамильтона $\mathscr{H}^*$ в систему

$$\dot{y} = (A + BF^*)\, y + \ldots, \quad \dot{\zeta} = -(A + BF^*)'\, \zeta + \ldots,$$

где $y = 0$ и $\zeta = 0$ — инвариантные многообразия. Далее, существует единственное многообразие устойчивости для $\mathscr{H}^*$ в R^{2n}, и оно определяется аналитической функцией

$$\eta = \eta^*(x) = 2x'E^* + \ldots$$

Определим управление

$$u^*(x) = u'(\eta^*(x),\ x) = U^{-1}B'E^*x + \ldots$$

Для доказательства существования оптимального управления остается только показать, что эта аналитическая функция $u^*(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению $(\mathfrak{F})$.

(g) Покажем, что нелинейная система Гамильтона $\mathscr{H}^*$ определяется на инвариантном многообразии устойчивости системой дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{H}_s^*) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x,\ u^*(x)) = (A + BF^*)\, x + \ldots, \\ \dot{\eta}' &= -\left[-G_x(x,\ u^*(x)) + \eta f_x(x,\ u^*(x))\right]'. \end{aligned}$$

Обозначим решения $\mathscr{H}_s^*$, исходящие из точки x_0, $\eta_0=\eta^*(x_0)$ через $x(t, x_0)$, $\eta(t, x_0)$. Показать, что

$$|x(t, x_0)|\leqslant K_1e^{-\lambda t}|x_0|, \quad |\eta(t, x_0)|\leqslant K_1e^{-\lambda t}|x_0|$$

для некоторых положительных постоянных K_1 и λ, где $(-\lambda)$ превосходит все действительные части собственных значений устойчивой матрицы $(A+BF^*)$; показать, что эти оценки верны для всех достаточно малых $|x_0|>0$.

(h) Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_0}J(x_0, u^*)=\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_0}G(x(t, x_0)u^*(x(t, x_0)))\,dt=-\eta^*(x_0).$$

Учитывая, что по свойству инвариантности многообразия устойчивости

$$\eta(t)=\eta^*(x(t)),$$

вывести уравнение для определения $u^*(x, \eta)$. Для упрощения вычислений воспользоваться соотношением

$$\int\limits_0^\infty \dot{\eta}(t)\frac{\partial x}{\partial x_0}\,dt=-\eta(0)-\int\limits_0^\infty \eta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)dt.$$

(i) Из уравнения

$$-G_u(x, u^*)+\eta f_u(x, u^*)=0$$

вывести, что

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x, u^*)\frac{\partial f}{\partial u}(x, u^*(x))+\frac{\partial G}{\partial u}(x, u^*(x))=0.$$

Таким образом, $u^*(x)$ есть искомое решение функционального уравнения $\mathfrak{F}$ и значит, $u^*(x)$ есть единственное оптимальное управление с обратной связью для системы $\mathscr{S}$.

ГЛАВА 5

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В первом разделе этой главы показано, что принцип максимума и условия трансверсальности являются необходимыми условиями оптимальности управления. Затем получены различные обобщения принципа максимума для процессов с импульсными управлениями и для процессов с гладко меняющимися управлениями.

Во втором разделе выведены некоторые достаточные условия оптимальности. Тут содержатся глобальные результаты, использующие условия выпуклости, а также локальные теоремы, в которых нелинейные процессы аппроксимируются линейными. При наличии подходящих предположений для определения оптимального управления используются методы динамического программирования.

5.1. Принцип максимума и условия трансверсальности как необходимые условия

В этом разделе мы докажем принцип максимума для общего случая нелинейных автономных управляемых систем в задаче с подвижными концами на конечном или бесконечном интервале времени. Принцип максимума, вместе с условиями трансверсальности, является необходимым условием, которому должно удовлетворять оптимальное управление. Доказательство этих результатов основано на конструкции, приведенной в теореме 3 главы 4, которая в значительной мере исчерпывает содержание принципа максимума. Мы докажем общие теоремы сначала для автономных систем, а затем распространим соответствующие результаты на неавтономные системы путем введения t в качестве дополнительной пространственной координаты.

Итак, мы рассматриваем автономный управляемый процесс

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

с непрерывными $f(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ в пространстве R^{n+m}. Пусть X_0 и $X_1 \subset R^n$ есть заданные начальное и целевое множества и пусть Ω есть непустое ограничивающее множество в R^m. Допустимое управление $u(t) \subset \Omega$ на некотором конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ есть ограниченная измеримая функция, которой соответствует траектория $x(t, x_0)$, переводящая точку $x(0, x_0) = x_0 \in X_0$ в точку $x(t_1, x_0) = x_1 \in X_1$. Конечный момент времени t_1, начальная точка $x_0 \in X_0$ и конечная точка $x_1 \in X_1$ меняются вместе с управлением. Класс всех допустимых управлений обозначим через Δ.

Каждому управлению $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ в Δ с траекторией $x(t)$ поставим в соответствие критерий качества

$$C(u) = \int_0^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt,$$

где $f^0(x, u)$ и $\frac{\partial f^0}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные в R^{n+m} функции. Допустимое управление $\tilde{u}(t)$ из Δ является (минимальным) оптимальным, если

$$C(\tilde{u}) \leqslant C(u) \quad \text{для всех} \quad u \in \Delta.$$

Мы докажем, что оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$ удовлетворяет принципу максимума

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t)) \quad \text{почти всюду}$$

и

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t)) \equiv 0, \quad \eta_0^* \leqslant 0 \quad \text{всюду}.$$

Здесь расширенное состояние

$$\hat{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x^{0*}(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$$

есть решение расширенной системы уравнений

$$(\hat{\mathscr{S}}) \qquad \begin{aligned} \dot{x}^0 &= f^0(x, u), \\ \dot{x}^i &= f^i(x, u), \qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

а $\hat{\eta}^*(t)$ — нетривиальное решение расширенной сопряженной системы уравнений

$$(\hat{\mathscr{A}}) \qquad \begin{aligned} \dot{\eta}_0 &= 0, \\ \dot{\eta}_i &= -\sum_{j=0}^{n} \eta_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x^*(t), u^*(t)), \qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

где последние n уравнений (с $f^0 \equiv 0$) образуют сопряженную систему $\mathscr{A}$ из раздела 4.1. Расширенная функция Гамильтона имеет

вид

$$\hat{H}(\hat{\eta}, \hat{x}, u) = \eta_0 f^0(x, u) + \eta_1 f^1(x, u) + \ldots + \eta_n f^n(x, u)$$

и

$$\hat{M}(\hat{\eta}, \hat{x}) = \max_{u \in \Omega} \hat{H}(\hat{\eta}, \hat{x}, u) \quad \text{(если } \hat{M} \text{ существует).}$$

В этих обозначениях мы установим и докажем основной принцип — принцип максимума. При этом мы используем концепции и обозначения раздела 4.1.

Для доказательства мы сначала рассмотрим расширенный касательный конус возмущений $\hat{K}_\tau$ для любого лебеговского момента времени τ из интервала $0 < \tau < t^*$ для того, чтобы учесть координату x^0, соответствующую критерию качества. Затем, в дальнейшем, мы расширим конус $\hat{K}_\tau$ до конуса $\hat{K}_\tau^\pm$, чтобы ввести вариацию времени, так как оптимальное управление $u^*(t)$ является минимальным на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^* + \varepsilon$. Наконец, мы расширим конус $\hat{K}_\tau^\pm$ до конуса $\mathcal{K}_\tau$, чтобы учесть вариации начальной и конечной точек в доказательстве условий трансверсальности. Позднее мы точно определим эти различные конусы.

В каждом случае мы должны определить предельный конус и воспользоваться ранее введенными топологическими понятиями, или их обобщениями, чтобы показать, что общие секущие инфинитезимальных конусов возмущений совпадают с секущими соответствующих нелинейных аппроксимирующих множеств достижимости.

Теорема 1. *Рассмотрим управляемый процесс в R^n:*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u)$$

с ограниченными измеримыми управлениями $u(t)$, определенными на различных интервалах времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и принадлежащими ограничивающему множеству $\Omega \subset R^m$. Пусть Δ есть совокупность всех допустимых управлений, которые переводят некоторую начальную точку из X_0 в конечную точку из целевого множества X_1. На множестве управлений $u(t)$ из Δ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ с соответствующей траекторией $x(t)$ определим функционал качества

$$C(u) = \int_0^{t_1} f^0(x(t), u(t))\, dt.$$

Если управление $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ является минимальным оптимальным управлением из Δ, с соответствующим расширенным решением $\hat{x}^*(t) = (x^{0*}(t), x^*(t))$, то существует нетривиальное решение расширенной сопряженной системы $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ такое, что

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t)) \quad \textit{почти всюду}$$

и

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t),\ \hat{x}^*(t)) \equiv 0$$

и $\eta_0^* \leqslant 0$ *всюду на интервале* $0 \leqslant t \leqslant t^*$. *Далее, если* X_0 *и* X_1 (*или только одно из них*) *являются многообразиями с касательными пространствами* T_0 *и* T_1 *соответственно в точках* $x^*(0)$ *и* $x^*(t^*)$, *то решение* $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*,\ \eta^*(t))$ *может быть выбрано удовлетворяющим условиям трансверсальности на обоих концах* (*или только на одном*):

$$\eta^*(0) \text{ ортогонально к } T_0,$$
$$\eta^*(t^*) \text{ ортогонально к } T_1.$$

Доказательство. Пусть управление $u^*(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t^*$, которому соответствует траектория $x^*(t)$, переводящая систему из точки $x^*(0) = x_0^* \in X_0$ в точку $x^*(t^*) = x_1^* \in X_1$, будет оптимальным в Δ. Рассмотрим расширенную систему в R^{n+1}:

$$\dot{x}^0 = f^0(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ u),$$
$$\dot{x}^i = f^i(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ u), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

или

$$(\hat{\mathscr{S}}) \qquad \dot{\hat{x}} = \hat{f}(x,\ u),$$

с соответствующим решением $\hat{x}^*(t) = (x^{0*}(t),\ x^*(t))$, где

$$x^{0*}(t) = \int_0^t f^0(x^*(s),\ u^*(s))\,ds.$$

Так как каждое управление $u(t)$ в Δ определяет некоторую траекторию $\hat{x}(t)$ расширенной системы, ведущую из $(0,\ X_0)$ в $(0,\ X_1)$, мы замечаем, что управление $u^*(t)$ переводит точку $(0,\ x_0^*)$ в наинизшую возможную точку на прямой $R^1 \times x_1^*$ в пространстве R^{n+1}, т. е. $C(u^*) = x^{0*}(t^*)$ есть минимальное значение критерия качества для управлений в Δ.

Поэтому точка $(x^{0*}(t^*),\ x^*(t^*))$ лежит на границе множества достижимости $\hat{K}(t^*)$ системы $\hat{\mathscr{S}}$ в R^{n+1}. Следовательно, по теореме 3 главы 4, принцип максимума для системы $\hat{\mathscr{S}}$ установлен, то есть существует нетривиальное сопряженное решение $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*,\ \eta^*(t))$ такое, что $\hat{H}(\hat{\eta}^*(t),\ \hat{x}^*(t),\ u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\eta}^*(t),\ \hat{x}^*(t))$ почти всюду и функция $\hat{M}(\hat{\eta}^*(t),\ \hat{x}^*(t)) = \hat{M}$ является постоянной всюду на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Мы теперь докажем, что равенство $\hat{M} = 0$ является следствием минимизирующего свойства управления $u^*(t)$. Определим конус возмущений $\hat{K}_\tau^{\pm}$ в каждой лебеговской точке интервала $0 < \tau < t^*$,

как наименьший замкнутый конус в касательном пространстве в точке $\hat{x}^*(\tau)$, содержащий касательный конус возмущений $\hat{K}_\tau$ для системы $\hat{\mathscr{S}}$, и два вектора, $v_+(\tau)=\hat{f}(x^*(\tau), u^*(\tau))$ и $v_-(\tau)=-\hat{f}(x^*(\tau), u^*(\tau))$. Рассмотрим в $\hat{K}_\tau^\pm$ вектор $v=v_\pi(\tau)+v_+(\tau)\,\delta t$, где π означает элементарное заданное возмущение (в различные моменты времени из интервала $0<t<\tau$, как в разделе 4.1 перед леммой 1 главы 4), соответствующее возмущенному управлению $u_\pi(t, \varepsilon)$, а δt есть некоторое действительное число. Тогда траектория, соответствующая управлению $u_\pi(t, \varepsilon)$ на интервале $0\leqslant t<\tau+\varepsilon\delta t$ для малых $\varepsilon\geqslant 0$, есть $\hat{x}_\pi(t, \varepsilon)$ с концевой точкой

$$\hat{x}_\pi(\tau+\varepsilon\delta t, \varepsilon)=\hat{x}^*(\tau)+\varepsilon v_\pi(\tau)+\varepsilon v_+(\tau)\,\delta t+o(\varepsilon).$$

Эта основная формула была доказана в разделе 4.1 (для $\delta t=0$), и она показывает, что конус $\hat{K}_\tau^\pm$ лежит в объединении по времени расширенных множеств достижимости $\bigcup_{0<t<t^*}\hat{K}(t)$ с точностью до величины порядка $o(\varepsilon)$.

Применяя рассуждения, использованные в доказательстве леммы 2 главы 4 к $\hat{K}_\tau^\pm$, получаем, что любой вектор w, внутренний для $\hat{K}_\tau^\pm$, определяет прямолинейный отрезок с началом в точке $\hat{x}^*(\tau)$, который лежит внутри $\bigcup_{0<t<t^*}\hat{K}(t)$. В частности, вектор $w_\tau=(-1,\ 0)$ не лежит во внутренности $\hat{K}_\tau^\pm$, ибо в противном случае существовало бы возмущенное управление $\tilde{u}_\pi(t, \varepsilon)$, переводящее точку $(0,\ x_0)$ в некоторую точку $(\bar{x}^0,\ x^*(\tau+\varepsilon\delta t))$ со значением критерия качества $\bar{x}^0<x^{0*}(\tau+\varepsilon\delta t)$. Так как функция $\hat{f}(x, u)$ не зависит ни от t, ни от x^0, то управление $\bar{u}_\pi(t, \varepsilon)$ можно тогда доопределить на интервале $\tau+\varepsilon\delta t<t\leqslant t^*+\varepsilon\delta t$ по формуле $\bar{u}_\pi=u^*(t-\varepsilon\delta t)$, так, чтобы значение критерия качества на расширенном управлении было меньше, чем $C(u^*)=x^{0*}(t^*)$. Следовательно, конус $\hat{K}_\tau^\pm$ отделен от вектора w_τ гиперплоскостью с нормальным вектором $\hat{\eta}_\tau(\tau)$. Определим $\hat{\eta}_\tau(t)=(\eta_{0\tau},\ \eta_\tau(t))$ при помощи сопряженных уравнений $\mathscr{A}$, в которых $\hat{\eta}_\tau(\tau)$ и $\eta_{0\tau}\leqslant 0$; тогда вектор-функция $\hat{\eta}_\tau(t)$ удовлетворяет принципу максимума

$$\hat{H}(\hat{\eta}_\tau(t),\ \hat{x}^*(t),\ u^*(t))=\hat{M}(\hat{\eta}_\tau(t),\ x^*(t))$$

почти всюду на интервале $0\leqslant t\leqslant\tau$, а функция $\hat{M}(\hat{\eta}_\tau(t), \hat{x}^*(t))\equiv\hat{M}_\tau$ постоянна. Так как $\hat{\eta}_\tau(\tau)\,v_\pm(\tau)\leqslant 0$ и $v_+(\tau)=-v_-(\tau)$, мы заключаем, что $\hat{\eta}_\tau(\tau)\,v_\pm(\tau)=0$ и потому $\hat{M}_\tau=0$.

Построим теперь предельный конус $\hat{K}_{t^*}^\pm$ для того, чтобы получить сопряженный вектор $\hat{\eta}^*(t)$ такой, что $\hat{\eta}^*(t)\,v(t)\leqslant 0$ для всех $v(t)\in\hat{K}_t^\pm$ на интервале $0\leqslant t\leqslant t^*$. Для того чтобы показать, что параллельнсе перемещение касательных векторов вдоль траектории

$\hat{x}^*(t)$, определяемое с помощью матриц $\hat{A}_{t_2 t_1}$, как в предварительных замечаниях раздела 4.1, переводит конус $K_{t_1}^{\pm}$ в $K_{t_2}^{\pm}$, где $0 < t_1 < t_2 < t^*$, мы нуждаемся только в доказательстве того, что вектор $\hat{A}_{t_2 t_1} v_+(t_1) \in \hat{K}_{t_2}^{\pm}$. Если вектор $\hat{A}_{t_2 t_1} v_+(t_1)$ не принадлежит конусу $\hat{K}_{t_2}^{\pm}$, то имеется гиперплоскость, которая разделяет их, т. е. существует вектор $\hat{\xi}$, для которого $\hat{\xi}\hat{A}_{t_2 t_1} v_+(t_1) > 0$ и $\hat{\xi}\hat{K}_{t_2}^{\pm} \leqslant 0$, т. е. $\hat{\xi}\hat{v} \leqslant 0$ для всех векторов $\hat{v} \in \hat{K}_{t_2}^{\pm}$. Пусть $\hat{\xi}(t)$ будет соответствующим сопряженным решением, для которого $\hat{\xi}(t) v_+(t_1) > 0$. В силу принципа максимума имеем

$$\max_{u \in \Omega} \hat{\xi}(t) \hat{f}(x^*(t)), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\xi}(t), \hat{x}^*(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, $\hat{\xi}(t_1) v_+(t_1) = 0$, что невозможно. Поэтому

$$\hat{A}_{t_2 t_1} \hat{K}_{t_1}^{\pm} \subset \hat{K}_{t_2}^{\pm} \text{ для } 0 < t_1 < t_2 < t^*,$$

и мы определили предельный конус (в момент t^* или даже для любого t) по формуле

$$\hat{K}_{t^*}^{\pm} = U_{0 < \tau < t^*} \hat{A}_{t^* \tau} \hat{K}_{\tau}^{\pm}.$$

Пусть теперь $w_{t^*} = (-1, 0)$ есть вектор в касательном пространстве в точке $\hat{x}^*(t^*)$. Заметим, что так как $\partial \hat{f} / \partial x^0 \equiv 0$, то вектор $w_\tau = (-1, 0)$ может быть получен из вектора w_{t^*} параллельным переносом. Если вектор w_{t^*} лежит во внутренности предельного конуса $\hat{K}_{t^*}^{\pm}$, то существует полиэдральный конус в $\hat{K}_{\tau}^{\pm}$, который содержит w_τ в своей внутренности, для некоторых лебеговских точек $\tau < t^*$ (см. указанную выше лемму 2). Но мы уже доказали, что вектор w_τ не может принадлежать внутренности конуса $\hat{K}_{\tau}^{\pm}$ и, следовательно, вектор w_{t^*} можно отделить от предельного конуса $\hat{K}_{t^*}^{\pm}$ каким-нибудь вектором $\hat{\eta}^* = (\eta_0^*, \eta^*)$, где $\eta_0^* \leqslant 0$ и $\hat{\eta}^* \hat{K}_{t^*}^{\pm} \leqslant 0$. Определим требуемый сопряженный вектор $\hat{\eta}^*(t)$ как решение системы $\hat{\mathcal{A}}$, удовлетворяющее условию $\hat{\eta}^*(t^*) = \hat{\eta}^*$. Тогда, как и выше, справедлив принцип максимума для $\eta^*(t)$

$$\hat{H} = \hat{M} \text{ почти всюду на интервале } 0 \leqslant t \leqslant t^*$$

и

$$\hat{M} \equiv 0 \text{ всюду на интервале } 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Окончательно мы должны выбрать $\hat{\eta}^*$ так, чтобы сопряженный вектор $\hat{\eta}^*(t)$ удовлетворял условиям трансверсальности. Мы обсудили случай, когда множества X_0 и X_1 имеют касательные пространства T_0 и T_1 в точках x_0^* и x_1^* соответственно. Для задачи с условием трансверсальности на одном конце необходимо произвести небольшую модификацию проделанного выше рассуждения.

Пусть T_0 — касательное пространство к X_0 в точке x_0^* из R^n и пусть $\hat{T}_0$ — линейное пространство, содержащее точку $(0, x_0^*)$, порожденное векторами вида $(0, T_0)$ в R^{n+1}. Аналогично, пусть $\hat{T}_1$ — совокупность всех векторов вида $(0, T_1)$ в точке $(x^{0*}(t^*), x_1^*)$. Пусть $\mathcal{K}_t$ есть наименьший замкнутый конус в касательном пространстве к $\hat{x}^*(t)$, порожденном $\hat{A}_{t_0}\hat{T}_0$ и $\hat{K}_t^{\pm}$.

Пусть $\mathbf{T}_1$ — конус в касательном пространстве в точке $\hat{x}^*(t^*)$, порожденный $\hat{T}_1$ и направленный книзу как вектор $w_{t^*} = (-1, 0)$. Предположим (это будет показано позднее), что конусы $\mathcal{K}t^*$ и $\mathbf{T}_1$ разделены гиперплоскостью π. В этом случае рассмотрим нормальный вектор $\hat{\eta}^* = (\eta_0^*, \eta^*)$ в точке $\hat{x}^*(t^*)$, где $\eta_0^* \leqslant 0$, такой, что

$$\hat{\eta}^*\mathcal{K}_{t^*} \leqslant 0, \quad \hat{\eta}^*\mathbf{T}_1 \geqslant 0.$$

Соответствующее решение $\hat{\eta}^*(t)$ для системы $\hat{\mathcal{A}}$ удовлетворяет тогда принципу максимума, и мы вскоре покажем, что вектор-функция $\hat{\eta}^*(t)$ удовлетворяет условиям трансверсальности.

Линейное пространство $\hat{T}_1$, которое лежит в $\mathbf{T}_1$, должно лежать также в гиперплоскости π. Таким образом, вектор $(0, \eta^*)$ удовлетворяет условию $\eta^* T_1 = 0$, т. е. условию трансверсальности в точке x_1^*. Таким же образом параллельно переносится линейное пространство $\hat{A}_{t^*0}\hat{T}_0 \subset \mathcal{K}_{t^*}$, и следовательно, оно отделено от вектора $\hat{\eta}^*$ гиперплоскостью π. Поэтому $\hat{\eta}^*\hat{A}_{t^*0}(0, \alpha) = 0$ для каждого вектора $\alpha \in T_0$ и, следовательно, $\hat{\eta}^*(0)(0, \alpha) = 0$ или $\eta^*(0)\alpha = 0$. Тем самым, $\eta^*(0) T_0 = 0$, что является искомым условием трансверсальности в точке x_0^*.

Доказательство можно будет считать полностью завершенным, когда мы установим отделимость конусов $\mathcal{K}_{t^*}$ и $\mathbf{T}_1$. Предположим, что конусы $\mathcal{K}_{t^*}$ и $\mathbf{T}_1$ не могут быть разделены. Тогда вместе они порождают все касательное пространство в точке $\hat{x}^*(t^*)$ и, кроме того, имеется вектор, общий для обеих их относительных внутренностей. Предположим, что $\dim \mathcal{K}_{t^*} = r$ и $\dim \mathbf{T}_1 = n - r$. Если $\dim \mathbf{T}_1 > n - r$, то выбираем соответствующий замкнутый подконус конуса $\mathbf{T}_1$ размерности $n - r$, который пересекается с конусом $\mathcal{K}_{t^*}$ в общем положении (т. е. их пересечение содержит вектор, внутренний для каждого из них).

Так как конусы $\mathcal{K}_{t^*}$ и $\mathbf{T}_1$ имеют общую внутреннюю точку, то конусы $\hat{A}_{t^*\tau}\mathcal{K}_\tau$ и $\mathbf{T}_1$ для некоторой лебеговской точки τ из $0 < \tau < t^*$ будут также пересекаться. Тогда и конусы $\mathcal{K}_\tau$ и $\mathbf{T}_\tau = \hat{A}_{t^*\tau}\mathbf{T}_1$ пересекаются по общей внутренней точке в касательном пространстве к траектории $\hat{x}^*(\tau)$.

Пусть π — элементарное заданное возмущение на $0 < t < \tau$ и пусть $u_\pi(t, \varepsilon)$ есть соответствующее возмущенное управление для

малых $\varepsilon \geqslant 0$. Пусть $\hat{x}_{\pi, \alpha}(t, \varepsilon)$ есть соответствующая траектория, которая начинается в точке $(0, \varepsilon\alpha)$ на множестве $(0, X_0) \subset R^{n+1}$. (Здесь $\hat{\alpha} = (0, \alpha)$ — вектор в касательном пространстве $\hat{T}_0$, и мы введем систему координат в X_0 в окрестности точки x_0^*, перенося их с T_0 с помощью ортогональной проекции касательного пространства T_0 на X_0 в R^n.) Тогда обычная основная формула возмущений имеет такой вид:

$$\hat{x}_{\pi, \alpha}(\tau + \varepsilon\delta t, \varepsilon) = \hat{x}^*(\tau) + \varepsilon [v_\pi(\tau) + v_+(\tau)\delta t + \hat{A}_{\tau 0}\hat{\alpha}] + o(\varepsilon).$$

Таким образом, множество $\mathcal{K}^0(\tau)$ точек достижимости, соответствующее множеству начальных состояний X_0, совпадает с $\mathcal{K}^0_\tau$ с точностью до малых порядка $o(\varepsilon)$. С помощью параллельного переноса многообразия $\mathcal{X}_1$, определенного как множество всех точек (x^0, X_1) в R^{n+1} таких, что $x^0 < x^{0*}(t^*)$, вдоль решения уравнения

$$\dot{\hat{x}} = f(x, u^*(t)),$$

мы определим аналогичное подмногообразие $\mathcal{X}(\tau)$ в касательном полупространстве $\mathbf{T}_\tau$. Но $\mathcal{X}(\tau)$ не может пересечься с $\mathcal{K}^0(\tau)$, ибо в таком случае возмущенное управление $u_\pi(t, \varepsilon)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon\delta t$, действуя на некоторую начальную точку в X_0, дает точку в многообразии $\mathcal{X}(\tau)$, которая в свою очередь продолженным [с помощью $u^*(t - \varepsilon\delta t)$] управлением будет переведена в целевую точку в многообразии $\mathcal{X}_1$, т. е. мы получаем точку (x^0, x_1), для которой $x^0 < x^{0*}(t^*)$ и $x_1 \in X_1$. Это невозможно вследствие того, что управление $u^*(t)$ доставляет минимум интегральному критерию качества.

Таким образом, множество $\mathcal{K}^0(\tau)$ совпадает с $\mathcal{K}^0_\tau$, и $\mathcal{X}(\tau)$ совпадает с $\mathbf{T}_\tau$ с точностью до малых порядка $o(\varepsilon)$. Если конусы $\mathcal{K}^0_\tau$ и $\mathbf{T}_\tau$ пересекаются по общей внутренней точке, то множества $\mathcal{K}^0(\tau)$ и $\mathcal{X}(\tau)$ должны пересекаться. Этот последний вывод следует из результатов топологической аппроксимации, которые обобщают сведения, приведенные выше в пункте «топологические понятия», и доказаны в приведенном ниже упражнении.

Поэтому конусы $\mathcal{K}^0_{t^*}$ и $\mathbf{T}_1$ не могут иметь общую внутреннюю точку; поэтому их можно отделить гиперплоскостью. Тем самым теорема полностью доказана.

Важным специальным случаем теории оптимального управления является случай, когда функционал качества имеет вид $C(u) = t_1$ для управлений $u(t)$ из класса $\Delta(0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Это есть задача об оптимальном по *быстродействию* управлении, и соответствующую этому случаю формулировку принципа максимума можно получить из теоремы 3 главы 4, полагая $f^0(x, u) \equiv 1$. Мы сформулируем наш результат в терминах функции Гамильтона:

$$H(\eta, x, u) = \eta_1 f^1(x, u) + \ldots + \eta_n f^n(x, u)$$

и

$$M(\eta, x) = \max_{u \in \Omega} H(\eta, x, u).$$

Следствие 1. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u)$$

с ограниченными измеримыми управлениями $u(t) \subset \Omega$, *из множества управлений* Δ, *определенными на различных интервалах времени* $0 \leqslant t \leqslant t_1$ *и переводящими точки множества* X_0 *в* X_1, *как было указано выше. Пусть критерием качества будет продолжительность процесса управления*

$$C(u) = \int_0^{t_1} 1\, dt = t_1.$$

Если $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ *есть оптимальное по быстродействию управление из множества управлений* Δ, *которому соответствует решение* $x^*(t)$, *то существует нетривиальное решение* $\eta^*(t)$ *сопряженной системы* $\mathscr{A}$, *такое, что* $H(\eta^*(t), x^*(t), u^*(t)) = M(\eta^*(t), u^*(t))$ *почти всюду, а функция*

$$M(\eta^*(t), u^*(t)) \geqslant 0$$

является постоянной всюду.

Далее, если множества X_0 *и* X_1 *суть многообразия с касательными пространствами* T_0 *и* T_1 *в точках* $x^*(0)$, $x^*(t^*)$ *соответственно, то* $\eta^*(t)$ *можно выбрать удовлетворяющим условиям трансверсальности*

$$\eta^*(0) \perp T_0 \text{ и } \eta^*(t^*) \perp T_1.$$

Доказательство. Пусть $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ есть сопряженное решение, определяемое в теореме. Тогда

$$\eta_0^* + \eta^*(t) f(x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} [\eta_0^* + \eta^*(t) f(x^*(t), u)]$$

или

$$H(\eta^*(t), x^*(t), u^*(t)) = M(\eta^*(t), x^*(t)) \text{ почти всюду.}$$

Также $\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t)) \equiv 0$ или $M(\eta^*(t), x^*(t)) = -\eta_0^* \geqslant 0$ всюду. Здесь, как обычно,

$$\hat{H}(\hat{\eta}, \hat{x}, u) = \eta_0 + H(\eta, x, u), \quad \hat{M}(\hat{\eta}, \hat{x}) = \eta_0 + M(\eta, x).$$

Если $\eta^*(t)$ обращается в нуль в некоторой точке интервала $0 \leqslant t \leqslant t^*$, то оно обращается в нуль тождественно, потому что является решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений $\mathscr{A}$. Но в таком случае условие $\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t)) \equiv 0$ означает, что $\eta_0 = 0$, т. е. $\hat{\eta}^*(t) \equiv 0$, что невозможно. Поэтому $\eta^*(t)$ есть ненулевое решение системы $\mathscr{A}$.

Условия трансверсальности для сопряженного решения $\eta^*(t)$ уже получены в теореме 1. Следствие доказано.

Замечание 1. Если множество X_1 есть все пространство R^n, то задача управления называется задачей со *свободным концом*

траектории. Конечно, оптимальное управление $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$, которому соответствует траектория расширенной системы $\hat{x}^*(t)$ и сопряженное решение $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$, удовлетворяет принципу максимума и условиям трансверсальности, установленным в теореме 1. Условие трансверсальности в конце траектории требует, чтобы $\eta^*(t^*) = 0$.

Замечание 2. Рассмотрим управляемый процесс в пространстве R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

с ограниченными измеримыми управлениями $u(t)$ на фиксированном конечном отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T$, из множества Ω. Пусть Δ_T все такие управления, которые переводят некоторую начальную точку из X_0 в конечную точку из X_1, с критерием качества

$$C(u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t))\,dt,$$

как в теореме 1.

Пусть $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ есть оптимальное управление для этой задачи с *фиксированным интервалом времени* и пусть $x^*(t)$ есть соответствующая траектория. Тогда существует нетривиальное сопряженное решение $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ таксе, что

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t)) \text{ почти всюду,}$$

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t)) = \text{const}$$

и $\eta_0^* \leqslant 0$. Далее, если X_0 и X_1 есть многообразия с соответствующими касательными пространствами T_0 и T_1 в R^n, то условия трансверсальности имеют вид

$$\eta^*(0) \perp T_0 \text{ и } \eta^*(T) \perp T_1.$$

Доказательство этих утверждений может быть проведено в точности так же, как в теореме 1, за исключением того, что никакие вариации времени не позволяются, т. е. конус $\hat{K}_t^{\pm}$ заменяется конусом $\hat{K}_t$. Следовательно, мы не можем утверждать, что $\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t))$ равно нулю.

Для фиксированного промежутка времени бесконечной длины получается интересный результат, который мы сформулируем для задачи с закрепленным концом траектории. Фиксируем начальную точку $x_0 \in R^n$ и рассмотрим измеримые управления $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$, ограниченные на каждом компактном подынтервале и удовлетворяющие ограничению Ω, каждое из которых определяет решение $x(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ такое, что $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = x_1$ в R^n. Множество Δ_∞ всех допустимых управлений состоит из всех таких

управлений, для которых интеграл $C(u)$ сходится:

$$C(u)=\int_0^\infty f^0(x(t),\ u(t))\,dt<\infty.$$

Решение $\hat{x}(t)=(x^0(t), x(t))$ расширенной системы, где $\dot{x}^0=f^0(x(t), u(t))$, $x^0(0)=0$, определяется как обычно.

Следствие 2. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n

$$(\mathcal{S})\qquad \dot{x}=f(x,\ u).$$

Измеримые управления $u(t)\subset\Omega$ $(0\leqslant t<\infty)$ *с соответствующими траекториями* $x(t)$, *переводящие систему из точки* x_0 *в точку* x_1 *с конечным значением критерия качества*

$$C(u)=\int_0^\infty f^0(x(t),\ u(t))\,dt,$$

составляет класс Δ_∞ *допустимых управлений.*

Пусть управление $u^*(t)$, *которому соответствует решение* $\hat{x}^*(t)$ *расширенной системы, является оптимальным в классе управлений* Δ_∞. *Тогда существует нетривиальное решение расширенной сопряженной системы* $\hat{\eta}^*(t)=(\eta_0^*,\ \eta^*(t))$ *такое, что*

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t),\ \hat{x}^*(t),\ u^*(t))=\hat{M}(\hat{\eta}^*(t)),\ \hat{x}^*(t))$$

почти всюду на $0\leqslant t<\infty$,

$$M(\hat{\eta}^*(\hat{t}),\ x^*(\hat{t}))\equiv 0$$

всюду на $0\leqslant t<\infty$ *и* $\eta_0^*\leqslant 0$.

Доказательство. Для каждого конечного интервала $0\leqslant t\leqslant T$ рассмотрим класс Δ_T ограниченных измеримых управлений, принадлежащих множеству Ω, которые переводят точку x_0 в точку $x^*(T)$. Тогда управление $u^*(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ является оптимальным управлением в Δ_T, ибо в противном случае любое управление из класса Δ_T с меньшим значением критерия качества может быть дополнено управлением $u^*(t)$ на интервале $T<t<\infty$, что противоречит оптимальности $u^*(t)$ в классе Δ_∞.

Пусть $\hat{\eta}^*(T)=(\eta_{0T}^*,\ \eta_T^*(t))$ — решение сопряженной системы

$$(\hat{\mathcal{A}})\qquad \dot{\hat{\eta}}=-\hat{\eta}\frac{\partial\hat{f}}{\partial\hat{x}}(x^*(t),\ u^*(t)),$$

такое, что

$$\hat{H}(\hat{\eta}_T^*(t),\ x^*(t),\ u^*(t))=\hat{M}(\hat{\eta}_T^*(t),\ \hat{x}^*(t))\quad\text{почти всюду,}$$

$$\hat{M}(\hat{\eta}_T^*(t),\ \hat{x}^*(t))\equiv 0\quad\text{всюду на}\quad 0\leqslant t<\infty,$$

и $\eta_{0T}^*\leqslant 0$. Выберем в качестве вектора $\eta_T^*(0)$ единичный вектор.

Положим $T=1, 2, 3, \ldots, r, \ldots$ и выберем подпоследовательность единичных векторов $\hat{\eta}_T^*(0)$, сходящихся к некоторому единичному вектору $\hat{\eta}^*(0)$, такому, что $\hat{\eta}_0^* \leqslant 0$. Пусть $\hat{\eta}^*(t)=(\eta_0^*, \eta^*(t))$ будет соответствующим образом определенное решение системы $\hat{\mathcal{A}}$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Заметим, что

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\eta}_T^*(t)=\hat{\eta}^*(t) \quad \text{на} \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

причем сходимость является равномерной на компактных интервалах времени. Мы докажем, что решение $\hat{\eta}^*(t)$ вместе с управлением $u^*(t)$ и соответствующим решением $x^*(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ удовлетворяет принципу максимума.

Предположим, что

$$\hat{H}(\hat{\eta}(t), \quad \hat{x}^*(t), u^*(t)) < \hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \ \hat{x}^*(t))$$

на некотором подмножестве положительной меры из промежутка $0 \leqslant t < \infty$. Тогда имеется такой лебеговский момент времени t_1, что

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t_1), \ \hat{x}^*(t_1), \ u^*(t_1)) < H(\hat{\eta}^*(t_1), \ \hat{x}^*(t_1), \ u_1) - \delta$$

для некоторой точки $u_1 \in \Omega$ и $\delta > 0$. Для достаточно большого $T > t_1$ мы получим

$$\hat{\eta}_T^*(t_1)\hat{f}(x^*(t_1), \ u^*(t_1)) < \hat{\eta}_T^*(t_1)\hat{f}(x^*(t_1), \ u_1) - \frac{\delta}{2}.$$

Но из доказательства теоремы 1 следует, что это неравенство невозможно, так что

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t), \ \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \ \hat{x}^*(t))$$

почти всюду на $0 \leqslant t < \infty$.

Доказательство теоремы 1 показывает также, что $\hat{M}(\eta^*(t), \hat{x}^*(t))$ есть константа на полуинтервале $0 \leqslant t < \infty$. Тогда легко показать, что

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \ \hat{x}^*(t)) \equiv 0 \ \text{на} \ 0 \leqslant t < \infty.$$

Следствие доказано.

Обратимся, наконец, к наиболее общему случаю нелинейного неавтономного управляемого процесса. Принцип максимума для таких процессов будет получен как непосредственное следствие теоремы 3 главы 4, путем введения времени в качестве новой координаты $x^{n+1}=t$.

В последующих рассмотрениях мы предполагаем, что:

1) $(\mathcal{S})$ $\dot{x}=f(x, t, u)$ есть процесс управления в пространстве R^n, причем $f \in C^1$ в R^{n+1+m}.

2) Начальное и целевое множества X_0 и X_1 являются непустыми подмножествами в R^n.

3) Допустимые управления Δ суть ограниченные измеримые функции $u(t)$, определенные на различных конечных интервалах времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющие некоторым ограничениям $u(t) \subset \Omega \subset R^m$, и каждое из управлений переводит некоторую точку $x_0 \in X_0$ в некоторую точку $x_1 \in X_1$.

4) Критерий качества управления $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ из класса Δ, которому соответствует решение $x(t)$, имеет вид

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),\ t,\ u(t))\, dt,$$

где $f^0 \in C^1$ в R^{n+1+m}. Траектория расширенной системы, соответствующая управлению $u(t)$, есть

$$\tilde{x}(t) = (x^0(t),\ x(t),\ x^{(n+1)}(t))$$

и является решением уравнения

$$(\tilde{\mathcal{S}}) \qquad \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x},\ u)$$

или

$$\dot{x}_0 = f^0(x,\ x^{n+1},\ u), \quad \dot{x} = f(x,\ x^{n+1},\ u), \quad x^{n+1} = 1$$

с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = (0,\ x_0,\ t_0)$. Расширенная сопряженная система имеет вид

$$(\tilde{\mathcal{A}}) \qquad \dot{\tilde{\eta}} = -\tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} (\tilde{x}(t),\ u(t))$$

или

$$\dot{\eta}_0 = 0,$$

$$\dot{\eta}_j = -\sum_{i=0}^{n} \eta_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j} (x(t),\ t,\ u(t)), \qquad j = 1,\ \ldots,\ n,$$

$$\dot{\eta}_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} \eta_i \frac{\partial f^i}{\partial t} (x(t),\ t,\ u(t)).$$

Функция Гамильтона для расширенной системы

$$\tilde{H}(\tilde{\eta},\ \tilde{x},\ u) = \eta^0 f^0(x,\ x^{n+1},\ u) + \ldots + \eta_n f^n(x,\ x^{n+1},\ u) + \eta_{n+1}$$

и

$$\tilde{M}(\tilde{\eta},\ \tilde{x}) = \max_{u \in \Omega} \tilde{H}(\tilde{\eta},\ \tilde{x},\ u).$$

Мы будем также писать

$$\tilde{x} = (\hat{x},\ x^{n+1}), \quad \tilde{\eta} = (\hat{\eta},\ \eta_{n+1})$$

и

$$\tilde{H}(\tilde{\eta},\ \tilde{x},\ u) = \hat{H}(\hat{\eta},\ \hat{x},\ t,\ u) + \eta_{n+1}, \quad \tilde{M}(\tilde{\eta},\ \tilde{x}) = \hat{M}(\hat{\eta},\ \hat{x},\ t) + \eta_{n+1}.$$

Теорема 2. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u).$$

Пусть Δ — *совокупность всех ограниченных измеримых управлений* $u(t) \subset \Omega \subset R^m$, *определенных на различных конечных интервалах времени* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *и переводящих точки множества начальных состояний* X_0 *в* X_1, *как указано выше, с критерием качества*

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), t, u(t))\, dt.$$

Если управление $u^*(t)$ *на интервале* $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ *с соответствующей траекторией расширенной системы* $\tilde{x}^*(t)$ *является оптимальным управлением в* Δ, *то существует нетривиальное решение* $\tilde{\eta}^*(t)$ *расширенной сопряженной системы* $\tilde{\mathcal{A}}$, *такое, что*

$$\tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) = \tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \quad \text{почти всюду}$$

и

$$\tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \equiv 0, \quad \eta_0^* \leqslant 0 \quad \text{всюду на} \quad t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*.$$

Это можно записать также в виде

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t), t, u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t), t) \quad \text{почти всюду}$$

и

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t), t) \equiv \int_{t_0^*}^{t} \sum_{i=0}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds.$$

Условия трансверсальности

$$\eta_{n+1}^*(t_0^*) = \eta_{n+1}^*(t_1^*) = 0$$

и, следовательно,

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t_1^*), \hat{x}^*(t_1^*), t_1^*) = 0.$$

Если множества X_0 *и* X_1 (*или только одно из них*) *являются многообразиями в* R^n *с касательными пространствами* T_0 *и* T_1 *в точках* x_0^* *и* x_1^* *соответственно, то решение* $\tilde{\eta}^*(t)$ *нужно выбрать удовлетворяющим следующим условиям трансверсальности* (*или только одному из них*):

$$\eta^*(t_0^*) \perp T_0 \quad \text{и} \quad \eta^*(t_1^*) \perp T_1.$$

Доказательство. В пространстве R^{n+1} переменных (x, x^{n+1}) задача управления

$$\dot{x} = f(x, x^{n+1}, u), \quad \dot{x}^{n+1} = 1$$

с критерием качества

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), x^{n+1}(t), u(t))\, dt$$

есть задача управления автономным процессом подобно изложенной в теореме 3 главы 4. Начальное и целевое множества суть цилиндры $X_0 \times R^1$ и $X_1 \times R^1$. Так как $\dot{x}^{n+1} = 1$, то каждое управление $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1 - t_0$ (в этой автономной задаче), которое переводит точку (x_0, t_0) в точку (x_1, t_1), можно считать определенным на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; следовательно, $u(t)$ есть управление из Δ. Таким образом, оптимальное управление $u^*(t)$ из класса Δ, определенное на интервале времени $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$, является также оптимальным управлением для этой автономной задачи в пространстве R^{n+1}. Из теоремы 3 главы 4 мы получаем необходимые условия:

$$\tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) = \tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \quad \text{почти всюду}$$

и

$$\tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \equiv 0, \quad \eta_0^* \leqslant 0 \text{ всюду на интервале } t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*.$$

Утверждения

$$\hat{H} = \hat{M} \quad \text{и} \quad \hat{M} = \int_{t_0^*}^{t} \sum_{i=0}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds$$

прямо следуют из определений, предшествующих этой теореме, и соотношения

$$\eta_{n+1}^*(t) = -\int_{t_0^*}^{t} \sum_{i=0}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds + \eta_{n+1}^*(t_0^*).$$

Равенство $\eta_{n+1}^*(t_0^*) = 0$ следует из условий трансверсальности. Действительно, условия трансверсальности утверждают, что решение $\tilde{\eta}^*(t)$ можно выбрать так, чтобы вектор $(\eta^*(t_0^*), \eta_{n+1}^*(t_0^*))$ был ортогонален к прямой $x_0^* \times R^1$, а вектор $(\eta^*(t_1^*), \eta_{n+1}^*(t_1^*))$ был ортогонален к прямой $x_1^* \times R^1$. Это означает, что $\eta_{n+1}^*(t_0^*) = \eta_{n+1}^*(t_1^*) = 0$, что и требовалось. Тогда, учитывая, что $\hat{M} = -\eta_{n+1}^*$, получаем

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t), \hat{x}^*(t), t) = \int_{t_1^*}^{t} \sum_{i=0}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds$$

и

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t_0^*), \hat{x}^*(t_0^*), t_0^*) = \hat{M}(\hat{\eta}^*(t_1^*), \hat{x}^*(t_1^*), t_1^*) = 0.$$

Если X_0 и X_1 суть многообразия в R^n, то цилиндры $X_0 \times R^1$ и $X_1 \times R^1$ ортогональны к векторам $(\eta^*(t_0^*), \eta_{n+1}^*(t_0^*))$ и $(\eta^*(t_1^*), \eta_{n+1}^*(t_1^*))$ соответственно. Таким образом, если q_0 есть вектор, касательный к X_0 в точке x_0^* в пространстве R^n, то $\eta^*(t_0^*)\, q_0 = 0$, и вектор $\eta^*(t_0^*)$ ортогонален к X_0. Подобный результат получается и для X_1. Теорема доказана.

Замечание 1. Рассмотрим неавтономную задачу управления из теоремы 2, но фиксируем начальный момент времени $t_0 = t_0^*$, оставляя свободным конечный момент времени $t_1 > t_0$, для управлений, переводящих X_0 и X_1. Тогда соответствующее множество допустимых управлений есть Δ_{t_0}. Пусть $u^*(t)$ — определенное на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^*$ оптимальное управление в Δ_{t_0}, а $\tilde{x}^*(t)$ — соответствующее решение расширенной системы.

Из принципа максимума следует, что

$$\tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t),\ \tilde{x}^*(t)),\ u^*(t) = \tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t),\ \tilde{x}^*(t)) \quad \text{почти всюду}$$

и

$$\tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t),\ \tilde{x}^*(t)) \equiv 0, \quad \eta_0^* \leqslant 0 \quad \text{всюду на} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1^*.$$

Это означает, что

$$\hat{H} = \hat{M} \quad \text{и} \quad \hat{M} = \int_{t_1^*}^{t} \sum_{i=0}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s),\ s,\ u^*(s))\, ds,$$

так что $\hat{M}(\hat{\eta}^*(t_1^*),\ \hat{x}^*(t_1^*),\ t_1^*) = 0$, так как $\eta_{n+1}^*(t_1^*) = 0$. Однако мы не можем утверждать, что $\eta_{n+1}^*(t_0)$ равно нулю.

Если X_0 и X_1 суть многообразия в R^n, то как и выше

$$\eta^*(t_0) \perp X_0 \quad \text{и} \quad \eta^*(t_1^*) \perp X_1.$$

Замечание 2. Рассмотрим теперь неавтономную задачу управления из теоремы 2 при дополнительном условии, состоящем в том, что начальное и целевое множества $X_0(t)$ и $X_1(t)$ зависят от времени. Предположим, что $X_0(t)$ и $X_1(t)$ суть дифференцируемые многообразия в пространстве R^{n+1} координат $(x,\ x^{n+1})$. Пусть управление $u^*(t)$, определенное на $t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*$ [с соответствующим решением $\tilde{x}^*(t)$ расширенной системы], будет оптимальным в классе Δ. Тогда принцип максимума утверждает, как и прежде, что

$$\tilde{H} = \tilde{M} \quad \text{и} \quad \tilde{M} \equiv 0, \quad \eta_0 \leqslant 0.$$

Это означает, что

$$\hat{H} = \hat{M} \quad \text{и} \quad \hat{M} = \int_{t_1^*}^{t} \sum_{i=0}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s),\ s,\ u^*(s))\, ds - \eta_{n+1}^*(t_1^*).$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$(\eta^*(t_0^*),\ \eta_{n+1}^*(t_0^*)) \perp X_0(t_0^*) \quad \text{в} \quad (x_0^*,\ t_0^*) \quad \text{в} \quad R^{n+1}$$

и

$$(\eta^*(t_1^*),\ \eta_{n+1}^*(t_1^*)) \perp X_1(t_1^*) \quad \text{в} \quad (x_1^*,\ t_1^*) \quad \text{в} \quad R^{n+1}.$$

Если момент времени $t_0 = t_0^*$ является фиксированным, а допустимые управления принадлежат соответствующему классу Δ_{t_0}, в котором управление $u^*(t)$ $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^*$ является оптимальным,

то условия трансверсальности выполняются лишь в момент времени t_1^* [но при этом также $\eta^*(t_0^*) \perp X_0$ в R^n].

Пусть, в частности, множество X_0 состоит из одной точки x_0, а $X_1(t)$ есть кривая $(x_1(t), t)$ в R^{n+1}, и пусть управление $u^*(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^*$, будет оптимальным в классе управлений Δ_{t_0}.

Тогда условия трансверсальности в момент t_0 не имеют смысла, но в момент t_1^* будем иметь

$$\eta^*(t_1^*)\, q_1 + \eta_{n+1}^*(t_1^*) = 0,$$

где $q_1 = \dot{x}_1(t_1^*)$ есть скорость целевой точки. В этом случае

$$\hat{M}(\hat{\eta}^*(t_1^*),\ \hat{x}^*(t_1^*),\ t_1^*) = \eta^*(t_1^*)\, q_1.$$

Следствие 1. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x,\ t,\ u).$$

Пусть Δ есть совокупность всех ограниченных измеримых управлений $u(t) \subset \Omega \subset R^m$, определенных на различных конечных интервалах времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и переводящих точки из множества X_0 во множество X_1, как и выше, с критерием качества

$$C(u) = \int_{t_0}^{t_1} 1\, dt = t_1 - t_0.$$

Если управление $u^*(t)$ $(t_0^* \leqslant t \leqslant t_1^*)$, которому соответствует траектория $x^*(t)$, является оптимальным в Δ, то существует нетривиальное решение $\eta^*(t)$ сопряженной системы $\mathcal{A}$, такое, что

$$H(\eta^*(t),\ x^*(t),\ t,\ u^*(t)) = M(\eta^*(t),\ x^*(t),\ t) \ \textit{почти всюду}$$

и

$$M(\eta^*(t),\ x^*(t),\ t) - \int_{t_1^*}^{t} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s),\ s,\ u^*(s))\, ds$$

есть неотрицательная постоянная величина всюду на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1^*$, так что

$$M(\eta^*(t_1^*),\ x^*(t_1^*),\ t_1^*) \geqslant 0.$$

Если множества X_0 и X_1 суть многообразия в R^n с касательными пространствами T_0 и T_1 в точках x_0^* и x_1^* соответственно, то надо выбрать $\eta^*(t)$ так, чтобы

$$\eta^*(t_0^*) \perp T_0 \quad \textit{и} \quad \eta^*(t_1^*) \perp T_1.$$

Доказательство. Здесь

$$H(\eta,\ x,\ t,\ u) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i f^i(x,\ t,\ u) = \hat{H}(\hat{\eta},\ x,\ t,\ u) - \eta_0$$

и

$$M(\eta, x, t) = \max_{u \in \Omega} H(\eta, x, t, u) = \hat{M}(\hat{\eta}, x, t) - \eta_0.$$

Отметим, что нетривиальное решение $\tilde{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t), \eta_{n+1}^*(t))$ сопряженной системы $\tilde{\mathcal{A}}$ определяет решение $\eta^*(t)$ системы

$$(\mathcal{A}) \qquad \dot{\eta}_j = -\sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x^*(t), t, u^*(t)), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Так как

$$\eta_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(t), t, u^*(t)),$$

то равенство $\eta^*(t) = 0$ означает, что $\eta_0 \leqslant 0$ и η_{n+1} являются константами. Но тогда условия трансверсальности означают, что $\eta_{n+1}(t) \equiv 0$, а из соотношения $\tilde{M} \equiv 0$ следует, что $\eta_0 = 0$, и, таким образом, получаем $\tilde{\eta}(t) \equiv 0$, что невозможно. Следовательно, $\eta^*(t)$ есть нетривиальное решение системы $\mathcal{A}$.

Из теоремы 2 следует, что

$$H(\eta^*(t), x^*(t), t, u^*(t)) = M(\eta^*(t), x^*(t), t) \quad \text{почти всюду,}$$

и

$$M(\eta^*(t), x^*(t), t) = \int_{t_1^*}^{t} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds - \eta_0^*,$$

так что

$$M(\eta^*(t_1), x^*(t_1), t_1^*) = -\eta_0^* \geqslant 0,$$

что и требовалось.

Если множества X_0 и X_1 являются многообразиями в пространстве R^n, то условия трансверсальности теоремы 2 дают требуемые условия ортогональности. Следствие доказано.

Замечание 1. Если начальный момент времени $t_0 = t_0^*$ фиксирован и используются управления, принадлежащие классу Δ_{t_0}, то выводы следствия сохраняются.

Замечание 2. Обратимся к рассмотренной в следствии 1 задаче управления, оптимального по быстродействию, но с зависящими от времени начальным и целевым множествами $X_0(t)$ и $X_1(t)$. Тогда

$$H(\eta^*(t), x^*(t), t, u^*(t)) = M(\eta^*(t), x^*(t), t) \quad \text{почти всюду}$$

и

$$M(\eta^*(t), x^*(t), t) = \int_{t_1^*}^{t} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^*(s) \frac{\partial f^i}{\partial t}(x^*(s), s, u^*(s))\, ds - \eta_{n+1}^*(t_1) - \eta_0.$$

Снова, если множество $X_0(t)$ является произвольным, а $X_1(t)$

есть кривая $(x_1(t), t)$ в R^{n+1}, то условия трансверсальности дают

$$\eta^*(t_1^*)\,q_1 + \eta^*_{n+1}(t_1^*) = 0,$$

где $q_1 = \dot{x}_1(t_1^*)$ есть скорость целевой точки. Соотношение

$$\eta^*_{n+1}(t_1^*) = -\eta^*(t_1^*)\,q_1$$

справедливо, даже когда начальный момент времени t_0 фиксирован и используются управления, принадлежащие классу Δ_{t_0}.

Замечание 3. Рассмотрим управляемый процесс в R^n

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u)$$

с ограниченными измеримыми управлениями $u(t)$, определенными на фиксированном конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$, и удовлетворяющими ограничению $\Omega \subset R^m$. Пусть Δ_T — совокупность всех таких управлений, которые переводят некоторую начальную точку, принадлежащую множеству X_0, в некоторую конечную точку, принадлежащую множеству X_1, с критерием качества

$$C(u) = \int_0^T f^0(x(t), t, u(t))\,dt,$$

как в теореме 2.

Пусть управление $u^*(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ будет оптимальным управлением для этой задачи с закрепленным временем, и пусть $\tilde{x}^*(t)$ будет соответствующим решением расширенной системы. Тогда существует нетривиальное решение $\tilde{\eta}^*(t)$ расширенной сопряженной системы $\tilde{\mathscr{A}}$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ такое, что

$$\tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) = \tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \quad \text{почти всюду.}$$

Рассматривая начальное множество и конечное целевое множество, как подмножества $(X_0, 0)$ и (X_1, T) в R^{n+1}, мы можем игнорировать ограничения времени и заключить, что

$$\tilde{M}(\tilde{\eta}^*(t), \tilde{x}^*(t)) \equiv 0, \ \eta_0^* \leqslant 0 \quad \text{на интервале} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Если X_0 и X_1 суть многообразия в R^n, то выбираем $\tilde{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t), \eta^*_{n+1}(t))$ так, чтобы $\eta^*(t_0^*) \perp X_0$ и $\eta^*(t_1^*) \perp X_1$. Но $\eta^*_{n+1}(0)$ и $\eta^*_{n+1}(T)$ могут не оказаться равными нулю. Тем не менее $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ не обращается в нуль [так как $\tilde{M} \equiv 0$, а $\tilde{\eta}^*(t)$ не равно нулю] и является нетривиальным решением системы

$$(\hat{\mathscr{A}}) \quad \dot{\eta}_0 = 0, \quad \dot{\eta}_j = -\sum_{i=0}^{n} \eta_i \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x^*(t), t, u^*(t)), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Необходимые условия, которые удовлетворяются выбором управления $u^*(t)$ в задаче с закрепленным временем, будут как раз теми, что установлены в теореме 2 [с выражением для $\tilde{M}$, не со-

держащим $\eta^*_{n+1}(0)$, которое может не обращаться в нуль]. Если $X_1=R^n$, то $\eta^*(T)=(0, 0, 0, \ldots, 0)$ и мы можем выбрать $\hat{\eta}^*(T)=(-1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Обратимся теперь к варианту принципа максимума, который имеет место для линейных управляемых процессов с импульсными управлениями. Определения и обозначения остаются теми же, что были введены в разделе 4.2 (см. теорему 7 главы 4).

Рассмотрим линейный импульсный управляемый процесс в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad Dx = A(t)\,x + B(t)\,Du,$$

или

$$x(t) = \Phi(t)\,x_0 + \int_0^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,B(s)\,Du(s)$$

с начальным условием $x(0-)=x_0$ на фиксированном компактном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Управления $u(t)$ являются непрерывными справа m-мерными вектор-функциями ограниченной вариации, каждая из которых определена на некотором открытом интервале в окрестности отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$. Каждое такое управление определяет на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ некоторую меру (Лебега—Стилтьеса) Du, а $x(t)$ является соответствующей траекторией, начинающейся в точке $x(0-)=x_0$. Коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ суть непрерывные матрицы, а $\Phi(t)$ есть фундаментальная матрица решений системы однородных дифференциальных уравнений, удовлетворяющая условию $\Phi(0)=I$. Мы ищем управление $u(t)$ (или соответствующую меру Du), которое переводит точку $x(0-)=x_0$ в предписанную целевую точку $x(T)=x_1$ с минимальным значением критерия качества

$$\|Du\| = \sum_{j=1}^{m} \int_0^T |Du^j| = \sum_{j=1}^{m} |u^j(0) - u^j(0-)| + \operatorname*{var}_{0 \leqslant t \leqslant T} u^j.$$

Линейное пространство $\mathscr{M}$ всех таких векторных мер с указанной выше нормой есть банахово пространство (полное нормированное векторное пространство). Кроме того, пространство $\mathscr{M}$ можно отождествить с дуальным пространством $\mathscr{B}^*$ (пространством всех непрерывных линейных функционалов) банахова пространства $\mathscr{B}$. Здесь $\mathscr{B}$ есть пространство всех непрерывных действительных m-мерных векторных функций $y(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ с нормой

$$\|y(t)\|_\infty = \max_{0 \leqslant t \leqslant T,\ 1 \leqslant j \leqslant m} |y^j(t)|.$$

Указанное отождествление $\mathscr{M}$ и $\mathscr{B}^*$ осуществляется сопоставлением мере $Du \in \mathscr{M}$ функционала

$$Du(y(t)) = \int_0^T y(t)\,Du.$$

Пусть Du_k есть последовательность мер в $\mathscr{M}$ с равномерно ограниченной нормой $\|Du_k\| \leqslant \beta$. Тогда для каждого $y(t) \in \mathscr{B}$ существует последовательность Du_{k_i}, которая слабо сходится к некоторому пределу $D\tilde{u}$ с нормой $\|D\tilde{u}\| \leqslant \beta$, т. е.

$$\lim_{k_i \to \infty} \int_0^T y(t)\, Du_{k_i} = \int_0^T y(t)\, D\tilde{u}.$$

Для $m=1$ этот результат известен как теорема Хелли—Брея.

Если мы ограничимся абсолютно непрерывными управлениями $u(t)$, то $Du = \dot{u}(t)\,dt$ и импульсный управляемый процесс сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с абсолютно непрерывным решением

$$x(t) = \Phi(t)\, x_0 + \int_0^t \Phi(t)\, \Phi^{-1}(s)\, B(s)\, \dot{u}(s)\, ds$$

и критерием качества

$$\|\dot{u}(t)\, dt\| = \int_0^T |\dot{u}(t)|\, dt.$$

Однако внутри этого класса управлений оптимальное управление может не существовать, и поэтому мы вводим более общие импульсные управления.

Мы предполагаем, что процесс $\mathscr{L}$ является вполне управляемым на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е. строки матрицы $\Phi^{-1}(s)\, B(s)$ линейно независимы в $\mathscr{B}$. Это будет в том и только том случае, когда внутренность множества достижимости $K(T)$ непуста. Если матрицы A и B являются постоянными, то обычное условие управляемости

$$\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$$

является необходимым и достаточным условием линейной независимости в $\mathscr{B}$ строк матрицы $\Phi^{-1}(s)\, B(s)$.

Лемма. *Рассмотрим управляемый импульсный процесс в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad Dx = A(t)\, x + B(t)\, Du$$

с начальным условием $x(0-) = x_0$ *и ограничением* $\|Du\| \leqslant \alpha$ *на интервале* $0 \leqslant t \leqslant T$. *Тогда множество достижимости* $K(T, \alpha)$, *соответствующее точке* x_0, *есть компактное выпуклое множество, которое непрерывно изменяется с изменением* $\alpha \geqslant 0$. *Множество* $K(T, \alpha_1)$ *лежит внутри множества* $K(T, \alpha_2)$ *всякий раз, когда* $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2$.

Доказательство. Компактность множества $K(T, \alpha)$ следует из теоремы Хелли—Брея; выпуклость следует из элементарного вычисления вариаций. Так как управление $Du_2(t)$ с нормой

$\|Du_2\| \leqslant \alpha_2$ можно аппроксимировать управлением Du_1 с нормой $\|Du_1\| \leqslant \alpha_1$ (просто считаем, что $Du_1 = Du_2$, за исключением некоторой окрестности точки $t = T$, где мы полагаем $Du_1 = 0$), мы замечаем, что $K(T, \alpha_1) \subset K(T, \alpha_2)$ и множество достижимости $K(T, \alpha)$ непрерывно зависит от $\alpha \geqslant 0$. В самом деле, $K(T, \alpha) - \Phi(T) x_0 = \alpha [K(T, 1) - \Phi(T) x_0]$.

Окончательно, пусть $\alpha_1 < \alpha_2$, и мы берем управление $u_1(t)$ с нормой $\|Du_1\| \leqslant \alpha_1$, приводящее в точку $x_1 \in K(T, \alpha_1)$. Свойство управляемости процесса $\mathscr{L}$ гарантирует существование $n+1$ гладких управлений $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_{n+1}(t)$, для которых

$$\|Dw_k(t)\| < \alpha_2 - \alpha_1,$$

и таких, что управления $u_1(t) + w_k(t)$ приводят к вершинам симплекса с центром в точке x_1, где $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Таким образом, точка x_1 лежит внутри множества достижимости $K(T, \alpha_2)$. Лемма доказана.

Эта лемма гарантирует существование оптимального управления, а также дает формулу для вычисления оптимального значения критерия качества. Эта формула получается максимизацией линейной функции на сферической гиперплоскости $H \subset R^n$. Множество H определяется как совокупность всех n-мерных векторов-строк η, таких, что

$$\|\eta \Phi(T) \Phi^{-1}(t) B(t)\|_\infty = 1.$$

Так как система $\mathscr{L}$ вполне управляема, то каждый единичный вектор или направление в R^n определяет ненулевой вектор $\eta \in H$.

Следствие. *Существует оптимальное управление $u^*(t)$ с минимальным значением критерия качества $\|Du^*\| = \alpha^*$, где*

$$\alpha^* = \max_{\eta \in H} \eta [x_1 - \Phi(T) x_0].$$

Доказательство. Так как $K(T, \alpha)$ является компактным множеством и непрерывно расширяется при $\alpha \geqslant 0$, разрастаясь из единственной точки $\Phi(T) x_0$ и поглощая затем каждую точку x_1, то существует минимальное значение $\alpha = \alpha^*$, для которого $x_1 \in K(T, \alpha)$. Действительно, точка x_1 лежит на границе множества $K(T, \alpha^*)$.

Пусть η^* — вектор внешней нормали к выпуклому множеству $K(T, \alpha^*)$ в точке x_1, нормированный так, что $\eta^* \in H$. Тогда

$$\eta^* x_1 = \max_{x \in K(T, \alpha^*)} \eta^* x = \max_{\|Du\| \leqslant \alpha^*} \eta^* \left[\Phi(T) x_0 + \int_0^T \Phi(T) \Phi^{-1}(t) B(t) Du \right]$$

и, следовательно,

$$\eta^* [x_1 - \Phi(T) x_0] = \max_{\|Du\| \leqslant \alpha^*} \int_0^T \eta^* \Phi(T) \Phi^{-1}(t) B(t) Du.$$

Так как $\mathscr{M}$ есть дуальное пространство для пространства $\mathscr{B}$, этот максимум будет равен

$$\alpha^* \| \eta^* \Phi(T) \Phi^{-1}(t) B(t) \|_\infty = \alpha^*.$$

Следовательно,

$$\alpha^* = \eta^* [x_1 - \Phi(T) x_0]$$

и мы устанавливаем правило: надо взять любую точку x_1 на границе $\partial K(T, \alpha^*)$ множества достижимости и любую внешнюю нормаль $\eta^* \in H$. Тогда значение α^* вычисляется как указано выше.

Выберем теперь любой вектор $\eta \in H$ с началом в точке x_1. Гиперплоскость $\tilde{\pi}$, нормальная к η, есть тогда опорная гиперплоскость в некоторой точке $\tilde{x}$ на границе некоторого множества достижимости $K(T, \tilde{\alpha})$, для которого $0 \leqslant \tilde{\alpha} \leqslant \alpha^*$. Если η есть внешняя нормаль, то

$$\eta [\tilde{x} - \Phi(T) x_0] = \tilde{\alpha}$$

и, следовательно,

$$\eta [x_1 - \Phi(T) x_0] = \tilde{\alpha} < \alpha^*.$$

Если η есть внутренняя нормаль, тогда $-\eta$ есть внешняя нормаль, так что

$$\eta [x_1 - \Phi(T) x_0] = -\tilde{\alpha} \leqslant 0.$$

Таким образом, во всех случаях

$$\eta [x_1 - \Phi(T) x_0] \leqslant \alpha^* = \eta^* [x_1 - \Phi(T) x_0]$$

и формула для нахождения α^* доказана. Следствие доказано.

Мы заключаем, что управление $u^*(t)$, переводящее систему из точки x_0 в точку x_1, является оптимальным тогда и только тогда, когда

$$\| Du^* \| = \max_{\eta \in H} \eta [x_1 - \Phi(T) x_0].$$

Эта формула будет служить в качестве основы для нахождения оптимальных управлений как суммы δ-функций. Но сначала мы покажем, что каждая точка в множестве $K(T, \alpha)$ может быть достигнута при импульсном управлении, которое является линейной комбинацией (самое большее) $n+1$ скалярных δ-функций и норма которого есть α.

Достаточно доказать, что каждая точка в $K(T, 1)$ достижима при помощи управления, являющегося выпуклой комбинацией $n+1$ скалярных δ-функций. Под скалярной δ-функцией $\pm\Delta_k(t-t')$ мы подразумеваем векторную меру, j-я компонента которой соответствует ступенчатой функции

$$u^j(t) = \delta^j_k \cdot \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < t', \\ \pm 1 & \text{при} \quad t \geqslant t', \end{cases}$$

где $0 \leqslant t' \leqslant T$, а δ^j_k есть символ Кронекера. Другими словами, $\Delta_k(t-t')$ имеет вес $+1$ только в k-й компоненте и только в момент $t=t'$ и не имеет весов во всех других случаях.

Пусть теперь $g(t)$ есть управление с ограничением $\| Dg \| \leqslant 1$, такое, что концевая точка $x_g(T)$ соответствующей траектории принадлежит $K(T, 1)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем разбиение конечного отрезка времени

$$(0-)=t_0 < t_1 < \ldots < t_\nu = T$$

такое, что

$$\left| \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(t)B(t)\,Dg(t) - \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} \Phi(T)\Phi^{-1}(t_\sigma)B(t_\sigma)[g(t_{\sigma+1})-g(t_\sigma)] \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим линейную комбинацию скалярных δ-функций

$$\sum_{j=1}^{m} [g^j(t_{\sigma+1})-g^j(t_\sigma)]\,\Delta_j(t-t_\sigma),$$

весами которой служат компоненты вектора $[g(t_{\sigma+1})-g(t_\sigma)]$ в момент $t=t_\sigma$. Составим сумму всех этих импульсов

$$\sum_{\sigma=0}^{\nu} \sum_{j=1}^{m} [g^j(t_{\sigma+1})-g^j(t_\sigma)]\,\Delta_j(t-t_\sigma) = Dg_\Delta(t).$$

Тогда Dg_Δ есть линейная комбинация скалярных δ-функций, и

$$\| Dg_\Delta \| = \sum_{\sigma=0}^{\nu} | g(t_{\sigma+1})-g(t_\sigma) | \leqslant \| Dg \| \leqslant 1.$$

Сумму, определяющую $Dg_\Delta(t)$, можно [при соответствующем выборе знаков у сомножителей $\pm\Delta_j(t-t_\sigma)$] представить в виде:

$$Dg_\Delta(t) = \sum_{\sigma=0}^{\nu} \sum_{j=1}^{m} | g^j(t_{\sigma+1})-g^j(t_\sigma) | (\pm\Delta_j(t-t_\sigma)) + \frac{1-\| Dg_\Delta \|}{2}\Delta_1(t) + \frac{1-\| Dg_\Delta \|}{2}(-\Delta_1(t)).$$

Отсюда в силу предыдущего соотношения следует, что $Dg_\Delta(t)$ есть выпуклая комбинация скалярных δ-функций. Концевая точка траектории $x_\Delta(T)$ аппроксимирует $x_g(T)$, т. е.

$$| x_g(T) - x_\Delta(T) | < \varepsilon.$$

Пусть $\mathscr{D}$ — множество всех точек в $K(T, 1)$, которые достигаются управлениями в виде скалярных δ-функций. Мы показали, что выпуклая оболочка $H(\mathscr{D})$ плотна в $K(T, 1)$. Таким образом,

каждая точка из внутренности $K(T, 1)$ лежит в $H(\mathscr{D})$. Пользуясь стандартными рассуждениями о выпуклой комбинации точек в R^n, мы замечаем, что каждая точка из внутренности $K(T, 1)$ лежит в n-мерном симплексе с вершинами в $\mathscr{D}$. Следовательно, каждая внутренняя точка множества $K(T, 1)$ является достижимой с помощью управлений, являющихся выпуклой комбинацией $n+1$ скалярных δ-функций. Беря соответствующие пределы, легко показать, что каждая граничная точка множества $K(T, 1)$ является достижимой при помощи управлений, являющихся выпуклой комбинацией (самое большее) $n+1$ скалярных δ-функций.

Теорема 3. *Рассмотрим управляемый импульсный процесс в* R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad Dx = A(t)\,x + B(t)\,Du$$

с начальным и конечным состояниями $x(0-) = x_0$ *и* $x(T) = x_1$ *и управлениями* $u(t)$ *ограниченной вариации и с критерием качества* $\|D(u)\|$, *определенными на компактном интервале времени* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть вектор $\eta^* \in H$ *удовлетворяет соотношению*

$$\eta^*[x_1 - \Phi(T)\,x_0] = \max_{\eta \in H} \eta\,[x_1 - \Phi(T)\,x_0]$$

и определяет замкнутое множество моментов времени

$$\Gamma_j = \{t \mid (\eta^*\Phi(T)\,\Phi^{-1}(t)\,B(t))^j = \pm 1\}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Предположим, что управление $u^*(t)$ *с соответствующей мерой*

$$Du^*(t) = c_1\Delta_{k_1}(t - t_1) + \ldots + c_n\Delta_{k_n}(t - t_n),$$

представимой в виде линейной комбинации n *скалярных* δ-*функций, удовлетворяет условиям*:

(a) $u^*(t)$ *переводит точку* x_0 *в точку* x_1, *т. е.*

$$(x_1 - \Phi(T)\,x_0)^j = c_1\delta^j_{k_1}\Phi(T)\,\Phi^{-1}(t_1)\,B(t_1) + \ldots$$
$$\ldots + c_n\delta^j_{k_n}\Phi(T)\,\Phi^{-1}(t_n)\,B(t_n).$$

(b) *Все импульсы для* j-*й компоненты управления* $u^*(t)$ *лежат во множестве* Γ_j, *а знаки действительных коэффициентов* $c_1, \ldots, c_n$ *таковы, что выполняется равенство*

$$\int_0^T \eta^*\Phi(T)\,\Phi^{-1}(t)\,B(t)\,Du^* = |c_1| + \ldots + |c_n|.$$

Тогда $u^*(t)$ *есть оптимальное управление.*

С другой стороны, всегда существует оптимальное управление, представляющее собой такую комбинацию n *скалярных* δ-*функций (с предписанными* η^* *и* Γ_j).

Доказательство. Если управление $u^*(t)$ удовлетворяет гипотезам (a) и (b), то $u^*(t)$ переводит точку x_0 в точку x_1 и достав-

ляет минимум критерию качества $\|Du^*\| = \alpha^* = \eta^*[x_1 - \Phi(T)x_0]$. Это последнее утверждение следует из равенства

$$|c_1| + \ldots + |c_n| = \int_0^T \eta^* \Phi(T)\, \Phi^{-1}(t)\, B(t)\, Du^*.$$

Поэтому $u^*(t)$ есть оптимальное управление. Пусть теперь вектор η^* и множества D_j выбраны, как указано выше. Существует оптимальное управление, переводящее точку x_0 в точку x_1 с минимальным критерием качества α^*. С помощью рассуждений предыдущей теоремы мы можем найти оптимальное управление $\hat{u}(t)$, являющееся линейной комбинацией $n+1$ скалярных δ-функций; в самом деле, $\hat{u}(t)$ есть выпуклая комбинация $n+1$ модифицированных δ-функций, каждая из которых обладает импульсом $\pm\alpha^*$ как раз в одной компоненте [т. е. является импульсным управлением вида $\pm\alpha^*\Delta_k(t-t')$]. Так как точка x_1 лежит на границе множества $K(T, \alpha^*)$, она не может лежать во внутренности n-мерного симплекса, вершины которого соответствуют модифицированным δ-управлениям. Поэтому либо точка x_1 лежит на грани этого симплекса либо симплекс не имеет внутренности и совпадает с гиперплоскостью в R^n; в любом случае точка x_1 может быть достигнута с помощью выпуклой комбинации только n модифицированных δ-функций (и, возможно, управления равного нулю).

Поэтому $\hat{u}(t)$ является оптимальным управлением с мерой $D\hat{u}$, представимой в виде линейной комбинации n-скалярных δ-функций. Импульсы j-й компоненты $D\hat{u}$ должны лежать во множестве Γ_j, в противном случае мы получаем неравенство $\alpha^* = \int_0^T \eta^*\Phi(T)\,\Phi^{-1}(t)\,B(t)\,Du < \|D\hat{u}\| = \alpha^*$, что невозможно. Таким образом, $\hat{u}(t)$ должно быть оптимальным управлением, имеющим указанный в теореме вид. Теорема доказана.

Теперь вычислим импульсное оптимальное управление для того, чтобы проиллюстрировать значение приведенной выше теоремы.

Пример. Рассмотрим импульсный управляемый процесс

$$D^2x = Du$$

или систему на фазовой плоскости

$$Dx^1 = x^2, \quad Dx^2 = Du;$$

мы хотим перевести систему из точки (0, 0) в точку (1, —1) в течение промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ с минимальным значением показателя качества $\|Du\|$. Здесь $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, так

что условие H имеет вид

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |(1-t)\eta_1 + \eta_2| = 1.$$

Для каждой угловой координаты θ мы должны вычислить $c(\theta)(\cos\theta, \sin\theta)$ в H [здесь $c(\theta) > 0$]. Имеем

$$c(\theta) = \min\left\{\frac{1}{|\cos\theta + \sin\theta|}, \frac{1}{|\sin\theta|}\right\}.$$

Тогда значение θ, определяющее вектор η^*, получается максимизированием того из следующих двух выражений

$$(\eta_1, \eta_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{|\cos\theta + \sin\theta|}, \\ \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{|\sin\theta|}, \end{cases}$$

у которого правая часть имеет больший знаменатель. Тщательное изучение этой тригонометрической функции дает единственное соответствующее значение θ^*, у которого $\cos\theta^* = 2/\sqrt{5}$, $\sin\theta^* = -1/\sqrt{5}$, так что вектор $\eta^* = (2, -1)$ определен, притом единственным образом. Тогда множество Γ, на котором $1-2t = \pm 1$, таково:

$$\Gamma = \{t = 0, \ t = 1\}.$$

Поэтому оптимальное управление имеет вид

$$Du^* = c_1\delta(t) + c_2\delta(t-1).$$

Неизвестные коэффициенты c_1 и c_2, для которых

$$\|Du^*\| = \eta^* x_1 = \alpha^* = 3,$$

а управление u^* переводит точку $(0, 0)$ в точку $(1, -1)$, таковы:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -2.$$

Таким образом,

$$Du^* = \delta(t) - 2\delta(t-1).$$

Это единственное оптимальное управление (потому что носитель меры Du^*, соответствующий любому оптимальному управлению, должен быть сосредоточен на множестве Γ и, следовательно, является комбинацией двух скалярных δ-функций).

Заметим, что оптимальная траектория сначала имеет скачок от начала координат до точки $(0, 1)$, потом свободно движется к точке $(1, 1)$ и потом скачком достигает целевой точки $(1, -1)$.

В заключение мы исследуем линейный управляемый процесс с гладкими управлениями, имеющими ограниченную скорость изменения. В такой постановке реально учитывается инерция управляющего механизма и устраняются мгновенные переключения. Анализ приводит к задаче с ограниченными фазовыми коор-

динатами, но такого специального вида, что принцип максимума к ней легко применим. Для того чтобы убедиться, что основные предположения об управляемости явно подтверждаются, мы сосредоточим внимание на автономных линейных процессах. Более общая задача с ограниченными фазовыми координатами также будет обсуждена.

Рассмотрим линейный автономный процесс в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

в котором требуется перейти из начального состояния x_0 в конечное состояние x_1 при помощи некоторого оптимального управления $u^*(t)$ в R^m, определенного для некоторого минимального интервала времени $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Допустимые управления являются абсолютно непрерывными функциями $u(t)$, определенными на различных конечных интервалах времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$, и удовлетворяют следующим ограничениям:

1) $u(t) \subset \Omega$, где Ω есть заданное замкнутое выпуклое множество, содержащее начало координат пространства R^m;

2) функция $v(t) = \dot{u}(t)$ является измеримой и $|v^j(t)| \leqslant 1$ для всех $j = 1, \ldots, m$ почти всюду;

3) $u(0) = u(t_1) = 0$.

Мы можем ввести $(n+m)$-мерный вектор состояния

$$z(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \\ u^1(t) \\ \vdots \\ u^m(t) \end{bmatrix}$$

и записать обобщенный управляемый процесс

$$(\tilde{\mathscr{L}}) \qquad \dot{z} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v.$$

Для процесса $(\tilde{\mathscr{L}})$ мы выберем в качестве начального состояния точку $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, в качестве конечного состояния точку $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и используем измеримые управления $v(t)$, определенные на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$, такие, что

$$|v^j(t)| \leqslant 1 \text{ для всех } j = 1, \ldots, m$$

и для которых соответствующее решение $z(t)$ удовлетворяет фазовым ограничениям $z(t) \subset \begin{pmatrix} R^n \\ \Omega \end{pmatrix}$. Оптимальное управление $u^*(t)$

процесса $\mathscr{L}$ тогда определяет оптимальное управление $v^*(t) = \dot{u}^*(t)$ процесса $\tilde{\mathscr{L}}$, и наоборот. Поэтому ясно, что оптимальное управление $u^*(t)$, определенное на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$, существует для системы $\mathscr{L}$ при условии, что имеется некоторое допустимое управление, переводящее точку x_0 в точку x_1 (см. теорему 4 главы 4).

Мы докажем, что оптимальное управление $u^*(t)$ для системы $\mathscr{L}$, определенное на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$, удовлетворяет по крайней мере одному из условий

$$u^*(t) \in \partial\Omega \quad \text{или} \quad |\dot{u}^{*j}(t)| = 1 \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, m$$

в почти каждый момент времени. Это свойство оптимального управления соответствует импульсно-релейному режиму (pang — bang behavior).

Если процесс $\mathscr{L}$ является управляемым и если множество Ω содержит точку $u = 0$ в качестве своей внутренней точки, то каждую начальную точку x_0, лежащую достаточно близко от начала координат в пространстве R^n, можно перевести в точку $x_1 = 0$ с помощью допустимого управления. Если, кроме того, A есть устойчивая матрица, то из любого начального состояния $x_0 \in R^n$ можно перевести систему $\mathscr{L}$ в начало координат с помощью допустимого управления; следовательно, оптимальное управление во всех этих случаях существует (см. упражнение 8, приведенное ниже). Для того чтобы облегчить применение теоремы 4, мы предположим, что система $\mathscr{L}$ вполне управляема, т. е.

$$\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n.$$

Лемма. *Рассмотрим автономный линейный процесс в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с начальным состоянием x_0 в момент $t = 0$ и абсолютно непрерывными управлениями $u(t)$, определенными на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$, удовлетворяющими ограничениям $u(t) \subset \Omega$ и $|\dot{u}^j(t)| \leqslant 1$, и такими, что $u(0) = u(t_1) = 0$, как было выше указано. Тогда множество $K(t_1)$ достижимых концевых точек $x(t_1)$ есть компактное выпуклое множество в R^n.

Кроме того, управление $\bar{u}(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ является экстремальным, т. е. траектория $\bar{x}(t)$ заканчивается в точке $\bar{x}(t_1) \in \partial K(t_1)$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет принципу максимума

$$\int_0^{t_1} \bar{\eta}(s) B\bar{u}(s)\,ds = \max \int_0^{t_1} \bar{\eta}(s) Bu(s)\,ds.$$

Здесь максимум берется по всем допустимым управлениям $u(t)$,

определенным на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$, *удовлетворяющим указанным выше ограничениям, а* $\bar{\eta}(t)$ *есть некоторое нетривиальное решение сопряженной системы*

$$(\mathcal{A}) \qquad \dot{\eta} = -\eta A.$$

Доказательство. Доказательство выпуклости множества достижимости $K(t_1)$ проводится так же, как в теории линейных процессов в главе 2. Компактность множества $K(t_1)$ можно доказать, выбирая подпоследовательность управлений $u(t)$, с соответствующими производными $\dot{u}(t) = v(t)$, слабо сходящимися к некоторому пределу $\hat{v}(t)$. Легко проверить, что управление $\hat{u}(t) = \int\limits_0^t \hat{v}(s)\,ds$ является допустимым управлением, которое переводит x_0 в желаемую точку множества $\overline{K(t_1)}$. Проведение доказательства во всех деталях предоставляется читателю в качестве упражнения.

Доказательство принципа максимума является в точности таким же, каким оно было в главе 2. Как обычно, $\bar{\eta}(t_1)$ есть единичный вектор внешней нормали к выпуклому множеству $K(t_1)$ в граничной точке $\bar{x}(t_1)$. Теорема доказана.

Мы теперь предположим, что процесс $\mathcal{L}$ является нормальным для стандартного m-мерного куба, т. е.

$$\det |Bv,\ ABv,\ A^2Bv,\ \ldots,\ A^{n-1}Bv| \neq 0$$

для каждого m-мерного вектора v, направленного вдоль одной из координатных осей в R^m (для всех ребер v стандартного m-мерного куба). Мы говорим, что процесс $\mathcal{L}$ является *куб-нормальным* и отсылаем читателя к дискуссии о свойстве нормальности в главе 2, где показано, что это предположение означает полную управляемость процесса $\mathcal{L}$. Легко также показать, что для куб-нормального процесса $\mathcal{L}$ каждая компонента вектора $\eta_0 e^{-At}B$, для каждого $\eta_0 \neq 0$, обращается в нуль только на дискретном множестве моментов времени.

Теорема 4. *Рассмотрим куб-нормальный автономный процесс в* R^n:

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с начальным состоянием x_0 *в момент* $t = 0$ *и конечным состоянием* x_1. *Управления суть абсолютно непрерывные функции* $u(t)$, *определенные на различных конечных интервалах времени* $0 \leqslant t \leqslant t_1$, *переводящие решение* $x(t)$ *из точки* $x(0) = x_0$ *в точку* $x(t_1) = x_1$ *и удовлетворяющие следующим ограничениям:*

1) $u(t) \subset \Omega$, *где* Ω — *замкнутое выпуклое множество, содержащее начало координат пространства* R^m;

2) $|\dot{u}^j(t)| \leqslant 1$ *для всех* $j=1, \ldots, m$ *почти всюду;*

3) $u(0)=u(t_1)=0$.

Если управление $u^*(t)$ *на интервале* $0 \leqslant t \leqslant t^*$ *является оптимальным по быстродействию, то или* $u^*(t) \in \partial\Omega$, *или* $|\dot{u}^{j*}(t)|=1$ *для всех* $j=1, \ldots, m$ *в почти каждый момент времени.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что имеется подынтервал $\mathcal{I}$ интервала $0 \leqslant t \leqslant t^*$, для которого управление $u^*(t)$ лежит во внутренности множества Ω и, пусть, например, $|\dot{u}^{1*}(t)|<1$ на некотором подмножестве положительной меры. Пусть $\eta^*(t)=\eta_0^* e^{-At}$ будет нетривиальным решением сопряженной системы, так что

$$\int_0^{t^*} \eta_0^* e^{-At} B u^*(t)\, dt = \max \int_0^{t^*} \eta_0^* e^{-At} B u(t)\, dt,$$

как в предыдущей лемме. Так как процесс $\mathscr{L}$ является куб-нормальным, то первая компонента $\zeta(t)$ вектора $\eta_0^* e^{-At} B$ не обращается в нуль на интервале $\mathcal{I}$ (или на его подынтервале, который также обозначим через $\mathcal{I}$). Мы определим новое допустимое управление $\hat{u}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$, такое, что

$$\hat{u}^j(t)=u^{j*}(t) \quad \text{для} \quad j=2, 3, \ldots, m \quad \text{на интервале} \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$
$$\hat{u}^1(t)=u^{1*}(t) \ \text{вне}\ \mathcal{I}.$$

Тогда

$$\int_{\mathcal{I}} \zeta(t) u^{1*}(t)\, dt < \int_{\mathcal{I}} \zeta(t) \hat{u}^1(t) dt.$$

Таким образом, факт существования управления $\hat{u}(t)$ противоречит принципу максимума, которому удовлетворяет управление $u^*(t)$, и отсюда будет следовать необходимая нам теорема.

Достаточно рассмотреть случай, когда $\zeta(t)>0$ на $\mathcal{I}$: $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и начальная точка t_0 отрезка $\mathcal{I}$ является точкой положительной метрической плотности для множества, где $|\dot{u}^{1*}(t)|<1-\varepsilon$ при некотором фиксированном $\varepsilon>0$. Тогда график функции $u^{1*}(t)$ при $t \in \mathcal{I}$ лежит внутри сектора, ограниченного линиями с угловыми коэффициентами $\pm(1-\varepsilon/2)$, по крайней мере, если отрезок $\mathcal{I}$ достаточно короток. Теперь определим управление $\hat{u}^{1*}(t)=u^{1*}(t_0)+$ $+t-t_0$ на небольшом отрезке времени и затем продолжим $\hat{u}^1(t)$ линейной функцией с угловым коэффициентом -1 до тех пор, пока график этой прямой не пересечется с графиком функции $u^{1*}(t)$. Подобным образом мы построим непрерывную и кусочно-линейную действительную функцию $\hat{u}^1(t)$ на подынтервале $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$, такую, что $\hat{u}^1(t) \geqslant u^{1*}(t)$, причем равенство будет иметь место только в концевых точках интервала $\mathcal{I}_1$. Будем иметь

$$\int_{\mathcal{I}_1} \zeta(t)(\hat{u}^1(t)-u^{1*}(t))\, dt > 0.$$

Положим $\hat{u}^1(t) = u^{1*}(t)$ вне $\mathcal{J}_1$. Тогда $\hat{u}(t)$ будет допустимым управлением, которое обладает желаемым свойством, именно,

$$\int_0^{t^*} \eta_0^* e^{-At} B u^*(t)\,dt < \int_0^{t^*} \eta_0^* e^{-At} B \hat{u}(t)\,dt.$$

Это противоречие доказывает теорему.

Нелегко решить, на каких подынтервалах интервала $0 \leqslant t \leqslant t^*$ имеет место равенство $|\dot{u}^{j*}(t)| = 1$, а на каких $u^*(t) \in \partial\Omega$. Теория синтеза оптимального управления должна еще развиваться, как в вычислительном, так и в геометрическом плане.

Мы заключим этот раздел обсуждением общего процесса с ограниченными фазовыми координатами. Рассмотрим управляемый процесс

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) \text{ в } R^n.$$

Здесь начальная точка x_0 переводится в точку x_1 при помощи некоторого измеримого управления $u(t) \subset \Omega$ на некотором интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Ограничивающее множество Ω является компактным в R^m, а интегральный критерий качества имеет вид

$$C(u) = \int_0^{t_1} f^0(x(t), u(t))\,dt,$$

где $f(x, u)$ и $f^0(x, u)$ — функции класса C^1 в $R^n \times \Omega$. При этих условиях оптимальное управление $u^*(t)$ с соответствующим ему решением $x^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$ удовлетворяет принципу максимума почти всюду

$$\hat{H}(\hat{\eta}^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} \hat{H}(\hat{\eta}^*(t), x^*(t), u) \equiv 0.$$

Здесь функция Гамильтона имеет вид

$$\hat{H}(\hat{\eta}, x, u) = \sum_{\alpha=0}^{n} \eta_\alpha f^\alpha(x, u),$$

а $\hat{\eta}^*(t) = (\eta_0^*, \eta^*(t))$ есть нетривиальное решение системы

$$\dot{\eta}_0 = 0, \quad \eta_0 \leqslant 0,$$

$$\dot{\eta}_i = -\sum_{\alpha=0}^{n} \eta_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(x^*(t), u^*(t)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Предположим далее, что фазовый вектор x должен находиться в замкнутом подмножестве $\Lambda \subset R^n$ вместе со своими начальным и конечным значениями x_0 и x_1. Задача оптимального управления

($\mathcal{S}$, C, x_0, x_1, Ω, Λ) называется процессом с ограниченными фазовыми координатами. Первоначальная оптимальная траектория $x^*(t)$ может не лежать в Λ и в этом случае мы ищем новое оптимальное управление для этого подчиненного ограничениям процесса.

Напомним, что проблема существования оптимальных управлений для процессов с ограниченными фазовыми координатами обсуждалась в главе 4 (теорема 4 и вытекающие из нее следствия). Здесь мы обсудим соответствующие модификации принципа максимума, которые возникают в процессах с ограниченными фазовыми координатами. Наиболее сильные результаты относятся к случаям, где $\mathcal{S}$ есть линейный процесс (или выпуклый по u), и мы установим эти результаты позже. Мы дадим общее представление о принципе максимума для процессов с ограниченными фазовыми координатами.

Предположим, что $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$ есть оптимальное управление, с соответствующей траекторией $x^*(t) \subset \Lambda$, соединяющей фазовые точки x_0 и x_1, лежащие внутри Λ. Предположим, что интервал $0 \leqslant t \leqslant t^*$ можно разбить на подынтервалы $0 = t_0 < t_1 \leqslant \leqslant t_2 < t_3 \leqslant t_4 < \ldots < t_{2k+1} = t^*$ так, что

$$x^*(t) \subset \text{внутренность } \Lambda \text{ при } t_i < t < t_{i+1} \text{ для четного } i;$$
$$x^*(t) \subset \text{граница } \Lambda \text{ при } t_i < t < t_{i+1} \text{ для нечетного } i.$$

Тогда на каждом внутреннем сегменте (при четном i) траектория $x^*(t)$ соединяет точку $x^*(t_i)$ с точкой $x^*(t_{i+1})$ без фазовых ограничений (кроме ограничений в концевых точках, которые не учитываются в обычном принципе максимума); обычный принцип максимума может быть применен так, как было описано выше. Мы обсудим только модифицированный принцип максимума, который относится к граничным сегментам (при нечетном i). Конечно, это все еще оставляет нерешенной задачу определения концевых точек разбиения отрезка времени, даже в предположении, что оптимальное решение имеет этот простой тип пересечения с границами подмножества Λ.

Рассмотрим оптимальное решение $x^*(t)$ на граничном сегменте, например, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Предположим, что граница подмножества Λ в пространстве R^n есть гладкая гиперповерхность (подмногообразие класса C^∞ размерности $n-1$ в R^n) и пусть $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1})$ есть локальные координаты на границе $\partial\Lambda$, определенные на открытом множестве $\mathcal{O}$ из $\partial\Lambda$, содержащем кривую $x^*(t) = (\xi^{*1}(t), \ldots \ldots, \xi^{*n-1}(t))$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$. Систему дифференциальных уравнений $\mathcal{S}$ можно теперь записать в виде $\dot{\xi} = \check{f}(\xi, u)$ в $\mathcal{O}$, по крайней мере, для управлений $u(t)$, которым соответствует решение, лежащее в $\mathcal{O}$. Параметризуем переменную управления u, которая описывает движения в $\mathcal{O}$ с помощью точек компактного множества $W \subset R^s$; пусть $u(\xi, w)$ есть функция класса C^1, определенная на прямом произведении $\mathcal{O} \times W$ в Ω, такая, что $\check{f}(\xi, u(\xi, w))$ есть касатель-

ная к $\partial\Lambda$. Таким образом, мы пришли к задаче оптимального управления для системы

$$(\check{\mathcal{S}}) \qquad \dot{\xi} = \check{f}(\xi,\ u(\xi,\ w)) = \varphi(\xi,\ w)$$

с измеримыми управлениями $w(t) \subset W$, определенными на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и переводящими фазовую точку $\xi^*(t_1)$ в точку $\xi^*(t_2)$ в открытом множестве $\mathfrak{G}$. Интегральный критерий качества интерпретируется подобным же образом:

$$\check{C}(w) = \int_{t_1}^{t_2} \check{f}^0(\xi(t),\ w(t))\,dt,$$

и мы предполагаем, что управление $u^*(t)$ лежит в компактном множестве $u(\xi^*(t),\ W)$ для каждого t из интервала $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Тогда из леммы 3А дополнения к главе 2 следует, что имеется такое управление $w^*(t) \subset W$, что $u(\xi^*(t),\ w^*(t)) = u^*(t) \subset \Omega$. Кроме того, $w^*(t)$ есть оптимальное управление, так как каждое $w(t) \subset W$ [с траекторией $\xi(t) \subset \mathfrak{G}$] дает соответствующее управление $u(t) \subset \Omega$, которому соответствует та же самая траектория в $\mathfrak{G}$. Поэтому управление $w^*(t)$ удовлетворяет принципу максимума для процесса $\check{\mathcal{S}}$:

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \zeta_\alpha^*(t)\,\check{f}^\alpha(\xi^*(t),\ u(\xi^*(t),\ w^*(t))) =$$
$$= \max_{w \in W} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \zeta_\alpha^*(t)\,\check{f}^\alpha(\xi^*(t),\ u(\xi^*(t),\ w)) \equiv 0,$$

где $\zeta_\alpha^*(t)$ есть нетривиальное решение системы

$$\dot{\zeta}_0 = 0 \qquad (\zeta_0 \leqslant 0),$$
$$\dot{\zeta}_i = -\sum_{\alpha=0}^{n-1} \zeta_\alpha \left[\frac{\partial \check{f}_\alpha}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \check{f}^\alpha}{\partial u^j}\frac{\partial u^j}{\partial \xi^i}\right], \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Подобным образом мы получаем принцип максимума, которому удовлетворяют оптимальное управление $u^*(t)$ на каждом внутреннем интервале и соответствующее управление $w^*(t)$ на каждом граничном интервале подразбиения отрезка $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Более подробные условия будут сформулированы ниже для линейных процессов.

Упражнения

1. Установить и доказать принцип максимума, теорему 1 для критерия качества

$$C(u) = g(x(t_1)) + \int_0^{t_1} f^0(x(t),\ u(t)\ \ dt,$$

где $g \in C^2$ и $f^0 \in C^1$.

[Указание:

$$C(u)=\int_0^{t_1}[f^0+(\partial g/\partial x)\,f]\,dt+g(x_0)].$$

2. Пусть совокупность управлений $\mathcal{M}$, состоящая из ограниченных измеримых управлений $u(t)$, определенных на различных конечных интервалах времени $0\leqslant t\leqslant t_1$, с ограничивающим множеством Ω, удовлетворяет требованиям:

(a) $\mathcal{M}$ содержит все постоянные функции;

(b) $\mathcal{M}$ содержит «результат сварки» (splice) любых двух управлений из $\mathcal{M}$, т. е. если управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, определенные на интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, принадлежат $\mathcal{M}$, то управление

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t) & \text{на}\quad 0\leqslant t\leqslant \tau,\\ u_2(t) & \text{на}\quad \tau\leqslant t\leqslant t_1,\end{cases}$$

также лежит в $\mathcal{M}$.

Доказать, что оптимальное управление из семейства $\mathcal{M}$ должно удовлетворять принципу максимума, теореме 1. Проверить, что множество всех кусочно-непрерывных управлений образует допустимое семейство $\mathcal{M}$.

3. Пусть ограничивающее множество $\Omega(t)$ является замыканием ограниченного открытого множества в пространстве R^m, и пусть $\Omega(t)$ непрерывно изменяется при изменении t. Установить и доказать принцип максимума, теорему 1, для соответствующей задачи управления.

4. В единичном кубе C: $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x^i|\leqslant 1$ рассмотрим пересекающиеся в общем положении линейные пространства

$$\pi_1:\ x^{k+1}=0,\ \ldots,\ x^n=0,$$
$$\pi_2:\ x^1\ \ =0,\ \ldots,\ x^k=0.$$

Пусть h_1 есть непрерывное отображение k-мерной плоскости π_1 в пространство R^n, и пусть h_2 есть непрерывное отображение $(n-k)$-мерной плоскости π_2 в пространство R^n, такие, что

$$|h_1(x_1)-x_1|<\frac{1}{4}\quad\text{и}\quad |h_2(x_2)-x_2|<\frac{1}{4},$$

когда точки $x_1=(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ и $x_2=(0,\ \ldots,\ 0,\ x^{k+1},\ \ldots,\ x^n)$ лежат в C. Доказать, что множества $h_1(\pi_1)$ и $h_2(\pi_2)$ пересекаются в C, и использовать этот топологический результат для того, чтобы завершить заключительную часть доказательства условий трансверсальности в теореме 1. [Указание: каждой точке $x=(x_1,\ x_2)$ куба C сопоставить вектор $v(x)=x_1+(h_1(x_1)-x_1)-x_2-(h_2(x_2)-x_2)$; таким образом, $v(x)=0$ при $h_1(x_1)=h_2(x_2)$, что имеет место при $x\in h_1(\pi_1)\cap h_2(\pi_2)$. Но векторное поле $v(x)$ на границе куба ∂C можно деформировать в векторное поле $v_0(x)$, соответствующее случаю, когда отображение $h=(h_1,\ h_2)$ является тождественным. Следовательно, индекс поля $v(x)$ на ∂C является таким, как у поля $v_0(x)$ и, как можно непосредственно подсчитать, не равен нулю. Так как $v(x)$ есть непрерывное векторное поле в C и индекс поля $v(x)$ на ∂C не равен нулю, то существует точка $\bar{x}$ в C, где $v(\bar{x})=0$].

Для другого доказательства смотрите замечания к библиографии дополнения В.

5. Рассмотрим импульсный управляемый процесс в R^2, описываемый уравнением

$$D^2x=Du\quad\text{при}\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Вычислить оптимальное управление, переводящее начало координат $(x=0,$

$\dot{x}=0$) в точку ($x=1$, $\dot{x}=1$) при минимальном значении критерия качества $\| Du \|$.

6. Рассмотрим управляемый линейный процесс в R^n;

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)\,x+B\,(t)\,u,$$

с существенно ограниченными измеримыми управлениями $u\,(t)$, определенными на интервале $0\leqslant t\leqslant T$ в R^n, для которых

$$\operatorname*{ess}_{0\leqslant t\leqslant T}\ \sup_{1\leqslant j\leqslant m} |u^j(t)|\leqslant\alpha.$$

Фазовая точка из состояния x_0 переводится под действием управлений в некоторые конечные состояния, заполняющие множество $K\,(T,\ \alpha)$ достижимости. Доказать результаты, аналогичные полученным в лемме предшествующей теореме 3 о том, что множество $K\,(T,\ \alpha_1)$ лежит во внутренности множества $K\,(T,\ \alpha_2)$ всякий раз, когда $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2$ и что $K\,(T,\ \alpha)$ есть компактное выпуклое множество, непрерывно меняющееся при $\alpha>0$.

7. Для m-мерной вектор-функции $u\,(t)$ с ограниченной вариацией на интервале $0\leqslant t\leqslant T$ определить STV_p-норму (норма, определяющаяся сильной полной вариацией порядка p $(1<p<\infty)$), полагая

$$\| Du \|_p=\sup\sum_{\alpha=0}^{k}\| u\,(t'_{\alpha+1})-u\,(t'_\alpha)\|_p,$$

где $t'_0=0-$, $t'_1=0<t'_2<\ldots<t'_k$ есть произвольное конечное множество точек в $0\leqslant t\leqslant T$, и супремум вычисляется по всем таким конечным последовательностям времен. Для постоянного вектора p-норма имеет такой вид: $\| u \|_p=\left[\sum\limits_{j=1}^{m}|u^j|^p\right]^{1/p}$. Линейное пространство всех векторных мер Du с STV_p-нормой есть тогда дуальное пространство к пространству $\mathscr{B}_q$. Здесь $\mathscr{B}_q$ есть пространство всех действительных непрерывных m-мерных векторных функций $y\,(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ с нормой $|||\,y\,(t)\,|||_q=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|y\,(t)\,\|_q$, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Используя эти обозначения, сформулировать и доказать аналог теоремы 3, где критерий качества есть $\| Du \|_p$.

8. Рассмотрим автономный линейный процесс в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu,$$

с ограничениями $|u^j(t)|\leqslant 1$ и $|\dot{u}^j\,(t)|\leqslant 1$ и абсолютно непрерывными управлениями $u\,(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, как в теореме 4. В предположении, что $\mathscr{L}$ есть куб-нормальный процесс, доказать, что процесс $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости и, кроме того, что существует окрестность N точки $x_1=0$ в пространстве R^n, такая, что каждая фазовая точка $x_0\in N$ может быть переведена в точку $x_1=0$ с помощью управления $u\,(t)$ из класса C^1, удовлетворяющего ограничениям, у которого $\dot{u}\,(t)\equiv 0$ для значений t, близких к 0, и для значений t, близких к 1.

9. Рассмотрим автономный линейный процесс в R^1: $\dot{x}=-x+u$, с ограничениями $|u|\leqslant 1$ и $|\dot{u}\,(t)|\leqslant 1$ для скалярных абсолютно непрерывных управлений, принимающих нулевое значение $u\,(0)=u\,(t_1)=0$ на концах. Вычислить оптимальное управление $u^*\,(t)$, переводящее точку $x_0=10$ в точку $x_1=0$ за минимальное время $t^*>0$.

10. Рассмотрим управляемый процесс класса C^1 в пространстве R^n:

$$\dot{x}=A\,(x)+B\,(x)\,u,$$

с критерием качества

$$C(u) = \int_0^T [A^0(x) + B^0(x)u]\,dt$$

измеримыми управлениями $u(t) \subset \Omega \subset R^m$, определенными на интервале $\leqslant t \leqslant T$. Предположим, что Ω есть компактное выпуклое тело и что матрица

$$\hat{B}(x) = \begin{bmatrix} B(x) \\ B^0(x) \end{bmatrix}$$

имеет ранг $(n+1)$ всюду. Показать, что оптимальное управление $u^*(t)$ лежит почти всегда на границе $\partial\Omega$.

11. Рассмотрим управляемый процесс класса C^1 в R^2:

$$\dot{x} = A(x) + Bu,$$

с постоянной $(2 \times m)$-матрицей B и измеримыми управлениями $u(t)$, принимающими значения в выпуклом полиэдре $\Omega \subset R^m$. Предположим, что векторы

$$Bw \quad \text{и} \quad \frac{\partial A}{\partial x}(x)\,Bw$$

являются независимыми для каждого $x \in R^2$ и для каждого вектора $w \neq 0$ параллельного ребру Ω (или самому Ω, если Ω есть сегмент). Тогда оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ почти всегда принимает значения в вершинах Ω. [Указание: если управление $u^*(t)$ не лежит в вершинах Ω, то $\eta^*(t)\,Bw = 0$ для положительного отрезка времени, где $\eta^*(t)$ есть принадлежащее классу C^1 решение сопряженной системы; $w \neq 0$—вектор, параллельный ребру Ω. Тогда $\dot{\eta}^*(t)\,Bw = -\eta^* \frac{\partial A}{\partial x} Bw = 0$, что вместе с $\eta^* Bw = 0$ дает $\eta^* = 0$.]

12. Рассмотрим управляемый процесс класса C^1 в R^n, описываемый уравнением

$$x^{(n)} - f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) = u,$$

с измеримыми управлениями, удовлетворяющими условию $|u(t)| \leqslant 1$. Тогда оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ удовлетворяет условию $|u^*(t)| = 1$ и вектор-функция $u^*(t)$ имеет только счетное число разрывов (после переопределения $u^*(t)$ на множестве меры нуль). Следовательно, $u^*(t)$ есть *обобщенное релейное* (bang—bang) *управление*. [Указание: $\eta_n^*(t)\,u^*(t) = |\eta_n^*(t)|$ для всех $0 \leqslant t \leqslant t^*$, где $\eta^*(t)$ есть принадлежащее классу C^1, не обращающееся в нуль решение сопряженной системы. Если функция $\eta_n^*(t)$ имеет несчетное число нулей, множество таких нулей содержит совершенное подмножество Σ на оси времени. Изучая специальный вид сопряженной системы дифференциальных уравнений, легко показать, что $\eta^*(t) = 0$ на множестве Σ, что невозможно.]

5.2. Достаточные условия оптимальности управления

В главе 2 было показано, что принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности управления для некоторых линейных процессов. Мы здесь докажем подобный результат для процессов, в которых качество управления оценивается с помощью некоторой выпуклой функции.

Рассмотрим управляемый процесс в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + h(u,\ t),$$

с начальным состоянием $x(t_0) = x_0$ и замкнутым выпуклым целевым множеством $G \subset R^n$ (возможно, $G = R^n$). Критерием качества управления $u(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ является функционал

$$C(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(x(t),\ t) + h^0(u(t),\ t)]\,dt \quad \text{или} \quad C(u) = x^0(T),$$

где функция $x^0(t)$ задается скалярным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}^0 = f^0(x,\ t) + h^0(u,\ t), \quad x^0(t_0) = 0.$$

Коэффициенты f^0, $\dfrac{\partial f^0}{\partial x}$, h^0, A и h предполагаются непрерывными по всем переменным $(x,\ t,\ u)$ в пространстве R^{n+1+m}.

Допустимые управления $u(t)$ являются ограниченными измеримыми m-мерными векторными функциями на фиксированном конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, переводящими фазовую точку $x(t_0) = x_0$ в некоторую точку целевого множества G, и принадлежат некоторому непустому ограничивающему множеству $\Omega \subset R^m$. Линейность главной части уравнения $\mathscr{S}$ гарантирует существование решения $\hat{x}(t) = (x^0(t),\ x(t))$ на всем интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Мы далее предполагаем, что $f^0(x,\ t)$ является выпуклой функцией x для каждого фиксированного t из интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$, т. е.

$$\frac{\partial f^0}{\partial x}(x,\ t)(\omega - x) \leqslant f^0(\omega,\ t) - f^0(x,\ t)$$

для всех концевых точек ω и x в R^n.

Теорема 5. *Рассмотрим управляемый процесс в R^n:*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = A(t)\,x + h(u,\ t),$$

с начальным состоянием x_0 и замкнутым выпуклым целевым множеством $G \subset R^n$. Критерий качества $C(u) = x^0(T)$ допустимого управления $u(t)$, определенного на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и принимающего значения из ограничивающего множества $\Omega \subset R^m$, задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}^0 = f^0(x,\ t) + h^0(u,\ t), \quad x^0(t_0) = 0.$$

Коэффициенты f^0, $\dfrac{\partial f^0}{\partial x}$, h^0, A, h всюду непрерывны, а $f^0(x,\ t)$ есть выпуклая по x функция для каждого фиксированного t из конечного интервала $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Предположим, что $u^*(t)$ есть управление с соответствующей траекторией $\hat{x}^*(t) = (x^{0*}(t),\ x^*(t))$, удовлетворяющее принципу максимума:

$$-h^0(u^*(t),\ t)+\eta(t)\,h(u^*(t),\ t)=\max_{u\in\Omega}\,[-h^0(u,\ t)+\eta(t)\,h(u,\ t)]$$

для почти всех t. Здесь $\eta(t)$ есть нетривиальное решение уравнения

$$\dot{\eta}=\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t),\ t)-\eta A(t),$$

удовлетворяющее условию трансверсальности, именно:

$\eta(T)$ есть внутренняя нормаль целевого множества G в граничной точке $x^*(T)$. (Если $G=R^n$, то $\eta(T)=0$; если $G=x_1$ есть единственная точка, условие трансверсальности отсутствует).

Тогда $u^*(t)$ является оптимальным управлением, доставляющим минимум критерию качества

$$C(u^*)=x^{0*}(T).$$

Доказательство. Пусть вектор-функции $u^*(t)$, $\hat{x}^*(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют принципу максимума и условиям трансверсальности, и пусть $u(t)$ — любое допустимое управление с соответствующим решением $\hat{x}(t)=(x^0(t),\ x(t))$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$. Мы вначале докажем основное неравенство $-x^{0*}(T)+\eta(T)\,x^*(T)\geqslant -x^0(T)+\eta(T)\,x(T)$.

Вычислим производную

$$\frac{d}{dt}[-x^0(t)+\eta(t)\,x(t)]=-\dot{x}^0(t)+\dot{\eta}(t)\,x(t)+\eta(t)\,\dot{x}(t).$$

Используя систему дифференциальных уравнений для $\dot{x}^0$ и $\dot{x}(t)$, интегрированием по основному интервалу $t_0\leqslant t\leqslant T$ получаем

$$-x^0(T)+\eta(T)\,x(T)-\eta(t_0)\,x_0=$$
$$=\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\partial f^0(x^*,\ t)}{\partial x}x-f^0(x,\ t)-h^0(u,\ t)+\eta h(u,\ t)\right]dt.$$

Далее, применяя эту формулу к управлению $u^*(t)$ с решением $\hat{x}^*(t)$ и вычитая одно равенство из другого, получаем

$$[-x^{0*}(T)+\eta(T)\,x^*(T)]-[-x^0(T)+\eta(T)\,x(T)]=$$
$$=\int_{t_0}^{T}\Big\{[-h^0(u^*,\ t)+\eta h(u^*,\ t)]-[-(h^0(u,\ t)+\eta h(u,\ t)]+$$
$$+f^0(x,\ t)-f^0(x^*,\ t)+\frac{\partial f^0(x^*,\ t)}{\partial x}(x^*-x)\Big\}\,dt.$$

Но подынтегральное выражение почти всюду положительно вследствие предположения о выполнении принципа максимума для

$u^*(t)$ и выпуклости функции $f^0(x, t)$. Отсюда следует справедливость написанного выше неравенства. Если $G=R^n$, то из условий трансверсальности следует, что $\eta(T)=0$, и, следовательно,

$$-x^{0*}(T) \geqslant -x^0(T)$$

или $C(u^*) \leqslant C(u)$, для каждого допустимого управления $u(t)$. Следовательно, управление $u^*(t)$ в этом случае является оптимальным.

Пусть теперь G есть замкнутое выпуклое множество в R^n и пусть π — опорная плоскость к G в точке $x^*(T)$; по условию, $\eta(T)$ — вектор, ортогональный к π и направленный в полупространство, содержащее G [не исключено, что $\eta(T)=0$]. Тогда

$$x^0(T)-x^{0*}(T) \geqslant \eta(T)(x(T)-x^*(T)).$$

Но точка $x(T)$ лежит в G и, следовательно, $x(T)$ лежит по одну сторону от опорной плоскости π с вектором $\eta(T)$, так что $\eta(T)(x(T)-x^*(T)) \geqslant 0$. Таким образом,

$$x^{0*}(T) \leqslant x^0(T)$$

и $u^*(t)$ есть оптимальное управление. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим управляемый процесс в пространстве R^n:*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=A(t)x+h(u, t),$$

с начальным состоянием x_0, целевым множеством $G=R^n$ и критерием качества

$$C(u)=g(x(T))+x^0(T),$$

где $g(x)$ есть дифференцируемая выпуклая функция, а $x^0(T)$ определяется как в теореме. Пусть управление $u^*(t)$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяет принципу максимума, как в теореме, и условиям трансверсальности

$$\eta(T)=-\operatorname{grad} g(x^*(T)).$$

Тогда $u^*(t)$ есть оптимальное управление.

Доказательство. Основное неравенство, связывающее управление $u^*(t)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(t)$ с любым другим допустимым управлением, получено раньше:

$$-x^{0*}(T)+\eta(T)x^*(T) \geqslant -x^0(T)+\eta(T)x(T).$$

Пользуясь условиями трансверсальности, мы заключаем, что

$$-x^{0*}(T)-\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(T))x^*(T) \geqslant -x^0(T)-\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(T))x(T)$$

и

$$-x^{0*}-g(x^*)+g(x^*)-\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)x^* \geqslant -x^0-g(x)+g(x)-\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)x.$$

Но выпуклость функции g гарантирует, что

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)(x-x^*)\leqslant g(x)-g(x^*).$$

Поэтому

$$x_0^*+g(x^*)\leqslant x^0+g(x)$$

и $u^*(t)$ есть оптимальное управление. Следствие доказано.

Нижеследующий результат дает достаточные условия отимальности управления в линейных процессах с ограниченными фазовыми координатами. Рассмотрим линейный процесс в R^n:

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=A(t)\,x+B(t)\,u,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — действительные непрерывные матрицы, определенные на R^1, начальное состояние $x(t_0)=x_0$ и компактное целевое множество G лежат во внутренности замкнутого выпуклого множества $\Lambda\subset R^n$, определяемого заданными ограничениями на фазовые координаты. Допустимыми управлениями являются все измеримые m-мерные векторы $u(t)$, определенные на различных конечных интервалах времени $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ и принимающие значения из заданного компактного выпуклого множества $\Omega\subset R^m$, которым соответствуют траектории $x(t)$, лежащие в Λ. Мы ищем оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t^*$, переводящее x_0 в целевое множество G внутри Λ.

Если существует допустимое управление, переводящее точку x_0 в множество G, лежащее внутри Λ, то существует оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t^*$. Это утверждение следует из общей теоремы существования, доказанной в главе 4. В самом деле, пусть $K_\Lambda(t_1)$ есть множество достижимости, состоящее из всех концевых точек $x(t_1)$ траекторий, начинающихся в точке $x(t_0)=x_0$, которые соответствуют допустимым управлениям $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Тогда легко показать, что $K_\Lambda(t_1)$ есть компактное выпуклое множество, и если точка P_1 лежит во внутренности множества $K_\Lambda(t_1)$, то P_1 также лежит во внутренности множества $K_\Lambda(t)$ для всех t, достаточно близких к t_1. Из этого замечания мы заключаем, что оптимальная траектория $x^*(t)$ должна привести к точке $x^*(t^*)$, которая лежит на границах обоих множеств $K_\Lambda(t^*)$ и G в R^n.

Мы говорим, что управлению $u(t)$ на $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ соответствует траектория $x(t)$, которая пересекает *границу множества* Λ *на интервалах* в случае, когда существует конечное разбиение отрезка

$$t_0=\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_r=t_1,$$

такое, что при t, принадлежащем любому из замкнутых интервалов $[\tau_{k-1},\ \tau_k]$, где k — четное, траектория $x(t)$ лежит на границе Λ, т. е.

$$x(t)\in\partial\Lambda \text{ для } \tau_{k-1}\leqslant t\leqslant\tau_k \text{ при четных } k,$$

и $x(t)$ лежит внутри Λ при t, принадлежащем открытым интервалам с нечетными номерами, т. е.

$$x(t) \in \text{ внутренности } \Lambda \text{ для } \tau_{k-1} < t < \tau_k \text{ при } k \text{ нечетных.}$$

Конечно, если траектория $x(t)$ лежит всегда внутри Λ, то она удовлетворяет этим условиям при пустом разбиении сегмента $[t_0, t_1]$.

Определение. Управление $u(t)$, определенное на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, с соответствующей траекторией $x(t)$, пересекающей границу Λ на интервалах, назовем *максимальным* в случае, когда:

1) Принцип максимума выполняется почти всюду:

$$\eta(t) B(t) u(t) = \max_{u \in \Omega} \eta(t) B(t) u.$$

2) Здесь $\eta(t)$ есть некоторое решение уравнений

$$\dot{\eta} = -\eta A(t) \quad \text{на каждом } \tau_{k-1} < t < \tau_k \text{ для } k \text{ нечетных}$$

и

$$\dot{\eta} = -\eta A(t) + \zeta(t)\theta(x(t)) \text{ на каждом } \tau_{k-1} \leqslant t \leqslant \tau_k \text{ для } k \text{ четного,}$$

где $\zeta(t)$ есть некоторая неотрицательная интегрируемая функция, а $\theta(x)$ — единичный вектор внешней нормали к Λ в точке x, зависящий кусочно-непрерывно от $x \in \partial\Lambda$.

3) Функция $\eta(t)$ является непрерывной на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, за исключением, возможно, точек стыка $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r-1}$, где $x(t) \in \partial\Lambda$ и где выполнены условия

$$\eta(\tau_k + 0) - \eta(\tau_k - 0) = \nu_k \theta(x(\tau_k))$$

при некоторых постоянных $\nu_k \geqslant 0$.

4) $\eta(t_1) \neq 0$.

Лемма. *Рассмотрим линейный процесс в R^n:*

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

с начальным состоянием $x(t_0) = x_0$, лежащим внутри замкнутого выпуклого ограничивающего фазовые координаты множества $\Lambda \subset R^n$, и с управлениями из компактного ограничивающего множества $\Omega \subset R^m$. Пусть управление $u^*(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t^*)$ с соответствующей траекторией $x^*(t)$, пересекающей границу множества Λ на интервалах, будет максимальным управлением с сопряженным решением $\eta^*(t)$. Тогда

$$\eta^*(t^*) x^*(t^*) \geqslant \eta^*(t^*) x$$

для всех точек x из множества $K_\Lambda(t^*)$. Таким образом, $\eta^*(t^*)$ есть внешняя единичная нормаль к множеству $K_\Lambda(t^*)$ в граничной точке $x^*(t^*)$.

Доказательство. Фиксируем разбиение $t_0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_r = t^*$ и пусть $x(t)$ — произвольная допустимая траектория.

Тогда

$$\eta^*(t^*)[x^*(t^*)-x(t^*)]-\eta^*(t_0)[x^*(t_0)-x(t_0)]=$$
$$=\eta^*(\tau_r)[x^*(\tau_r)-x(\tau_r)]-\eta^*(\tau_{r-1}+0)[x^*(\tau_{r-1})-x(\tau_{r-1})]+$$
$$+\eta^*(\tau_{r-1}+0)[x^*(\tau_{r-1})-x(\tau_{r-1})]-$$
$$-\eta^*(\tau_{r-1}-0)[x^*(\tau_{r-1})-x(\tau_{r-1})]+\ldots$$
$$\ldots+\eta^*(\tau_1-0)[x^*(\tau_1)-x(\tau_1)]-\eta^*(\tau_0)[x^*(\tau_0)-x(\tau_0)].$$

Воспользуемся дифференциальным уравнением для $\eta(t)$ для определения приращений, которые соответствуют концам интервала разбиения, т. е.

$$\int\limits_{\tau_{-1}}^{\tau_k}\frac{d}{dt}\eta^*(t)[x^*(t)-x(t)]\,dt=$$
$$=\eta^*(\tau_k-0)[x^*(\tau_k)-x(\tau_k)]-\eta^*(\tau_{k-1}+0)[x^*(\tau_{k-1})-x(\tau_{k-1})]$$

и учтем при вычислении этих приращений условия скачка в точках стыка $\tau_1, \ldots, \tau_{r-1}$. Это вычисление, совместно с принципом максимума, дает следующий результат:

$$\eta^*(t^*)[x^*(t^*)-x(t^*)]-\eta^*(t_0)[x^*(t_0)-x(t_0)]\geqslant 0.$$

Так как $x^*(t_0)=x(t_0)=x_0$ и так как $x(t^*)$ является произвольной точкой множества $K_\Lambda(t^*)$, мы заключаем, что

$$\eta^*(t^*)\,x^*(t^*)\geqslant\eta^*(t^*)\,x \quad \text{для всех} \quad x\in K_\Lambda(t^*).$$

Поэтому точка $x^*(t^*)$ лежит на границе множества $K_\Lambda(t^*)$ в пространстве R^n и вектор $\eta^*(t^*)$ является вектором внешней нормали для некоторой опорной гиперплоскости к множеству достижимости $K_\Lambda(t^*)$ в точке $x^*(t^*)$. Лемма доказана.

В следующей теореме мы требуем выполнения *«гипотезы проникновения»*, подобной той, которая была рассмотрена в теореме 19 главы 2. Она заключается в том, что для каждой точки $\bar{x}$ из целевого множества G и произвольного момента времени $\bar{t}$ на интервале $\bar{t}<t<\infty$ существует допустимое управление $\bar{u}(t)$ (т. е. управление, являющееся допустимым на каждом конечном подынтервале интервала $\bar{t}<t<\infty$), такое, что для соответствующего решения $\bar{x}(t)$ имеет место включение:

$$\bar{x}(t)\subset \textit{внутренность}\ K_\Lambda(\bar{x},\ t)\cup \textit{внутренность}\ G.$$

Если множество скоростей $\{A(t)\,x+B(t)\,u\mid u\in\Omega\}$ для $x\in\partial G$ всегда содержит векторы, направленные во внутренность целевого множества G, эта гипотеза выполняется. Однако, если множество G состоит только из единственной точки, скажем, $\bar{x}=0$, гипотеза может также выполняться, если процесс $\mathscr{L}$ является

вполне управляемым на каждом интервале времени, а точка $u=0$ лежит внутри ограничивающего множества Ω.

Теорема 6. *Рассмотрим линейный процесс в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=A(t)x+B(t)u,$$

с начальным состоянием $x(t_0)=x_0$ *и компактным выпуклым целевым множеством* G, *лежащим внутри замкнутого выпуклого ограничивающего фазовые координаты множества* $\Lambda\subset R^n$ *с измеримыми управлениями из компактного выпуклого ограничивающего множества* $\Omega\subset R^m$. *Пусть* $u^*(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t^*)$ *является допустимым управлением с соответствующей траекторией* $x^*(t)$, *переводящей точку* x_0 *в точку* $x^*(t^*)\in\partial G$ *и пересекающей границу множества* Λ *на интервалах.*

Предположим, что:

(a) $u^*(t)$ *есть максимальное управление с сопряженным решением* $\eta^*(t)$;

(b) $\eta^*(t)$ *удовлетворяет условиям трансверсальности, т. е.* $\eta^*(t)$ *есть внутренняя нормаль к* G *в граничной точке* $x^*(t^*)$;

(c) *имеет место гипотеза проникновения, т. е. для каждой точки* $\bar{x}$ *в* G *и момента времени* $\bar{t}$ *существует допустимое управление на полубесконечном интервале* $\bar{t}<t<\infty$, *переводящее точку* $\bar{x}$ *навсегда во внутренность множества* $K_\Lambda(\bar{x}, t)$ *или во внутренность целевого множества* G.

Тогда $u^*(t)$ *есть оптимальное управление с минимальным временем* t^*.

Доказательство. Так как $u^*(t)$ есть максимальное управление, точка $x^*(t^*)$ лежит на границе множества $K_\Lambda(t^*)$, а также на границе множества G. Кроме того, вектор $\eta^*(t^*)$ является нормальным к общей опорной гиперплоскости ко множествам $K_\Lambda(t^*)$ и G в точке $x^*(t^*)$, согласно условиям трансверсальности.

Если множество достижимости $K_\Lambda(t_1)$ пересеклось с целевым множеством G в некоторый момент времени $t'<t^*$, то гипотеза проникновения гарантирует, что внутренность множества $K_\Lambda(t^*)$ пересекается с G, или же, что множество достижимости $K_\Lambda(t^*)$ пересекается с внутренностью целевого множества G. Ни в одном из этих случаев невозможно разделить множества $K_\Lambda(t^*)$ и G общей опорной гиперплоскостью. Таким образом, $t=t^*$ есть первый момент времени, в котором множество $K_\Lambda(t)$ пересекается с G. Следовательно, управление $u^*(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t^*$ является оптимальным. Теорема доказана.

Обратимся теперь к достаточным условиям, относящимся к принципам *динамического программирования*. Рассмотрим управляемый процесс в R^n,

$$\dot{x}=f(x, t, u),$$

где допустимыми управлениями $u(t)$ являются все ограниченные измеримые функции, определенные на фиксированном конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, принадлежащие некоторому ограничивающему множеству $\Omega \subset R^m$, и переводящие начальную точку x_0 в целевое множество $G \subset R^n$. Интегральный критерий качества

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), t, u(t))\,dt,$$

где функции g, f и f^0 принадлежат классу C^1 по всем аргументам.

Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H(\eta, x, t, u) = -f^0(x, t, u) + \eta f(x, t, u)$$

(в разделе 5.1 эта функция была обозначена через $\hat{H}$ с $\eta_0 = -1$). Мы ищем управление с обратной связью $u^0(\eta, x, t)$, которое максимизирует функцию $H(\eta, x, t, u)$ как функцию от u $(u \in \Omega)$ для каждого фиксированного вектора $(\eta, x, t) \in R^{n+n+1}$.

Определение. *Управляемый процесс в* R^n

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u)$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$ и гамильтонианом

$$H(\eta, x, t, u) = -f^0(x, t, u) + \eta f(x, t, u)$$

обладает *управлением с обратной связью* $u^0(\eta, x, t)$ в случае, когда

$$H^0(\eta, x, t) \equiv \max_{u \in \Omega} H(\eta, x, t, u) \equiv H(\eta, x, t, u^0(\eta, x, t)).$$

Если вектор-функция $\eta(x, t)$ определена, то вектор-функция $\bar{u}(x, t) = u^0(\eta(x, t), x, t)$ называется *законом управления*. Заданием закона управления $\bar{u}(x, t)$ в классе C^1 вполне определяются траектория $\bar{x}(t)$, удовлетворяющая уравнению $\dot{x} = f(x, t, \bar{u}(x, t))$, $\bar{x}(t_0) = x_0$ и управление $\bar{u}(t) = \bar{u}(\bar{x}(t), t)$.

В этом изложении мы рассматриваем управляемый процесс $\mathscr{S}$ с управлением (с обратной связью) $u^0(\eta, x, t)$ класса C^1 в R^{n+n+1}. Процессы такого рода, для которых $\Omega = R^m$ и $G = R^n$, были изучены в главах 3 и 4. Начнем наше рассмотрение с предположения, что система из каждого состояния $x_0 \in R^n$ в начальный момент времени t_0 может быть переведена при помощи оптимального управления, определенного на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ (с фиксированным концом T и свободным началом $t_0 < T$) в целевое множество G. Пусть минимальное значение критерия качества будет $V(x_0, t_0)$; предположим, что $V(x, t)$ принадлежит классу C^2 по $x \in R^n$ и $t \leqslant T$. Согласно методу динамического программирования

$$V(x_0, t_0) = \min\left[\int_{t_0}^{t_0+\delta} f^0(x(t), t, u(t))\,dt + V(x(t_0+\delta), t_0+\delta)\right].$$

Здесь минимум рассматривается по всем допустимым управлениям $u(t)$, определенным на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ с соответствующим решением $x(t)$, переводящим точку x_0 в точку $x(T) \in G$. Если разложить стоящее в квадратных скобках выражение в ряд по малому параметру $\delta > 0$, игнорируя точки разрыва и отбрасывая члены высшего порядка малости по отношению к δ, то получим, что

$$V(x_0, t_0) = \min_{u \in \Omega} \{f^0(x_0, t_0, u)\delta + V(x_0, t_0) + \delta[V_x(x_0, t_0) f + V_t]\}.$$

Это дает функциональное уравнение для $V(x, t)$:

$$-V_t(x, t) = \min_{u \in \Omega} [f^0(x, t, u) + V_x(x, t) f(x, t, u)].$$

Полагая $S(x, t) = -V(x, t)$, получим

$$S_t = -\max_{u \in \Omega} [-f^0(x, t, u) + S_x f(x, t, u)]$$

или

$$S_t = -H^0(S_x, x, t).$$

Таким образом, функция $S(x, t)$ удовлетворяет уравнению с част ными производными

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^0\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right) = 0$$

с граничными условиями $S(x, T) = -g(x)$ для $x \in G$. Это дифференциальное уравнение с частными производными, называемое в классической аналитической динамике уравнением Гамильтона — Якоби, представляет собой основной результат динамического программирования в применении к нашей задаче оптимизации.

Теорема 7. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u),$$

с начальным состоянием x_0 *и целевым множеством* $G \subset R^n$. *Допустимые управления суть все ограниченные измеримые функции* $u(t)$, *определенные на интервале* $t_0 \leqslant t \leqslant T$, *со значениями из ограничивающего множества* $\Omega \subset R^m$, *переводящие траекторию* $x(t)$ *из точки* $x(t_0) = x_0$ *в точку* $x(T) \in G$. *Интегральный критерий качества имеет вид*

$$C(u) = g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} f^0(x(t), t, u(t))\, dt,$$

где функции g, f, f^0 *принадлежат классу* C^1 *по всем аргументам. Предположим, что существует управление с обратной связью* $u^0(\eta, x, t)$ *класса* C^1 в R^{n+n+1}, *такое, что*

$$H^0(\eta, x, t) = H(\eta, x, t, u^0(\eta, x, t)).$$

(a) *Пусть функция* $S(x, t) \in C^2$ *для* $x \in R^n$, $t \leqslant T$, *будет решением уравнения Гамильтона—Якоби*

$$S_t + H^0(S_x, x, t) = 0, \quad \text{где} \quad S(x, T) = -g(x) \quad \text{для} \quad x \in G.$$

Предположим еще, что закон управления

$$\bar{u}(x, t) = u^0(S_x(x, t), x, t)$$

определяет траекторию $\bar{x}(t)$, *переводящую точку* (x_0, t_0) *в множество* (G, T). *Тогда* $\bar{u}(t) = \bar{u}(\bar{x}(t), t)$ *есть оптимальное управление при условии, что оно лежит в* Ω, *с оптимальной траекторией* $\bar{x}(t)$ *и значением критерия качества*

$$C(\bar{u}(t)) = -S(x_0, t_0).$$

(b) *С другой стороны, предположим, что существует оптимальное управление для каждого начального состояния* $x_0 \in R^n$, *и произвольного начального момента времени* $t_0 < T$ *(где* T *фиксировано), ведущее к целевому множеству* G *с минимальным значением критерия качества* $V(x_0, t_0) \in C^2$.

Тогда функция $S(x, t) = -V(x, t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$S_t + H^0(S_x, x, t) = 0, \quad \text{где} \quad S(x, T) = -g(x) \quad \text{для} \quad x \in G.$$

Доказательство. Пусть функция $S(x, t) \in C^2$ $(x \in R^n, t \leqslant T)$ есть решение уравнения Гамильтона—Якоби с граничным условием $S(x, T) = -g(x)$ для $x \in G$; предположим, что закон управления $\bar{u}(x, t) = u^0(S_x, x, t)$ определяет траекторию $\bar{x}(t)$, переводящую точку (x_0, t_0) в (G, T) и соответствующее управление $\bar{u}(t) = \bar{u}(\bar{x}(t), t)$ в Ω. Тогда

$$C(\bar{u}) = g(\bar{x}(T)) + \int_{t_0}^{T} f^0(\bar{x}(t), t, \bar{u}(t))\,dt,$$

так что

$$C(\bar{u}) = \int_{t_0}^{T} \left[f^0(\bar{x}(t), t, \bar{u}(\bar{x}(t), t)) - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x} f(\bar{x}, t, \bar{u})\right] dt - S(x_0, t_0).$$

Таким образом,

$$C(\bar{u}) = \int_{t_0}^{T} -[S_t + H^0(S_x, x, t)]\,dt - S(x_0, t_0)$$

и

$$C(\bar{u}) = -S(x_0, t_0), \text{ что и требовалось.}$$

Пусть теперь $u(t)$ будет любым допустимым управлением с соответствующей траекторией $x(t)$, переводящей точку x_0 в G. Тогда

$$C(u) = \int_{t_0}^{T} [f^0(x(t), t, u(t)) - S_x f(x, t, u) - S_t]\,dt - S(x_0, t_0).$$

Заметим, что

$$H^0(S_x(x(t), t), x(t), t) \geqslant$$
$$\geqslant -f^0(x(t), t, u(t)) + S_x(x(t), t) f(x(t), t, u(t))$$

и

$$C(u) \geqslant \int_{t_0}^{T} [-H^0(S_x, x, t) - S_t]\, dt - S(x_0, t_0) = -S(x_0, t_0).$$

Таким образом, $u(t)$ есть оптимальное управление, что и требовалось.

Пусть теперь $V(x, t) = -S(x, t)$ есть оптимальное минимальное значение критерия качества при переходе из точки (x, t) в множество (G, T), как в условии (b). Предположим, что имеется точка x_0 в R^n и время $t_0 < T$, для которого

$$S_t(x_0, t_0) + H^0(S_x, x_0, t_0) < 0$$

и это неравенство справедливо в открытой окрестности N точки (x_0, t_0) в R^{n+1}. Пусть $x^*(t)$ — оптимальная траектория, ведущая из точки (x_0, t_0) в множество (G, T), и соответствующая оптимальному управлению $u^*(t)$. Тогда

$$f^0(x^*(t), t, u^*(t)) - S_x f - S_t \geqslant -[S_t + H^0(S_x, x^*(t), t)] > \varepsilon > 0$$

для t, близких к t_0, например, находящихся на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta < T$, и некоторой постоянной $\varepsilon > 0$. В течение этого интервала времени

$$S_t + S_x f < f^0(x^*(t), t, u^*(t)) - \varepsilon$$

и

$$S(x^*(t_0+\delta), t_0+\delta) - S(x_0, t_0) < \int_{t_0}^{t_0+\delta} f^0(x^*(t), t, u^*(t))\, dt - \varepsilon\delta.$$

Это означает, что

$$V(x_0, t_0) < \int_{t_0}^{t_0+\delta} f^0(x^*(t), t, u^*(t))\, dt + V(x^*(t_0+\delta), t_0+\delta) - \varepsilon\delta.$$

Но мы знаем, что

$$V(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\delta} f^0(x^*(t), t, u^*(t))\, dt + V(x^*(t_0+\delta), t_0+\delta),$$

и это противоречие доказывает, что

$$S_t + H^0(S_x, x, t) \geqslant 0$$

в рассматриваемой области.

Если в некоторой окрестности N точки (x_0, t_0) мы имеем

$$S_t(x, t) + H^0(S_x(x, t), x, t) > 0,$$

то

$$S_t + S_x f(x^*(t), t, u^*(t)) > f^0(x^*(t), t, u^*(t)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, интегрированием по малому интервалу $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$, мы получаем

$$S(x^*(t_0+\delta), t_0+\delta) - S(x_0, t_0) > \int_{t_0}^{t_0+\delta} f^0(x^*(t), t, u^*(t))\, dt + \frac{\varepsilon\delta}{2}$$

или

$$V(x_0, t_0) > \int_{t_0}^{t_0+\delta} f^0(x^*(t), t, u^*(t))\, dt + V(x^*(t_0+\delta), t_0+\delta) + \frac{\varepsilon\delta}{2}.$$

Это противоречие доказывает, что

$$S_t + H^0(S_x, x, t) = 0,$$

что и требовалось, и очевидно, что

$$S(x, T) = -g(x) \quad \text{для} \quad x \in G.$$

Теорема доказана.

Мы замечаем, что существования соответствующего решения $S(x, t)$ уравнения Гамильтона — Якоби в области W пространства переменных (x, t) *достаточно* для построения управления, которое будет оптимальным среди управлений с соответствующими траекториями в W.

Чтобы связать принцип максимума из раздела 5.1 с вопросом о максимизации функции Гамильтона $H^0(\eta, x, t)$, упростим задачу.

Следствие. *Рассмотрим автономный процесс в* R^n

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u)$$

с начальным состоянием x_0 *и целевым множеством* $G = R^n$. *Допустимые управления суть все ограниченные измеримые функции* $u(t)$, *определенные на фиксированном конечном интервале* $0 \leqslant t \leqslant T$, *принимающие значения из ограничивающего множества* $\Omega \subset R^m$, *с соответствующей траекторией* $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. *Интегральный критерий качества имеет вид*

$$C(u) = \int_0^T f^0(x(t), u(t))\, dt,$$

где функции f^0 *и* f *по всем переменным принадлежат классу* C^1.

Предположим, что

(a) *существует управление с обратной связью* $u^0(\eta, x)$ *класса* C^1 *в* R^{n+n}, *которое дает единственную точку* u^0 в Ω, такую, что

$$H^0(\eta, x) = \max_{u \in \Omega} [-f^0 + \eta f] = H(\eta, x, u^0(\eta, x));$$

(b) Ω *есть или открытое множество или же замыкание открытого множества с границей класса* C^1 *в* R^m.

Тогда оптимальное управление $u^*(t)$ *с соответствующей траекторией* $x^*(t)$ *необходимо связано с сопряженным решением* $\eta^*(t)$, *удовлетворяющим гамильтоновой системе*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H^0}{\partial \eta_i}, \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial H^0}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

с граничными условиями $x^*(0) = x_0$, $\eta^*(T) = 0$, *и принцип максимума*

$$H^0(\eta^*(t), \quad x^*(t)) = H(\eta^*(t), \quad x^*(t), \ u^*(t))$$

справедлив почти всюду на $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Из теоремы 1 раздела 5.1, приведенной выше, следует, что оптимальному управлению $u^*(t)$ соответствуют решения $x^*(t)$ и $\eta^*(t)$ системы уравнений

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}(\eta, \ x, \ u^*(t)), \qquad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(\eta, \ x, \ u^*(t)), \ i = 1, \ \ldots, \ n.$$

[Отметим, что функция H обозначена в разделе 5.1 через $\hat{H}$ и что условия трансверсальности позволяют нам предположить, что $\eta_0^* \equiv -1$ и $\eta^*(T) = 0$.] Принцип максимума имеет вид

$$H(\eta^*(t), \ x^*(t), \ u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} H(\eta^*(t), \ x^*(t), \ u) = \\ = H^0(\eta^*(t), \ x^*(t)) \quad \text{почти всюду},$$

так что $u^*(t) = u^0(\eta^*(t), \ x^*(t))$.

Мы должны показать, что $(x^*(t), \ \eta^*(t))$ есть также решение гамильтоновой системы дифференциальных уравнений, определяемой функцией Гамильтона $H^0(\eta, x)$. Для этого мы докажем, что

$$\frac{\partial H}{\partial \eta}(\eta^*(t), \ x^*(t), \ u^*(t)) = \frac{\partial H^0}{\partial \eta}(\eta^*(t), \ x^*(t))$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial x}(\eta^*(t), \ x^*(t), \ u^*(t)) = \frac{\partial H^0}{\partial x}(\eta^*(t), \ x^*(t))$$

почти всюду на $0 \leqslant t \leqslant T$. Вычислим производные

$$\frac{\partial H^0}{\partial \eta}(\eta, \ x) = \frac{\partial H}{\partial \eta}(\eta, \ x, \ u^0) + \frac{\partial H}{\partial u}(\eta, \ x, \ u^0)\frac{\partial u^0}{\partial \eta}(\eta, \ x)$$

и

$$\frac{\partial H^0}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u^0}{\partial x}.$$

Если управление $u^*(t)$ в некоторый момент времени лежит внутри Ω, то $(\partial H/\partial u) = 0$ в точке $(\eta^*(t), \ x^*(t), \ u^*(t)) = (\eta^*, \ x^*, \ u^0(\eta^*, x^*))$, так как управление u^0 максимизирует функцию $H(\eta^*, \ x^*, \ u)$. Следовательно, в те моменты времени, когда $u^*(t)$ лежит внутри Ω,

требуемые дифференциальные уравнения Гамильтона удовлетворяются. Таким образом, если Ω открыто в R^m, следствие доказано.

Теперь фиксируем точку $(\eta^*(t_1), x^*(t_1)) = (\eta_1, x_1)$, отбрасывая множество меры нуль моментов времени, для которых $u^*(t)$ не равно $u^0(\eta^*(t), x^*(t))$. Если точка $u^0(\eta_1, x_1)$ лежит внутри Ω, то $\partial H/\partial u = 0$, как было замечено выше. Кроме того, если (η_1, x_1) есть предельная точка для множества точек (η, x) в R^{n+n}, в которых $u^0(\eta, x)$ находится внутри Ω, то из соображений непрерывности вытекает, что $(\partial H/\partial u)(\eta_1, x_1, u^0(\eta_1, x_1)) = 0$.

Таким образом, остался единственный случай, связанный с ситуацией, когда точка $u^0(\eta, x)$ лежит на границе множества Ω для всех (η, x) из некоторой окрестности N точки (η_1, x_1). В этом случае векторы $(\partial u^0/\partial\eta)(\eta_1, x_1)$ и $(\partial u^0/\partial x)(\eta_1, x_1)$ являются касательными к границе множества Ω. Но функция $H(\eta^*(t), x^*(t), u)$ максимизируется в граничной точке $u^0(\eta^*(t), x^*(t))$ для каждого t взятого вблизи t_1, откуда следует, что u — градиент функции $H(\eta^*(t), x(t), u)$, — есть нормальный вектор к границе области управления Ω. Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\eta_1, x_1, u^0(\eta_1, x_1))\,\frac{\partial u^0}{\partial \eta}(\eta_1, x_1) = 0$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\eta_1, x_1, u^0(\eta_1, x_1))\,\frac{\partial u^0}{\partial x}(\eta_1 x_1) = 0.$$

Поэтому гамильтонова система дифференциальных уравнений удовлетворяется почти всюду. Следствие доказано.

При предположениях следствия поиск оптимального управления сводится к решению двухточечной краевой задачи для нелинейной гамильтоновой системы, заданной посредством функции Гамильтона $H^0(\eta, x)$. Если процесс $\mathcal{S}$ удовлетворяет, к тому же, гипотезе выпуклости главы 3, и $\Omega = R^m$, а множество G есть фиксированное компактное выпуклое целевое множество в R^n, то тогда соответствующее следствие также имеет место. Интересны также другие случаи, когда $\eta_0 \neq 0$ при соответствующей формулировке принципа максимума. Конечно, этот подход к задаче оптимального управления требует существования гладкого управления с обратной связью $u^0(\eta, x)$. Следующая теорема описывает класс задач управления, для которых такое управление можно определить.

Для простоты мы рассмотрим только задачу оптимального быстродействия по приведению системы из заданного начального состояния x_0 в целевое множество G в R^n. Тем самым, в этом случае гамильтониан имеет вид $H(\eta, x, u) = -1 + \eta f(x, u)$. Компактное ограничивающее множество Ω лежит также в R^n и для каждого фиксированного $x \in R^n$ является *диффеоморфным* множе-

ству скоростей $V=\{f(x, u) \mid u \in \Omega\}$. Это означает, что

$$\Omega \longrightarrow V: \ u \longrightarrow f(x, u)$$

есть взаимно однозначное отображение класса C^1 с необращающимся в нуль определителем Якоби (кроме того, *диффеоморфизм* может быть продолжен на открытую окрестность множества Ω в R^n).

В упражнениях показано, что заданный линейный управляемый процесс можно соответствующим образом аппроксимировать процессом, для которого справедливы условия следующей ниже теоремы. Таким образом, после соответствующей аппроксимации, такие линейные процессы допускают гладкое управление с обратной связью. Следовательно, синтез оптимального управления может быть получен решением двухточечной краевой задачи для гамильтоновой системы, определяемой посредством функции Гамильтона $H^0(\eta, x)$ или обращением к соответствующей теории динамического программирования. Более общие нелинейные системы также можно соответствующим образом аппроксимировать, при условии, что множество V всегда выпукло, и потом обратиться к методам динамического программирования.

Теорема 8. *Рассмотрим систему*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u) \quad \text{в} \quad R^n,$$

с правой частью класса C^1 в R^{n+n}, и компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^n$. Для каждого $x \in R^n$ пусть множество скоростей имеет вид

$$V(x)=\{f(x, u) \mid u \in \Omega\}.$$

Предположим, что для каждого $x \in R^n$:

(a) *имеется диффеоморфизм множества Ω на множество V:*

$$\Omega \longrightarrow V: \ u \longrightarrow f(x, u).$$

(b) $V(x)$ *есть строго выпуклое тело в R^n с границей — многообразием ∂V класса C^2, имеющим положительную гауссову кривизну.*

Тогда существует гладкое управление с обратной связью $u^0(\eta, x)$ класса C^1 для $\eta \neq 0$, $x \in R^n$, соответствующее единственной точке в Ω, где достигается максимум

$$H^0(\eta, x)=\max_{u \in \Omega}\left[-1+\eta f(x, u)\right].$$

Кроме того, управление $u^0(\eta, x)$ всегда лежит на границе $\partial\Omega$.

Доказательство. Мы ищем управление $u^0=u^0(\eta, x)$ в Ω, которое максимизирует функцию $\eta f(x, u)$. Фиксируем $\bar{\eta} \neq 0$, $\bar{x} \in R^n$. Тогда $V(\bar{x})$ есть строго выпуклое множество, на котором функция $\bar{\eta} f$ достигает максимума в единственной точке $\bar{f}$, которая принадлежит множеству $\partial V(\bar{x})$, где внешняя нормаль направлена по $\bar{\eta}$. Эта точка $\bar{f}$ соответствует единственной точке $u^0(\bar{\eta}, \bar{x})$ на

границе множества Ω. Следовательно, функция $\eta f(x, u)$ достигает максимума в единственной точке $u^0(\eta, x) \in \partial\Omega$. Так как $V(x)$ есть строго выпуклое множество в пространстве R^n, которое непрерывно меняется с изменением x, то отображение $(\overline{\eta}, \overline{x}) \longrightarrow \overline{f}$ является непрерывным и, таким образом, отображение $(\overline{\eta}, \overline{x}) \longrightarrow \longrightarrow u^0(\overline{\eta}, \overline{x})$ также непрерывно. Мы теперь покажем, что управление $u^0(\eta, x)$ принадлежит классу C^1.

Рассмотрим функцию

$$Q(\eta, x, u) = \nu(f(x, u)) - \frac{\eta}{|\eta|},$$

где $\nu(f(x, u))$ есть единичная внешняя нормаль к $\partial V(x)$ в граничной точке $f(x, u)$, для $x \in R^n$ и $u \in \partial\Omega$. Отметим, что n-мерная вектор-функция $Q(\eta, x, u)$ принадлежит классу C^1 для $\eta \neq 0$, $x \in R^n$ и $u \in \partial\Omega$. [Так как $\partial V(x)$ есть гиперповерхность класса C^2, то отображение $f \longrightarrow \nu(f)$ границы ∂V в единичную сферу S^{n-1} также принадлежит классу C^1.] Далее, $u = u^0(\eta, x)$ есть единственное решение уравнения $Q = 0$ и мы пользуемся теоремой о неявной функции для того, чтобы доказать, что оно принадлежит классу C^1. Вычислим

$$\det\left|\frac{\partial Q}{\partial u}(\overline{\eta}, \overline{x}, u^0(\overline{\eta}, \overline{x}))\right| = \det\left|\frac{\partial \nu}{\partial f}\right| \det\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|,$$

пользуясь локальными координатами на $\partial\Omega$, $\partial V(x)$ и S^{n-1}. Но $\nu(f)$ описывает изменяющиеся единичные векторы внешней нормали к $V(\overline{x})$ в произвольной граничной точке f; следовательно, $\det|\partial\nu/\partial f|$ является не равной нулю гауссовой кривизной тела $V(\overline{x})$. Матрица $\partial f/\partial u$ есть невырожденная матрица Якоби диффеоморфизма границы $\partial\Omega$ на границу $\partial V(x)$ и, таким образом, $\det|\partial f/\partial u| \neq 0$. Поэтому $\det|\partial Q/\partial u| \neq 0$, и из теоремы о неявной функции следует, что $u^0(\eta, x)$ есть вектор-функция класса C^1 для $\eta \neq 0$, $x \in R^n$, как отображение в $\partial\Omega$ и, следовательно, как отображение в R^n. Теорема доказана.

Последняя теорема, дающая достаточные условия оптимальности, будет включать в себя условия на вторую вариацию от функционала качества и укажет скорее локальное, чем глобальное оптимальное управление.

Рассмотрим автономный управляемый процесс в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

с начальным состоянием $x(0) = x_0$ и функционалом (критерием) качества

$$C(u) = \int_0^T f^0(x, u)\,dt,$$

где $f(x, u)$ и $f^0(x, u)$ — гладкие функции. Каждое из допустимых управлений $u(t)$ является ограниченным и измеримым на фиксированном конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ [с ограничением $u(t) \subset \subset \Omega \subset R^m$] и соответствующим решением $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Мы ищем достаточные условия, характеризующие оптимальное управление $u^*(t)$ для этой задачи *со свободным концом*. Принцип максимума

$$H(\eta^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} H(\eta^*(t), x^*(t), u)$$

является необходимым условием для оптимальности управления $u^*(t)$, где решения $x^*(t)$ и $\eta^*(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \eta}(\eta, x, u^*(t)), \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\eta, x, u^*(t))$$

при $x(0) = x_0$, $\eta(T) = 0$. Функция Гамильтона здесь имеет вид

$$H(\eta, x, u) = -f^0(x, u) + \eta f(x, u).$$

Как мы видели в теореме 5, принцип максимума, вместе с некоторыми условиями выпуклости на функции $f^0(x, u)$ и $f(x, u)$, дает достаточное условие оптимальности управления $u^*(t)$. Мы теперь заменим эти глобальные условия выпуклости локальными условиями выпуклости, выраженными через значения вторых производных функций f и f^0, и затем найдем достаточные условия для локального оптимального управления.

Определение. Управление $u^*(t)$ процесса $\mathcal{S}$ является *локально оптимальным* в случае, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого допустимого управления $u(t)$ при

$$|u^*(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{на} \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

функционал качества удовлетворяет соотношению $C(u) \geqslant C(u^*)$.

Так как мы желаем наложить локальные условия выпуклости, то целесообразно предположить, что кандидат в искомое оптимальное управление $u^*(t)$ лежит целиком во внутренности ограничивающего множества Ω. В этом случае принцип максимума утверждает, что функция $H(\eta^*(t), x^*(t), u)$ максимизируется при $u = u^*(t)$, т. е. градиент равен нулю в этой точке:

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\eta^*(t), x^*(t), u^*(t)) = 0.$$

В таком виде принцип максимума обычно входит в классическое вариационное исчисление, в котором множество Ω, как правило, выбирается открытым в R^m и локальные условия выпуклости, в первую очередь подчеркивающие выпуклую природу функции $f^0(x, u)$, есть *условия Вейерштрасса*

$$(v - u)\frac{\partial H}{\partial u}(\eta, x, u) \geqslant H(\eta, x, v) - H(\eta, x, u),$$

которые выполняются всякий раз, когда вектор (η, x, u) близок к вектору $(\eta^*(t), x^*(t), u^*(t))$. Это условие Вейерштрасса традиционно выражается в терминах E-функции

$$E(\eta, x, u, v) \geqslant 0,$$

где

$$E(\eta, x, u, v) = H(\eta, x, u) - H(\eta, x, v) + (v-u)\frac{\partial H}{\partial u}(\eta, x, u).$$

Мы не будем пользоваться этим условием Вейерштрасса, а заменим его более легким для проверки условием выпуклости, что делает доказательство нашей следующей теоремы элементарным. Кроме того, мы предположим выполненным обычное *условие Лежандра* положительности второй вариации интегрального функционала качества.

Для того чтобы мотивировать все эти допущения, выполним некоторые предварительные вычисления, в которых мы заменим заданное управление $u^*(t)$ на $u(t) = u^*(t) + \varepsilon\theta(t)$ для некоторого малого $\varepsilon > 0$ и произвольной измеримой вариации управления $\theta(t)$, где $|\theta(t)| \leqslant 1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Траектория $x(t)$ тогда определена и легко вычислить, что $|x^*(t) - x(t)| \equiv |\Delta x(t)| \leqslant k_1\varepsilon$, где k_1 есть постоянная, зависящая только от заданных исходных данных $\{\mathcal{S}, C, u^*, x^*, \eta^*\}$. Мы имеем

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t) = \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)(x(s) - x^*(s)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*)\,\varepsilon\theta\,(s) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\,\Delta x^2 + 2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}}\,(\Delta x)(\varepsilon\theta) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}\,(\varepsilon\theta)^2\right] ds,$$

где черта указывает, что вторые производные вычислены в некоторой точке, близкой к $(x^*(s), u^*(s))$. Если мы определим $\psi(t)$ уравнением

$$\dot{\psi} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t))\,\psi + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t))\,\theta(t)$$

и начальным значением $\psi(0) = 0$, то

$$\Delta x(t) - \varepsilon\psi(t) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*)\,[\Delta x - \varepsilon\psi(s)]\,ds +$$

$$+ \int_0^t \left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\,\Delta x^2 + 2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}}\,(\Delta x)(\varepsilon\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,(\varepsilon\theta)^2\right] ds.$$

Следовательно,

$$\Delta x(t) = \varepsilon\psi(t) + k_2(t)\,\varepsilon^2,$$

где $|k_2(t)| \leqslant k_2$, а константа k_2 зависит только от заданных исходных данных $\{\mathcal{S}, C, \theta^*, x^*, \eta^*\}$.

Теперь вычислим вариацию интегрального критерия качества, обусловленную вариацией управления $\theta(t)$. Имеем

$$\Delta C = C(u^* + \varepsilon\theta) - C(u^*) =$$
$$= \int_0^T \left[\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*, u^*) \Delta x(s) + \frac{\partial f^0}{\partial u}(x^*, u^*) \varepsilon\theta(s) + \right.$$
$$\left. + \overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial x^2}} \Delta x^2 + 2 \overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial x\, \partial u}} (\Delta x)(\varepsilon\theta) + \overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}} (\varepsilon\theta)^2 \right] ds.$$

Первая вариация функционала $C(u^*)$ (с точностью до членов порядка ε) такова:

$$\delta C = \varepsilon \int_0^T \left[\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*, u^*) \psi(s) + \frac{\partial f^0}{\partial u}(x^*, u^*) \theta(s) \right] ds.$$

Пользуясь равенством $\frac{\partial f^0}{\partial x} = \dot{\eta}^* + \eta^* \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x^*, u^*)$, интегрированием по частям получим

$$\delta C = \varepsilon \int_0^T -\frac{\partial H}{\partial u}(\eta^*, x^*, u^*) \theta(t)\, dt = 0.$$

Вторую вариацию

$$\delta^2 C = \varepsilon^2 \int_0^T \left[\frac{\partial^2 f^0}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f^0}{\partial x\, \partial u} (\Delta x)(\varepsilon\theta) + \frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2} (\varepsilon\theta)^2 \right] ds,$$

мы предполагаем положительной, что гарантируется положительностью симметрической матрицы

$$\begin{bmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xu} \\ f^0_{ux} & f^0_{uu} \end{bmatrix},$$

вычисленной в точках $(x^*(s), u^*(s))$. Дополнительное осложнение в следующей теореме о достаточных условиях возникает из-за членов второго порядка малости относительно $\Delta x - \varepsilon\psi$, возникающих при упрощении выражения для первой вариации δC.

Теорема 9. *Рассмотрим автономный процесс*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) \quad \text{в} \quad R^n$$

с начальным состоянием $x(0) = x_0$ и интегральным критерием качества

$$C(u) = \int_0^T f^0(x, u)\, dt,$$

где функции f, f^0 принадлежат классу гладкости C^2 в простран-

стве R^{n+m}. Допустимым управлением является всякая ограниченная измеримая функция $u(t)$, определенная на фиксированном конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ (который соответствует траектории $x(t)$) и удовлетворяющая ограничению $u(t) \subset \Omega \subset R^m$.

Пусть $u^*(t)$ есть управление, принимающее значения внутри Ω; предположим, что:

1) $\frac{\partial H}{\partial u}(\eta^*(t),\ x^*(t),\ u^*(t)) = 0$ *почти всегда, где*

$$H(\eta,\ x,\ u) = -f^0(x,\ u) + \eta f(x,\ u)$$

и $(\eta^*,\ x^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \eta}(\eta,\ x,\ u^*(t)), \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\eta,\ x,\ u^*(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \eta(T) = 0.$$

2) $f^0_{xx}p^2 + 2f^0_{xu}pq + f^0_{uu}q^2 \geqslant c(p^2 + q^2)$ *для произвольных действительных постоянных n и m-мерных векторов p и q, для фиксированной постоянной $c > 0$ и вторых частных производных, вычисленных в почти каждой точке $(x^*(t),\ u^*(t))$. Это означает, что следующая симметрическая матрица является положительно определенной:*

$$\begin{bmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xu} \\ f^0_{ux} & f^0_{uu} \end{bmatrix} > 0.$$

3) *Выполняется какое-либо из следующих двух условий. Вдоль $(x^*(t),\ u^*(t))$:*

(α) $$f_{xx} = f_{xu} = f_{uu} = 0,$$

(β) $$f^0_x = 0.$$

Тогда $u^*(t)$ есть локально оптимальное управление.

Доказательство. Заменим управление $u^*(t)$ на $u(t) = u^*(t) + \varepsilon\theta(t)$, где $|\theta(t)| \leqslant 1$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и $\varepsilon > 0$ является достаточно малым (мы определим ε ниже в зависимости от исходных данных $\{\mathcal{S},\ C,\ u^*,\ x^*,\ \eta^*\}$). Соответствующая траектория есть $x(t)$ и

$$\Delta x(t) = \varepsilon\psi(t) + k_2(t)\varepsilon^2, \quad \text{где} \quad |k_2(t)| \leqslant k_2,$$

как указано выше, причем

$$\dot{\psi} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t),\ u^*(t))\psi + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t),\ u^*(t))\theta(t) \quad \text{и} \quad \psi(0) = 0.$$

Приращение $C(u)$ тогда имеет такой вид:

$$\Delta C = C(u^* + \varepsilon\theta) - C(u^*) = \int_0^T \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*,\ u^*)\,[\Delta x(t) - \varepsilon\psi(t)]\,dt +$$

$$+ \int_0^T \left[\overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial x^2}}\,\Delta x^2 + 2\,\overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial x\,\partial u}}\,(\Delta x)(\varepsilon\theta) + \overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}}\,\varepsilon^2\theta^2\right] dt.$$

Здесь мы пользуемся предварительными вычислениями, предшествовавшими теореме, и учитываем равенство нулю выражения

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\eta^*(t),\ x^*(t),\ u^*(t))=0.$$

Отметим, что из условия 2) следует, что

$$\overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial x^2}}(\Delta x^2)+\overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial x\,\partial u}}(\Delta x)(\varepsilon\theta)+\overline{\frac{\partial^2 f^0}{\partial u^2}}\varepsilon^2\theta^2\geqslant\frac{c}{2}(|\Delta x|^2+|\varepsilon\theta|^2),$$

при условии, что $\varepsilon>0$ достаточно мало́ (величина ε зависит только от заданных исходных данных $\{\mathscr{S},\ C,\ u^*,\ x^*,\ \eta^*\}$).

Рассмотрим условие

$$(\alpha)\qquad f_{xx}=f_{xu}=f_{uu}=0\quad\text{на}\quad(x^*(t),\ u^*(t)).$$

Предварительное вычисление для $\Delta x(t)-\varepsilon\psi(t)$, предшествующее теореме, дает

$$\left|\frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*,\ u^*)\right|\cdot|\Delta x(t)-\varepsilon\psi(t)|\leqslant\frac{c\varepsilon^2}{2(1+T)}\int_0^T|\theta(t)|^2\,dt.$$

В этом случае

$$\Delta C\geqslant\frac{c}{2}\varepsilon^2\int_0^T|\theta(t)|^2\,dt-\frac{cT\varepsilon^2}{2(1+T)}\int_0^T|\theta(t)|^2\,dt>0,$$

так что $\Delta C>0$ при $\theta(t)\not\equiv 0$, и управление $u^*(t)$ является локально оптимальным.

Рассмотрим следующее допущение:

$$(\beta)\qquad f_x^0=0\quad\text{на}\quad(x^*(t),\ u^*(t)).$$

В этом случае

$$\Delta C=\int_0^T[\overline{f}_{xx}^0\Delta x^2+\overline{f}_{xu}^0(\Delta x)(\varepsilon\theta)+\overline{f}_{uu}^0\varepsilon^2\theta^2]\,dt\geqslant\frac{c}{2}\varepsilon^2\int_0^T|\theta(t)|^2\,dt$$

и, таким образом, $\Delta C>0$ всякий раз, когда $\theta(t)\not\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. В случае выполнения условия (α) мы предполагаем, что вариации управления $u^*(t)$ связаны соотношениями $u(t)-u^*(t)=\varepsilon\theta$, $\Delta x(t)=\varepsilon\psi$,

$$\dot\psi=f_x(x^*(t),\ u^*(t))\,\psi+f_u(x^*(t),\ u^*(t))\,\theta,$$

$$C(\theta)=\int_0^T[f_{xx}^0\psi^2+2f_{xu}\psi\theta+f_{uu}\theta^2]\,dt,$$

когда все члены порядка выше ε^2 не учитываются. Таким образом, мы свели исследование локальной оптимальности к изучению линейных процессов с квадратичным функционалом качества,

изученных в главе 3. Наш результат, полученный здесь, аналогичен полученному в главе 3, именно, $u^*(t)$ есть единственное управление, доставляющее минимум функционалу качества $C(u^*)$ в некоторой подходящим образом ограниченной окрестности $|u(t)-u^*(t)|\leqslant\varepsilon$.

Упражнения

1. Комбинируя методы теорем 5 и 6, получить достаточные условия для оптимального управления выпуклой системы с ограниченными фазовыми координатами.

2. Рассмотрим управляемый процесс

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u) \quad \text{в} \quad R^n,$$

где $f(x, u)\in C^1(R^{n+m})$, с измеримыми управлениями, принимающими значения в компактном подмножестве $\Omega\subset R^m$. Начальное состояние есть x_0, а целевое множество есть компактное подмножество $G\subset R^n$. Мы ищем управление, оптимальное по быстродействию, переводящее точку x_0 в множество G. Предположим, что существует действительная функция $T(x)$ класса C^1 в R^n, такая, что:

(a) $T(x)\geqslant 0$ в R^n, причем $T(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x\in G$.

(b) $\max\limits_{u\in\Omega}[-\operatorname{grad} T(x)]\,f(x, u)=1$ в R^n-G.

Пусть $u^*(t)$ $(0\leqslant t\leqslant t^*)$ есть управление с соответствующей траекторией $x^*(t)$ и пусть

$$-\operatorname{grad} T(x^*(t))\,f(x^*(t), u^*(t))=1.$$

Доказать, что $u^*(t)$ есть оптимальное управление и что $t^*=T(x_0)$. Мы далее заметим, что геометрические места точек $T(x)=\text{const}$ являются *изохронными гиперповерхностями*. При соответствующем ослаблении условий дифференцируемости на $T(x)$ этими методами можно исследовать весьма общие процессы оптимальные по быстродействию.

3. Рассмотрим управляемый процесс

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u) \quad \text{в} \quad R^n,$$

с измеримыми управлениями $u(t)$ и с замкнутой ограничивающей областью $\Omega\subset R^m$ с гладкой границей (как и в следствии из теоремы 7). Предположим, что для каждой точки $(\eta, x)\in R^n\times R^n$ в области Ω найдется ровно одна точка $u^0=u^0(\eta, x)$, в которой функция $-1+\eta f(x, u)$ достигает максимума $H^0(\eta, x)$, причем $u^0(\eta, x)$ гладко зависит от (η, x).

Пусть $u^*(t)$ $(0\leqslant t\leqslant t^*)$ — оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему из заданного начального состояния x_0 в конечное x_1 по траектории $x^*(t)$ и пусть $\eta^*(t)$ — соответствующее нетривиальное сопряженное решение, удовлетворяющее принципу максимума

$$-1+\eta^*(t)\,f(x^*(t), u^*(t))=H^0(\eta^*(t), x^*(t))$$

почти всюду. Требуется доказать, что $(x^*(t), \eta^*(t))$ есть решение гамильтоновой системы

$$\dot{x}=\frac{\partial H^0}{\partial\eta}, \quad \dot{\eta}=-\frac{\partial H^0}{\partial x}, \quad x(0)=x_0, \quad x(t^*)=x_1.$$

4. Рассмотрим управляемый процесс

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x, t, u) \quad \text{в} \quad R^n,$$

где $f\in C^1(R^{n+1+m})$, с начальным и конечным состояниями x_0 и x_1 и ограни-

ченными измеримыми управлениями $u(t)$ на фиксированном конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, лежащими в ограничивающем множестве $\Omega \subset R^m$. Два функционала качества

$$C(u)=\int_{t_0}^{T} f_1^0(x, t, u)\,dt \quad \text{и} \quad C_2(u)=\int_{t_0}^{T} f_2^0(x, t, u)\,dt$$

с функциями f_1^0 и f_2^0, принадлежащими классу C^1 по всем переменным, по определению, эквивалентны, если

$$f_2^0(x, t, u)=f_1^0(x, t, u)-\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial x} f(x, t, u)$$

для некоторой действительной функции $S(x, t)$ класса C^1 из пространства R^{n+1}. Доказать, что оптимальное управление для системы $\mathscr{S}$ с критерием качества C_1 является также оптимальным для $\mathscr{S}$ с показателем качества C_2.

5. Рассмотрим управляемый процесс

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, t, u) \quad \text{в} \quad R^n,$$

с начальным состоянием x_0, целевым множеством $G \subset R^n$, и ограниченными измеримыми управлениями $u(t)$, определенными на фиксированном конечном интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и лежащими в ограничивающем множестве $\Omega \subset R^m$. Пусть критерий качества определяется выражением

$$C(u)=\int_{t_0}^{T} f^0(x, t, u)\,dt,$$

где функции f и f^0 принадлежат классу C^1 по всем аргументам. Пр едположим что имеется функция $\bar{u}(x, t)$ из C^1 в R^{n+1} такая, что:

(a) $\bar{u}(x, t)$ лежит в Ω для всех $(x, t) \in R^{n+1}$;

(b) $f^0(x, t, \bar{u}(x, t)) \equiv 0$;

(c) $f^0(x, t, u)>0$, если $u \neq \bar{u}(x, t)$ для $u \in \Omega$ и всех (x, t).

Пусть $x^*(t)$ есть решение уравнения

$$\dot{x}=f(x, t, \bar{u}(x, t)), \quad x(t_0)=x_0,$$

и допустим, что $x^*(T) \in G$. Доказать, что $u^*(t)=\bar{u}(x^*(t), t)$ есть оптимальное управление и $x^*(t)$ есть соответствующая траектория.

6. Рассмотрим управляемый процесс

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, t, u) \quad \text{в} \quad R^{n+1+m},$$

где $f \in C^1(R^{n+1+m})$ с начальным состоянием x_0 при $t=t_0$ и компактным целевым множеством $G \subset R^n$. Управления суть измеримые функции $u(t)$, определенные на различных конечных интервалах $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, и принадлежащие компактному ограничивающему множеству $\Omega \subset R^m$. Допустим, что выполнены обычные условия, которые гарантируют существование управления, оптимального по быстродействию:

(a) $xf(x, t, u) \leqslant \text{const}(|x^2|+1)$ для всех соответствующих (x, t, u);

(b) $V(x, t)=\{f(x, t, u) \mid u \in \Omega\}$ является всегда выпуклым:

(c) существует по крайней мере одно допустимое управление, которое переводит точку x_0 в G.

По определению две задачи, $P=\{f, x_0, t_0, G, \Omega, V\}$ и $\hat{P}=\{\hat{f}, x_0, t_0, G, \hat{\Omega}, \hat{V}\}$, эквивалентны, если $V(x, t)=\hat{V}(x, t)$ для всех (x, t).

Доказать, что тогда оптимальная траектория $x^*(t)$ для P является также оптимальной траекторией для $\hat{P}$ и, следовательно, минимальное оптимальное

время t^* (но не оптимальное управление) должно быть одинаковым для обеих задач.

7. Рассмотрим задачи управления типа, описанного в задаче 6, приведенной выше.

(a) Предположим, что $\hat{V}(x, t) \supset V(x, t)$ для всех (x, t). Показать, что каждая траектория $x(t)$, соответствующая исходным данным задачи P, совпадает с аналогичной траекторией для задачи $\hat{P}$ и, следовательно, $\hat{t}^* \leqslant t^*$.

(b) Допустим, что для каждого $\varepsilon > 0$ имеется задача управления $P(\varepsilon) = \{f_\varepsilon, x_0, t_0, G, \Omega_\varepsilon, V_\varepsilon\}$, причем $V_\varepsilon \supset V$ и $\operatorname{dist}(V_\varepsilon, V) \leqslant \varepsilon$. Показать, что для некоторой подпоследовательности $\varepsilon(k) \to 0$ оптимальные траектории $x^*_{\varepsilon(k)}(t$ сходятся равномерно к $x^*(t)$—оптимальной траектории для задачи $P(0) = P$. При этом $t^*_{\varepsilon(k)} \to t^*$.

(c) Рассмотрим задачу P в R^2,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u,$$

с заданной начальной точкой (x_0^1, x_0^2) при $t_0 = 0$ и целевой точкой $(0, 0)$ и ограничивающим множеством Ω: $-1 \leqslant u(t) \leqslant 1$. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим задачу $P(\varepsilon)$, определяемую системой

$$\dot{x}^1 = x^2 + u^1, \quad \dot{x}^2 = -x^1 + u^2,$$

при ограничении $(u^1)^2 + \varepsilon^2 (u^2)^2 \leqslant \varepsilon^2$ в R^2. Показать, что задача $P(\varepsilon)$ сходится к $P(0) = P$ в смысле, указанном выше. Показать, что гладкое управление с обратной связью $u^0(\eta, x, \varepsilon)$ для задачи $P(\varepsilon)$ существует и максимизирует гамильтониан

$$\max_{u \in \Omega(\varepsilon)} [-1 + f(x, u, \varepsilon)] = H^0(\eta, x, \varepsilon)$$

в смысле теоремы 8. Вычислить $u^0(\eta, x, \varepsilon)$ и $H^0(\eta, x, \varepsilon)$.

8. Рассмотрим автономный линейный процесс в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с критерием качества $C(u) = \int\limits_0^T f^0(x, u)\, dt$, как в теореме 9. Предположим, что $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ есть управление, принадлежащее внутренности ограничивающего множества $\Omega \subset R^m$. Установить достаточные условия того, чтобы управление $u^*(t)$ было локально оптимальным.

ГЛАВА 6

СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ: УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

В первом разделе настоящей главы исследуются понятия управляемости и наблюдаемости для общих нелинейных управляемых процессов. Здесь удается получить обобщение в локальном смысле результатов главы 2. В разделе 6.2 рассматриваются различные концепции устойчивости, используемые в качественной теории управляемых систем и при изучении областей управляемости.

6.1. Управляемость и наблюдаемость для нелинейных процессов

Основные качественные понятия (полной) управляемости и наблюдаемости, которые были развиты в главе 2 для линейных процессов, будут распространены здесь на нелинейные процессы общего вида. Для нелинейных процессов обычно удается получить лишь локальные критерии и результаты, а не глобальную теорию, которая разработана для линейных систем. Мы начнем с рассмотрения задачи о приведении системы из некоторой окрестности начала координат в точности в начало координат, сначала при помощи гладкого управления, а затем при помощи релейного управления.

Определение. Рассмотрим управляемый процесс в R^n,

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

где $f \in C^1(R^n \times \Omega)$, а Ω есть ограничивающее множество в R^m. Область $\mathcal{C}$ нуль-управляемости определяется как множество начальных точек $x_0 \in R^n$, каждую из которых можно привести в $x_1 = 0$ посредством ограниченных измеримых управлений $u(t) \subset \Omega$, определенных на некотором конечном отрезке времени. Если $\mathcal{C}$ содержит открытую окрестность точки $x_1 = 0$, то говорят, что $\mathcal{S}$ локально управляема (вблизи нуля).

Замечание. Ясно, что множество $\mathcal{C}$ является связным, так как каждая точка в $\mathcal{C}$ соединена с началом координат непрерыв-

ной кривой решения, целиком лежащего внутри $\mathscr{C}$. Множество $\mathscr{C}$ является открытым в R^n тогда и только тогда, когда оно содержит окрестность точки $x_1 = 0$. Это следует из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от начальных условий. Предоставляем читателю убедиться, что для локального анализа системы в окрестности точки $x_1 = 0$ достаточно, чтобы функция $f(x, u)$ была определена только для x, близких к нулю.

Для линейной системы в R^n,

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с управлением $u = 0$, лежащим внутри $\Omega \subset R^m$, область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости является открытой тогда и только тогда, когда система $\mathscr{L}$ является вполне управляемой в алгебраическом смысле

$$\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n.$$

Нижеследующий пример показывает, что в нелинейном случае это алгебраическое условие полной управляемости не является необходимым для того, чтобы область $\mathscr{C}$ была открытой.

Пример. Рассмотрим нелинейную систему в R^2:

$$\dot{x} = -x + u, \quad \dot{y} = -y - x^3,$$

с ограничением Ω: $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Линейное приближение этой системы вблизи нуля имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + Bu,$$

где $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Отметим, что линейная аппроксимация является невырожденной аппроксимацией, так как матрица A не особая. И так как

$$\operatorname{rank}[B, AB] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2,$$

то алгебраический критерий не выполняется, хотя исходная нелинейная система имеет открытую область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости, т. е. каждое начальное состояние (x_0, y_0) влизи $(0, 0)$ можно привести к началу координат за конечное время. Для того чтобы доказать, что область $\mathscr{C}$ является открытой, мы сначала исследуем две кривые, Γ_+ и Γ_-, ведущие непосредственно в начало координат за конечное время и соответствующие управлениям $u(t) \equiv -1$ и $u(t) \equiv +1$. Эти две кривые $\Gamma_\pm$ в окрестности нуля хорошо аппроксимируются положительным и отрицательным лучами

оси x. Так как радиальная координата вдоль каждого свободного решения [где $u(t) \equiv 0$] удовлетворяет уравнению

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2) - yx^3 < 0,$$

то имеется круг D, внутри которого каждое решение подходит к началу координат монотонно. Мы покажем, что каждая точка в D может быть переведена под действием некоторого управления, не выводящего ее из D, на одну из кривых Γ_+ или Γ_- и, следовательно, может быть приведена в начало координат.

Будем следовать по траектории свободного решения, начинающейся в точке (x_0, y_0), из круга D до тех пор, пока эта траектория $(x(t), y(t))$ не достигнет точки (x_1, y_1), близкой к точке $(0, 0)$. Предположим, что точка (x_1, y_1) лежит выше $\Gamma_- \cup \Gamma_+$. Тогда, применяя управление $u(t) = +1$, за короткое время достигаем точки (x_2, y_2), лежащей выше кривой $\Gamma_- \cup \Gamma_+$ (если только эта кривая $\Gamma_\pm$ не пересечена) при $x_2 > 0$. Теперь применяем управление $u(t) = x_2$, так что $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = -y - (x_2)^3$. Тогда траектория перемещается вниз по линии $x = x_2$ до тех пор, пока она не встретит кривую Γ_+. Случай, когда точка (x_1, y_1) лежит ниже $\Gamma_- \cup \Gamma_+$, рассматривается аналогично. В каждом из этих случаев точку (x_0, y_0) можно привести в начало координат за конечное время и, таким образом, $D \subset \mathscr{C}$ и $\mathscr{C}$ содержит окрестность начала координат и является открытым множеством в R^2.

Теорема 1. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u), \quad f \in C^1 \ \textit{в} \ R^{n+m},$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, *содержащим внутри себя точку* $u = 0$.

Предположим, что:

(a) $f(0, 0) = 0$,

(b) $\operatorname{rank}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$,

где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \textit{и} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0).$$

Тогда область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости открыта в R^n.

Доказательство. Мы рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\mathscr{S}$ с обращенным временем

$$(\mathscr{S}_-) \qquad \dot{x} = -f(x, u)$$

и докажем, что концевые точки $x(1)$ траекторий системы $\mathscr{S}_-$, начинающихся в точке $x(0) = 0$, покрывают открытую окрестность N точки $x = 0$. Тогда, вновь обращая направление времени для каждого из соответствующих управлений, мы замечаем, что каждую точку окрестности N можно привести в начало координат

вдоль решений системы $\mathcal{S}$. Отсюда следует, что область $\mathscr{C}$ является открытой, что и требуется.

Так как $f(0, 0)=0$, то каждая траектория $x(t)$ системы $\mathcal{S}_-$ с начальной точкой $x(0)=0$ определена на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, при условии, что мы берем управления $u(t)$, у которых $|u(t)|<\varepsilon$, где ε — соответствующая малая величина. Впредь мы налагаем это ограничение на все управления. Заметим, что линейная система

$$(\mathscr{L}_-) \qquad \dot{x} = -Ax - Bu$$

обладает свойством управляемости и, таким образом, существуют такие управления $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$, определенные на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ со значениями в R^m, что соответствующие им решения системы уравнений $\mathscr{L}_-$ переводят начало координат в независимые точки, лежащие на положительных координатных осях в R^n. В самом деле, мы можем взять каждое из этих управлений бесконечно дифференцируемым (класса C^∞) и таким малым, что вектор

$$u(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1 u_1(t) + \xi_2 u_2(t) + \ldots + \xi_n u_n(t)$$

удовлетворяет ограничениям

$$|u(t, \xi)| < \varepsilon \quad \text{на} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i| \leqslant 1.$$

Пусть теперь $x(t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = x(t, \xi)$ есть траектория системы $\mathcal{S}_-$, начинающаяся в точке $x(0, \xi)=0$ для каждого из управлений $u(t, \xi)$. Рассмотрим дифференцируемое отображение окрестности точки $\xi=0$ в R^n

$$\xi \longrightarrow x(1, \xi).$$

Мы покажем, что образы $x(1, \xi)$ покрывают открытую окрестность N начала координат в R^n. Заметим, что $x(t, 0)=0$ и, следовательно, $x(1, 0)=0$. Мы покажем, что матрица

$$Z(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)\Big|_{\xi=0}$$

является неособой при $t=1$, и тогда нужный нам результат будет следовать из теоремы о неявной функции.

Так как управлению $u(t, \xi)$ соответствует траектория $x(t, \xi)$, такая, что $x(0, \xi)=0$, то имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, \xi) = -f(x(t, \xi), u(t, \xi))$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \xi} = -f_x(x(t, \xi), u(t, \xi))\frac{\partial x}{\partial \xi} - f_u(x(t, \xi)\, u(t, \xi))\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Учитывая, что $x(t, 0)=0$, $u(t, 0)=0$, положим

$$\dot{Z}(t) = -A\dot{Z} - B[u_1, u_2, \ldots, u_n],$$

где последняя матрица имеет своими столбцами векторы

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_1^m \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad u_n = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^m \end{bmatrix}.$$

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ есть столбцы матрицы Z_1, так что

$$\dot{z}_j(t) = -Az_j - Bu_j, \quad z_j(0) = 0.$$

Но тогда $z_1(1), z_2(1), \ldots, z_n(1)$ суть независимые векторы, так как они обозначают точки на положительных координатных осях пространства R^n. Таким образом, матрица $Z(1)$ является неособой матрицей и теорема о неявных функциях утверждает, что точки $x(1, \xi)$ покрывают открытое множество N, когда вектор ξ изменяется в окрестности нуля. Следовательно, $\mathscr{C}$ содержит N и $\mathscr{C}$ является открытым множеством в R^n. Теорема доказана.

В доказанной теореме мы могли использовать управления $u(t)$ класса C^∞, которые обращаются в нуль в окрестности точек $t=0$ и $t=1$ и переводят точки множества N в точку $x=0$ вдоль решений системы $\mathscr{S}$. Это дает нам возможность использовать гладкие управления для глобального управления нелинейными процессами, как показано в следующем ниже примере.

Пример. Рассмотрим управление нелинейным осциллятором

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = u,$$

т. е. следующую систему на фазовой плоскости:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x, y)y + u$$

с коэффициентом затухания $f(x, y)$, восстанавливающей силой $g(x)$ класса C^1 и ограничением на управление Ω: $|u| \leqslant 1$. Предположим, что

$$f(x, y) > 0, \quad xg(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0$$

и $\lim\limits_{|x|\to\infty} G(x) = \infty$, где $G(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds$.

Мы стремимся перевести начальные точки (x_0, y_0) в начало координат в пространстве R^2. Для свободной системы, т. е. при $u(t) \equiv 0$, определим энергию системы

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x)$$

и вдоль каждого решения будем иметь

$$\dot{E} = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = -y^2 f(x, y) \leqslant 0.$$

Так как каждая кривая $E(x, y) = E_0 > 0$ есть простая замкнутая кривая, окружающая начало координат, и эти кривые упорядочены по включению друг в друга в соответствии со значением постоянной E_0, то свободное движение $(x(t), y(t))$, начинающееся в какой-либо точке (x_0, y_0), должно, оставаясь ограниченным при $t \to +\infty$, пересекать каждую из этих кривых энергии и входить внутрь ограниченной ею области. Если

$$\lim_{t \to \infty} E(x(t), y(t)) = E_\infty > 0,$$

то к некоторой точке (x_∞, y_∞) кривой $E(x, y) = E_\infty$ можно подойти как угодно близко, двигаясь по траектории $(x(t), y(t))$ при $t \to +\infty$. Но решение, начинающееся в (x_∞, y_∞), должно входить во внутренность кривой $E = E_\infty$ (так как $\dot{E} < 0$, если только y не равно нулю, и не существует свободного решения, которое оставалось бы всегда на оси x, кроме единственной критической точки $x = y = 0$). По непрерывности траектория $(x(t), y(t))$ также входит во внутренность кривой $E = E_\infty$, что противоречит выбору числа $E_\infty > 0$. Поэтому $E_\infty = 0$ и каждое свободное решение должно асимптотически приближаться к началу координат.

Теперь линейное приближение к нелинейному управляемому процессу в начале координат записывается в виде уравнения

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{dg}{dx}(0) & -f(0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

которое удовлетворяет условию полной управляемости предыдущей теоремы. Таким образом, мы заключаем, что область нуль-управляемости для нелинейного осциллятора есть $\mathscr{C} = R^2$. В самом деле, каждое начальное состояние в R^2 может быть переведено в начало координат за конечное время посредством управления $u(t)$ класса C^∞, удовлетворяющего какому-нибудь предварительно установленному ограничению $|u(t)| < \varepsilon$.

Следствие. *Рассмотрим скалярный процесс*

$$x^{(n)} - f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, u) = 0$$

или соответствующую систему $\mathscr{S}$ в фазовом пространстве R^n, где $f \in C^1$ в R^{n+1}, а ограничивающее множество $\Omega \subset R^1$, определяется условием $|u| \leqslant 1$.

Предположим, что:

(a) $f(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0$,

(b) $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, \ldots, 0, 0) \neq 0$.

Тогда область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости является открытой в R^n.

Доказательство. Система в пространстве R^n имеет вид

$$(\mathscr{S})\quad \dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = x^3, \quad \ldots, \quad \dot{x}^{n-1} = x^n, \quad \dot{x}^n = f(x^1, x^2, \ldots, x^n, u).$$

Линейное приближение вблизи начала координат описывается матрицами

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(0)} & f_2^{(0)} & & & \dots & f_n^{(0)} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot\ \cdot \\ f_u^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Управляемость этой линейной системы уже была показана в главе 2, и она легко проверяется непосредственными вычислениями. Поэтому условия предыдущей теоремы выполняются, и область нуль-управляемости $\mathscr{C}$ является открытым множеством в пространстве R^n.

Теперь мы вернемся к задаче релейной управляемости. Принцип релейности устанавливает, что любое состояние управляемой системы, которое может быть получено варьированием управления, может быть также получено с помощью управления, которое может принимать лишь экстремальные значения в области управния. Выражение «релейность» имеет в виду мгновенное переключение с одного из этих экстремальных значений на другое. Технически это реализуется весьма простой конструкцией управляющего прибора, у которого имеется только конечное число позиций для рычагов управления (которые, например, соответствуют вершинам полиэдра, где изменяются значения управления), а не континуум возможных позиций (что соответствовало бы всем точкам пространственного полиэдра), и следовательно, релейный принцип имеет важное значение для приложений.

Определение. Рассмотрим управляемый процесс в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u), \ f\in C^1 \ \text{ в } \ R^{n+m},$$

с ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$ и начальным состоянием $x_0\in R^n$ при $t_0=0$. Для каждого подмножества $Z\subset\Omega$ рассмотрим множество $K_Z(t_1)$ достижимости, состоящее из всех точек $\{x(t_1)\}$, достигаемых траекториями, соответствующими ограниченным измеримым управлениям $u(t)\subset Z\subset\Omega$ на интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$. Мы говорим, что множество Z обладает свойством релейности, если

$$K_Z(t_1)\equiv K_\Omega(t_1) \quad \text{для всех} \quad t_1\geqslant 0.$$

Основным результатом относительно релейного управления линейными системами является следующая ниже теорема, которая доказывается так же, как и теорема 2.4. Тем же методом решается и задача 14 в главе 2.

Теорема 2. *Рассмотрим линейный автономный процесс в* R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+Bu$$

с начальным состоянием $x_0\in R^n$ *в момент* $t_0=0$ *и компактным*

ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. *Если компактное подмножество* $Z \subset \Omega$ *имеет ту же самую выпуклую оболочку, т. е.*

$$H(Z) = H(\Omega),$$

то множество Z *обладает свойством релейности*

$$K_Z(t_1) \equiv K_\Omega(t_1) \quad \text{для всех} \quad t_1 \geqslant 0.$$

С другой стороны, если процесс $\mathcal{S}$ *обладает свойством управляемости, множество* $H(\Omega)$ *имеет непустую внутренность в* R^n, *и* $\operatorname{rank} B = m$, *то компактное подмножество* $Z \subset \Omega$, *обладающее свойством релейности*

$$K_Z(t_1) \equiv K_\Omega(t_1) \quad \text{для всех} \quad t_1 \geqslant 0,$$

необходимо имеет ту же самую выпуклую оболочку

$$H(Z) = H(\Omega).$$

Следствие. *Рассмотрим линейный автономный процесс* в R^n

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. *Если:*

1) *множество* $H(\Omega)$ *содержит точку* $u = 0$ *в своей внутренности,*

2) *система* $\mathcal{L}$ *обладает свойством управляемости,*

то область $\mathscr{C}$ *нуль-управляемости является открытой в* R^n.

Доказательство. Так как $H(\Omega) = H(H(\Omega))$, то начала координат можно достигнуть из начальной точки x_0 при помощи управлений из $H(\Omega)$ только в том случае, если оно достижимо из точки x_0 при помощи управлений из Ω. Но имеется открытая окрестность N точки $x_1 = 0$, состоящая из точек, которые можно перевести в начало координат, используя управления из $H(\Omega)$. Таким образом, $\mathscr{C}$ содержит N и $\mathscr{C}$ является открытой областью в R^n. Следствие доказано.

Мы не будем здесь обсуждать принцип релейности для нелинейных процессов в зависимости от глобальной структуры множества достижимости K_Ω, а сконцентрируем внимание на локальной задаче приведения системы к началу координат в R^n. Таким образом, мы будем искать такие подмножества $Z \subset \Omega$, для которых область $\mathscr{C}_Z$ нуль-управляемости с управлениями из Z, является открытым подмножеством в R^n. Если множество $\mathscr{C}_Z$ является открытым, будем говорить, что множество Z обладает *нуль-релейным* свойством.

Следующий пример показывает, что обобщение приведенного выше следствия на нелинейный случай требует некоторой осторожности (даже если речь идет о локальной задаче).

Пример. Рассмотрим скалярный процесс в R^1:

$$\dot{x} = u + u^2 \quad \text{с ограничением } \Omega\text{: } |u| = 2.$$

Выпуклая оболочка $H(\Omega)$ есть сегмент $-2 \leqslant u \leqslant 2$, соединяющий две точки, которые включают в себя Ω, и, конечно, $H(\Omega)$ содержит точку $u=0$ в своей внутренности. Линейное приближение этого процесса в окрестности точки $x=0$, $u=0$ запишется в виде уравнения

$$\dot{x}=u,$$

которое, как легко видеть, удовлетворяет обычному критерию управляемости. Однако исходный нелинейный процес имеет область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости $x \leqslant 0$, в которой не содержится никакая окрестность начала координат. Это следует из того, что $u+u^2>0$ при $|u|=2$.

Для того чтобы получить интересный результат относительно релейного управления нелинейными процессами, мы должны прежде обобщить некоторые теоремы Ляпунова о выпуклости области значений векторной меры (которые обсуждались в дополнении к главе 2). Рассмотрим компактный интервал времени $\mathscr{I}$: $0 \leqslant t \leqslant T$ и σ-алгебру $\mathscr{B}$ всех измеримых по Лебегу подмножеств $\mathscr{I}$ в соответствии с понятиями и обозначениями, предшествующими лемме 4А из дополнения к главе 2. Пусть μ будет обычной мерой Лебега на $\mathscr{B}$, так что $\{\mathscr{I}, \mathscr{B}, \mu\}$ есть измеримая σ-алгебра. На $\mathscr{B}$ мы определим обычную метрику посредством формулы

$$\rho(E, F)=\mu(E \cup F)-\mu(E \cap F), \quad E, F \in \mathscr{B}.$$

Как мы отметили в главе 2, существует топологическое отображение $\alpha \to D_\alpha$ сегмента $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ в σ-алгебру $\mathscr{B}$, обладающее свойствами линейности и монотонности относительно меры μ, т. е. $\mu(D_\alpha)=\alpha\mu(\mathscr{I})$ и $D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$.

Пусть $\{\mathscr{I}, \mathscr{A}, \mu\}$ есть измеримая σ-алгебра с указанной выше метрикой. *k-разбиение* интервала $\mathscr{I}$ есть упорядоченная совокупность из k множеств $A_1, \ldots, A_k$ в $\mathscr{A}$, для которых $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k=\mathscr{I}$ и $A_i \cap A_j$ пусто для $i \neq j$. Совокупность $\mathscr{P}_k$ всех k-разбиений интервала $\mathscr{I}$ есть подмножество k-кратного произведения $\mathscr{B}$ на себя, и таким образом мы определяем соответствующую топологию на подмножестве $\mathscr{P}_k$, которая индуцируется на нем топологией k-кратного произведения. Пусть теперь S будет любым топологическим пространством, и мы определим непрерывное семейство k-разбиений компактного интервала времени, которое будет непрерывным отображением S в $\mathscr{P}_k$.

Лемма. *Пусть $h_1(t), \ldots, h_k(t)$ есть интегрируемые n-мерные вектор-функции на конечном действительном интервале $\mathscr{I}$: $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть S есть $(k-1)$-симплекс с барицентрическими координатами*

$$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i=1.$$

Тогда существует непрерывное семейство k-разбиений интервала $\mathcal{J}$ в $\mathcal{B}$

$$\alpha \longrightarrow \{A_1(\alpha), \ldots, A_k(\alpha)\}$$

такое, что интегрируемая функция

$$h(t, \alpha) = \begin{cases} h_1(t) & \text{при} \quad t \in A_1(\alpha), \\ \ldots & \ldots \\ h_k(t) & \text{при} \quad t \in A_k(\alpha) \end{cases}$$

удовлетворяет условию выпуклости

$$\int_0^T h(t, \alpha)\, dt = \alpha_1 \int_0^T h_1(t)\, dt + \ldots + \alpha_k \int_0^T h_k(t)\, dt.$$

Доказательство. Существует σ-подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, такая, что kn-мерный вектор $h^* = (h_1, \ldots, h_k)$ удовлетворяет тождеству леммы 4А, приведенной ранее,

$$\int_D h^*\, dt = \frac{\mu(D)}{\mu(\mathcal{J})} \int_{\mathcal{J}} h^*\, dt$$

для каждого множества $D \in \mathcal{A}$. Пусть теперь D_β будет топологический образ сегмента $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ в $\mathcal{A}$, такой, что $\mu(D_\beta) = \beta\mu(\mathcal{J})$ и $D_{\beta_1} \subset D_{\beta_2}$, тогда и только тогда, когда $\beta_1 \leqslant \beta_2$. Для каждой точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ симплекса S мы определим k-разбиение сегмента $\mathcal{J}$ в $\mathcal{A}$ следующим образом:

$A_1(\alpha) = D_{\alpha_1}$, так что $\mu(A_1) = \alpha_1\mu(\mathcal{J})$;
$A_2(\alpha) = D_{\alpha_1+\alpha_2} - D_{\alpha_1}$, так что $\mu(A_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)\mu(\mathcal{J}) - \alpha_1\mu(\mathcal{J}) = \alpha_2\mu(\mathcal{J})$,
$A_3(\alpha) = D_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} - D_{\alpha_1+\alpha_2}$, так что $\mu(A_3) = \alpha_3\mu(\mathcal{J})$;
. . . .
$A_k(\alpha) = D_1 - D_{1-\alpha_k}$, так что $\mu(A_k) = \alpha_k\mu(\mathcal{J})$.

Тогда легко проверить, что

$$\alpha \longrightarrow \{A_1(\alpha), \ldots, A_k(\alpha)\}$$

является непрерывным семейством k-разбиений интервала $\mathcal{J}$ в σ-подалгебре $\mathcal{A}$. Так как каждое $A_i(\alpha) \in \mathcal{A}$, то, интегрируя компоненты вектора h^*, получаем

$$\int_{A_i(\alpha)} h_i\, dt = \alpha_i \int_{\mathcal{J}} h_i\, dt, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Таким образом,

$$\int_0^T h(t, \alpha)\, dt = \alpha_1 \int_0^T h_1(t)\, dt + \ldots + \alpha_k \int_0^T h_k(t)\, dt,$$

что и требуется. Лемма доказана.

Теорема 3. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u), \quad f \in C^1 \quad \text{в} \quad R^{n+m}.$$

Допустим, что:

(a) $f(0, 0) = 0$,

(b) $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$, *где* $A = f_x(0, 0)$, $B = f_u(0, 0)$.

Пусть π *есть фиксированный выпуклый многогранник в* R^m, *содержащий начало координат внутри себя. Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для ограничивающего множества* Ω, *состоящего из конечного множества вершин гомотетичного (радиально подобного) многогранника* $\varepsilon\pi$, *область* $\mathscr{C}$ *нуль-управляемости является открытым множеством в* R^n.

Доказательство. Мы проведем доказательство лишь для случая, когда π есть m-мерный симплекс с вершинами $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_{m+1}$. Но этот метод годится и в общем случае. Пусть управление происходит на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Сначала мы ограничим модули управлений $u(t)$ так, чтобы соответствующие траектории, начинающиеся в $x = 0$, были определены на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, а их концевые точки покрыли открытый шар, окружающий точку $x = 0$. Тогда, обращая знак времени как в теореме 1, мы покажем, что область нуль-управляемости открыта.

Имеется граница $\varepsilon_0 > 0$, такая, что для каждого управления $u(t)$, удовлетворяющего условию

$$|u(t)| \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \text{на} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

траектория $x(t)$ системы

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(0) = 0$$

и траектория $x_L(t)$ линейной системы

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu(t), \quad x_L(0) = 0$$

определены на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ и удовлетворяют соответствующему ограничению

$$|x(t)| + |x_L(t)| \leqslant c(\varepsilon) < 1,$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = 0$. Рассмотрим ограничивающее множество $\bar{\Omega}$ вершин $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{m+1}$ многогранника, подобного π, но с диаметром, меньшим, чем ε_0. Для линейного процесса $\mathcal{L}$ множество достижимости $\bar{K}_L(1)$ для решений $x_L(t)$, начинающихся в начале координат и для управлений из $\bar{\Omega}$, является выпуклым множеством в R^n, содержащим точку $x = 0$ в своей внутренности. Пусть $\bar{u}_1(t), \ldots, \bar{u}_{n+1}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — такие управления, что соответствующие им траектории $\bar{x}_{L,1}(t), \ldots, \bar{x}_{L,n+1}(t)$ линейной системы ведут к вершинам

n-мерного симплекса $\bar{S}$ с центром в начале координат. Обозначим вписанные и описанные радиусы симплекса $\bar{S}$ через $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ соответственно.

Возьмем барицентрические координаты $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ в $\bar{S}$ и используем приведенную выше лемму для того, чтобы получить непрерывное семейство $(n+1)$-разбиений интервала времени $\mathcal{I} = [0 \leqslant t \leqslant 1]$ для функций

$$h_i(t) = e^{-At} B\bar{u}_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n+1,$$

так, чтобы функция

$$h(t, \alpha) = h_i(t) \quad \text{при} \quad t \in A_i(\alpha), \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

удовлетворяла условиям выпуклости

$$\int_0^1 h(t, \alpha)\, dt = \alpha_1 \int_0^1 h_1(t) dt + \ldots + \alpha_{n+1} \int_0^1 h_{n+1}(t)\, dt.$$

Но это означает, что семейство управлений

$$\bar{u}(t, \alpha) = \bar{u}_i(t) \quad \text{при} \quad t \in A_i(\alpha), \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

определяет траекторию $\bar{x}_L(t, \alpha)$ линейной системы, такую, что

$$\bar{x}_L(1, \alpha) = \alpha_1 \bar{x}_{L,1}(1) + \ldots + \alpha_{n+1} \bar{x}_{L,n+1}(1).$$

Поэтому отображение множества $\bar{S}$ в пространство R^n, определенное посредством решений линейной системы

$$\alpha \longrightarrow \bar{x}_L(1, \alpha)$$

есть тождественное отображение на $\bar{S}$. Теперь повторим это построение для ограничивающего множества $\Omega = \varepsilon\bar{\Omega}$, где ε — достаточно малое число. Мы воспользуемся семейством управлений $u(t, \alpha) = \varepsilon\bar{u}(t, \alpha)$ для того, чтобы получить траектории линейной системы $x_L(t, \alpha) = \varepsilon\bar{x}_L(t, \alpha)$. Тогда, если α — барицентрические координаты симплекса $S = \varepsilon\bar{S}$, то мы получим, что

$$\alpha \longrightarrow x_L(1, \alpha)$$

есть тождественное отображение симплекса S на себя. Мы сравним это отображение симплекса S с соответствующим отображением симплекса S, определенным посредством нелинейной системы

$$\alpha \longrightarrow x(1, \alpha).$$

Здесь $x(t, \alpha)$ есть траектория системы $\mathcal{S}$ $(x(0, \alpha) = 0)$, соответствующая управлению $u(t, \alpha)$; $x_L(t, \alpha)$ есть траектория линейной системы $\mathcal{L}$, аппроксимирующей $\mathcal{S}$. Ясно, что отображение $\alpha \longrightarrow x(1, \alpha)$ является непрерывным на симплексе S. Мы покажем,

что два отображения симплекса S в R^2, определенные посредством $x_L(1, \alpha)$ и $x(1, \alpha)$, являются согласованными на границе S (при условии, что $\varepsilon > 0$ достаточно мало́). Пользуясь топологическим введением из главы 4 (которое основывается на теореме Брауэра о неподвижной точке), получаем, что множество $K(1) = \{x(1, \alpha) \mid \alpha \in S\}$ покрывает окрестность начала координат в R^n. Таким образом, главная техническая трудность, остающаяся в доказательстве, заключается в получении оценки для величины $|x(1, \alpha) - x_L(1, \alpha)|$, когда α описывает границу симплекса S.

Для требуемых оценок мы фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|u(t, \alpha)| < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$$|x(t, \alpha)| + |x_L(t, \alpha)| < c(\varepsilon), \quad |x_L(t, \alpha)| < c_3\varepsilon$$

и все эти функции, определенные на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат в области, где

$$\text{и}\, f(x_L(t, \alpha), u(t, \alpha)) - Ax_L(t, \alpha) - Bu(t, \alpha)| \leqslant c_4 |x_L(t, \alpha)| + c_4 |(u(t, \alpha)|$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)\right| \leqslant |A| + 1,$$

где c_3 есть константа, а c_4 определяется (явным образом, ниже) через постоянные $|A|$, $|B|$, c_1, c_2 и c_3. Теперь имеем

$$|x(t, \alpha) - x_L(t, \alpha)| \leqslant \int_0^t |f(x(s, \alpha) u(s, \alpha)) - Ax_L(s, \alpha) - Bu(s, \alpha)| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |f(x(s, \alpha), u(s, \alpha)) - f(x_L(s, \alpha), u(s, \alpha))| ds +$$

$$+ \int_0^t |f(x_L(s, \alpha), u(s, \alpha)) - Ax_L(s, \alpha) - Bu(s, \alpha)| ds,$$

так что

$$|x(t, \alpha) - x_L(t, \alpha)| \leqslant (|A| + 1) \int_0^t |x(s, \alpha) - x_L(s, \alpha)| ds + c_4(c_3 + 1)\varepsilon t.$$

Но анализ этого интегрального неравенства дает

$$|x(1, \alpha) - x_L(1, \alpha)| \leqslant e^{|A|+1} c_4 [c_3 + 1] \varepsilon.$$

Теперь мы выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что

$$c_4 = \frac{c_1}{2(c_3 + 1)} e^{-|A|-1}$$

и тогда

$$|x(1, \alpha) - x_L(1, \alpha)| \leqslant \frac{c_1}{2} \varepsilon.$$

Таким образом, евклидова норма разности $x(1, \alpha) - x_L(1, \alpha)$ будет меньше, чем $c_1 \frac{\varepsilon}{2}$ для $\alpha \in S$, и мы вспоминаем, что вписанный радиус симплекса S есть $c_1\varepsilon$. На основании топологических теорем, доказанных в топологическом разделе главы 4, мы заключаем, что образ симплекса S при отображении $\alpha \to x(1, \alpha)$, определенном через решение нелинейной системы, покрывает открытый шар N с центром в начале координат в R^n. Окончательно мы должны применить целиком конструкцию и доказательство, развитые для $\mathcal{S}$, к системе с обращенным временем

$$(\mathcal{S}_-) \qquad \dot{x} = -f(x, u),$$

и получить аналогичный открытый шар N_-, с центром в начале координат в R^n. При помощи повторного изменения знака времени мы обнаружим, что каждую начальную точку $x_0 \in N_-$ можно перевести в начало координат посредством процесса $\mathcal{S}$ с некоторым управлением $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, беря значения только в вершинах многогранника $\varepsilon\pi$, для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, требуемая область $\mathcal{C}$ нуль-управляемости процесса $\mathcal{S}$ является открытой в R^n. Теорема доказана.

Заметим теперь, что множество вершин многогранника $\varepsilon\pi$ обладает нуль-релейным свойством всякий раз, когда $\varepsilon > 0$ является достаточно малым. Таким образом, если π есть куб $|u^i| \leqslant 1$ для $i = 1, \ldots, m$, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для каждого $\varepsilon < \varepsilon_1$ имеется шаровая окрестность точки $x = 0$, состоящая из точек, которые можно перевести в начало координат посредством управлений $u(t)$, определенных на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ по формулам

$$|u^i(t)| = \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Некоторые новые работы распространяют методы теории релейного управления на изучение управлений, которые являются кусочно-постоянными и имеют лишь конечное число переключений. Имеются также некоторые результаты по релейному управлению в замкнутых системах. Однако эти новые исследования относятся главным образом к линейным системам, и аналогичной трактовки для общей нелинейной теории в настоящее время не имеется. Поэтому здесь мы не приводим этих результатов.

Теперь мы вернемся к понятию наблюдаемого процесса, которое было изложено для линейных систем в главе 2. Рассмотрим действительный автономный управляемый процесс в R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u),$$

с входным или управляющим вектором $u \in R^m$ и решением или вектором состояния $x \in R^n$. Во многих физических ситуациях состояние x непосредственно не известно, а наблюдаются или измеряются

в качестве выходного сигнала системы только некоторые функции $h(x)$. В этом случае мы расширяем описание процесса, добавляя уравнение наблюдения или выхода

$$\omega = h(x).$$

Процесс, для которого задано также выходное уравнение

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) \ \text{и} \ \omega = h(x),$$

называется *наблюдаемым* процессом с входным сигналом $u \in R^m$, выходным сигналом $\omega \in R^r$ и состоянием $x \in R^n$.

Определение. Процесс в R^n,

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) \ \text{и} \ \omega = h(x),$$

является *(вполне) наблюдаемым*, если: для каждого ограниченного измеримого входного сигнала $u(t)$, определенного на некотором интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и для любых двух решений $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ с различными начальными состояниями, выходные сигналы $h(x(t))$ и $h(\bar{x}(t))$ являются различными, т. е. для каждого управления $u(t)$ имеет место следующее свойство: $h(x(t)) \equiv h(\bar{x}(t))$ означает, что $x(t) \equiv \bar{x}(t)$.

Важность свойства наблюдаемости процесса $\mathcal{S}$ состоит в том, что здесь состояние $x(t)$ единственным образом определяется воздействием $u(t)$ и выходным сигналом $\omega(t) = h(x(t))$ без каких-либо измерений состояния в начальный момент времени или в любой последующий момент времени. Таким образом, экспериментальные данные, доставляемые при помощи наблюдений за входным и выходным сигналами, ведут к полному анализу внутренней структуры и динамики процесса $\mathcal{S}$, включающей состояние $x(t)$ и закон его изменения во времени при различных управлениях.

В главе 2 мы рассматривали линейный наблюдаемый процесс в R^n, со входным сигналом $u \in R^m$ и выходным сигналом $\omega \in R^r$,

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu \ \text{и} \ \omega = Hx$$

с постоянными матрицами A, B и H. Процесс был назван (вполне) наблюдаемым, если для нулевого входного сигнала $u(t) \equiv 0$ нулевой выходной сигнал $Hx(t) \equiv 0$ означает, что $x(t) \equiv 0$. Однако, вследствие линейности системы $\mathcal{L}$ это определение совершенно эквивалентно обычному определению (вполне) наблюдаемого процесса. Теорема 13 главы 2 утверждает, что процесс

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu \ \text{и} \ \omega = Hx$$

является (вполне) наблюдаемым тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}[H', A'H', A'^2H', \ldots, A'^{n-1}H'] = n.$$

Так как здесь мы хотим исследовать понятие наблюдаемости

для нелинейного процесса $\mathcal{S}$, мы ограничим анализ рассмотрением лишь окрестности начала координат, как для входного сигнала $u(t)$, так и для выходного сигнала $\omega(t)$. Для того чтобы облегчить обсуждение этой проблемы, мы введем понятие локальной наблюдаемости вблизи начала координат.

Определение. Рассмотрим наблюдаемый процесс в R^n,

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u) \text{ и } \omega=h(x),$$

с функциями $f(x, u)$ и $h(x)$ класса C^1 в окрестности точки $x=u=0$ и $f(0, 0)=0$, $h(0)=0$. Процесс $\mathcal{S}$ называется *локально вполне наблюдаемым* (вблизи начала координат) в случае, если существует $\varepsilon>0$ такое, что для каждого измеримого входного сигнала $u(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ в R^m, удовлетворяющего ограничению $|u(t)|<\varepsilon$, и для любых двух различных решений $x(t)\not\equiv\bar{x}(t)$, где $|x(t)|<\varepsilon$, $|\bar{x}(t)|<\varepsilon$, выходные сигналы также различны, т. е.

$$h(x(t))\not\equiv h(\bar{x}(t)) \text{ на } 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Отметим, что из неравенств $|u(t)|<\varepsilon$ и $|x(0)|<\varepsilon$ следует, что величины $|x(t)|$ и $|h(x(t))|$ являются достаточно малыми на фиксированном интервале времени $0\leqslant t\leqslant 1$. Таким образом, процесс $\mathcal{S}$ является локально наблюдаемым в том случае, когда существует $\varepsilon>0$, такое, что

$$|u(t)|<\varepsilon, \quad |x(0)|<\varepsilon, \quad |\bar{x}(0)|<\varepsilon,$$

и из соотношения

$$h(x(t))\equiv h(\bar{x}(t))$$

следует, что

$$x(0)=\bar{x}(0).$$

Теорема 4. *Рассмотрим наблюдаемый процесс в* R^n,

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x, u), \quad \omega=h(x),$$

$$f,\ h\in C^1 \text{ *в окрестности точки* } x=u=0$$

с входными сигналами $u(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ *в* R^m *и выходными сигналами* $h(x(t))$ *в* R^r.

Предположим, что:

(a) $f(0, 0)=0$ *и* $h(0)=0$;

(b) $\operatorname{rank}[H', A'H', A'^2H', \ldots, A'^{n-1}H']=n$,

где

$$A=f_x(0, 0), \quad H=h_x(0).$$

Тогда $\mathcal{S}$ является локально вполне наблюдаемым процессом вблизи начала координат.

Доказательство. Для каждого измеримого входного сигнала $u(t)$ при t, изменяющемся на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, и для

каждого начального состояния x_0 имеются соответствующее решение $x(t)$ и выходной сигнал $\omega(t)=h(x(t))$, по крайней мере, когда указанные величины являются достаточно малыми. Это соответствие запишем в виде

$$x_0,\ u(t)\longrightarrow \Omega(x_0,\ u)=\omega.$$

Мы хотим показать, что данная пара — входной-выходной сигналы, однозначно определяют состояние системы, определяя значение x_0. Другими словами, уравнение

$$\Omega(x_0, u)=\omega$$

имеет не более одного малого решения $x_0\in R^n$, когда функции u и ω соответствующим образом заданы. Это заключение немедленно следует из теоремы о неявной функции, если ее соответствующим образом перефразировать для функциональных пространств.

Пусть L_∞ есть банахово пространство всех существенно ограниченных измеримых функций $u(t)$, определенных на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ с нормой

$$\|u(t)\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1}[\,|u^1(t)|+|u^2(t)|+\ldots+|u^m(t)|\,],$$

и пусть $C_r[0, 1]$ будет банаховым пространством всех непрерывных функций $\omega(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant 1$ с нормой

$$\|\omega(t)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}[\,|\omega^1(t)|+\ldots+|\omega^r(t)|\,].$$

Тогда $\Omega(x_0, u)$ есть функция, определенная в окрестности U начала координат в $R^n\times L_\infty$ со значениями в пространстве $C_r[0, 1]$. Мы покажем, что $\Omega(x_0, u)$ является функцией класса C^1 в смысле производной по Фреше (см. приведенные ниже уравнения, использующие понятия дифференциального исчисления в банаховом пространстве) и что частная производная $\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_0}(0, 0)$ имеет ранг n. Отсюда будет следовать локальная наблюдаемость процесса $\mathscr{S}$.

Пусть $(\bar{x}_0, \bar{u}_0)$ есть элемент из окрестности U. Рассмотрим некоторую близкую точку $x_0=\bar{x}_0+\Delta x_0$, $u=\bar{u}+\Delta u$, и найдем соответствующие решения $\bar{x}(t)$ и $x(t)=\bar{x}(t)+\Delta x(t)$. Здесь

$$\Delta x(t)=\int_0^t [\,f(x(s), u(s))-f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))]\,ds$$

или

$$\Delta x(t)=\int_0^t\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(s),\ \bar{u}(s))+\varepsilon(s)\right]\Delta x(s)+\left[\frac{\partial f}{\partial u}+\varepsilon(s)\right]\Delta x(s)\right\}ds,$$

где $|\varepsilon(t)|\to 0$ при $(|\Delta x_0|+\|\Delta u\|_\infty)\to 0$. Таким образом, $\Delta x(t)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений,

так что

$$\Delta x(t)=\Phi(t)\,\Delta x_0+\int\limits_0^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(s),\ \bar{u}(s))\,\Delta u(s)\,ds+$$
$$+\,o\,(|\Delta x_0|+\|\Delta u\|_\infty),$$

где $\Phi(t)$ есть матричное решение уравнения

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t))\,\Phi,\quad \Phi(0)=I.$$

Следовательно, отображение (в пространство непрерывных n-мерных векторов)

$$U\longrightarrow C_n[0,\ 1]:\ x_0,\quad u(t)\longrightarrow x(t)$$

принадлежит классу C^1 и (полная) производная в точке $(\bar{x}_0,\ \bar{u}_0)$ есть ограниченное линейное преобразование

$$R^n\times L_\infty\longrightarrow C_n[0,\ 1]:\ \Delta x_0,\ \Delta u\longrightarrow\Phi(t)\,\Delta x_0+$$
$$+\int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\,\frac{\partial f}{\partial u}\,\Delta u(s)\,ds.$$

В частности, эта производная в точке (0, 0) имеет вид

$$\Delta x_0,\ \Delta u\longrightarrow e^{At}\,\Delta x_0+\int\limits_0^t e^{A(t-s)}\,B\Delta u(s)\,ds.$$

Мы должны составить композицию этого отображения $(x_0$ $u(t))\longrightarrow x(t)$ с отображением $C_n[0,\ 1]\longrightarrow C_r[0,\ 1]$: $x(t)\longrightarrow h(x(t))$, которое, как легко видеть, принадлежит классу C^1 вблизи начала координат, с производной в точке $x=0$, равной $\Delta x\longrightarrow H\Delta x$. Следовательно, композиция отображений $(x_0,\ u)\longrightarrow\Omega(x_0,\ u)$ также принадлежит классу C^1 вблизи начала координат и производная, которая является даже равномерно непрерывной в некоторой окрестности начала координат $x_0=0$, $u=0$, может быть вычислена в точке (0, 0) как линейное преобразование

$$\Delta x_0,\ \Delta u\longrightarrow He^{At}\,\Delta x_0+H\int\limits_0^t e^{A(t-s)}B\Delta u(s)\,ds.$$

В частности,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_0}(0,\ 0):\ R^n\longrightarrow C_r[0,\ 1]:\ \Delta x_0\longrightarrow He^{At}\Delta x_0.$$

Ранг матрицы $\frac{\partial\Omega}{\partial x_0}(0,\ 0)$ совпадает с числом линейно независимых столбцов матрицы He^{At} (каждый столбец рассматривается как вектор в C_r [0, 1]). Мы докажем, что число линейно независимых столбцов в матрице He^{At} равно n, в предположении, что

$$\operatorname{rank}[H',\ A'H',\ \ldots,\ A'^{n-1}H']=n.$$

Предположим, что ранг матрицы $\frac{\partial\Omega}{\partial x_0}(0,\ 0)$ меньше, чем n. Тогда существует постоянный n-мерный вектор $\Delta x_0 \neq 0$, такой, что

$$He^{At}\Delta x_0 \equiv 0 \quad \text{на} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Полагая $t = 0$, после повторного дифференцирования получим

$$H\Delta x_0 = 0, \quad HA\Delta x_0 = 0, \ \ldots, \ HA^{n-1}\Delta x_0 = 0$$

или

$$\Delta x_0' H' = 0, \quad \Delta x_0' A' H' = 0, \ \ldots, \ \Delta x_0' A'^{n-1} H' = 0.$$

Таким образом, n-мерные строки матрицы наблюдаемости $[H',\ A'H',\ \ldots,\ A'^{n-1}H']$ являются линейно зависимыми, что противоречит условию теоремы. Поэтому матрица $\frac{\partial\Omega}{\partial x_0}(0,\ 0)$ имеет ранг n и это линейное преобразование является неособым отображением пространства R^n на n-мерное подпространство $C_r[0,\ 1]$. В этом случае теорема о неявной функции (см. упражнения ниже) утверждает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $|u|_\infty < \varepsilon$, $|x_0| < \varepsilon$, $|\bar{x}_0| < \varepsilon$, а соотношение

$$\Omega(x_0,\ u) = \Omega(\bar{x}_0,\ u)$$

влечет за собой равенство $x_0 = \bar{x}_0$. Но это как раз и означает, что процесс $\mathcal{S}$ является локально наблюдаемым. Теорема доказана.

Эта теорема утверждает, что динамика объекта [интерпретируемая вектором состояния $x(t)$] локально наблюдаемой системы $\mathcal{S}$ может быть описана, если полностью известны соотношения между входным и выходным сигналами. В некоторых случаях достаточно трудно наблюдать выходной r-мерный вектор $\omega(t)$ во все моменты времени на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, например, мы можем сделать только n-наблюдений в моменты времени $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$ для того, чтобы получить выборочные выходные данные $\omega(t_1) \ldots \omega(t_n)$. Таким образом, для каждой программы из n-наблюдений $\mathbf{P} = \{t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n\}$ мы получаем выборочный выходной сигнал

$$\mathbf{P}\omega = \begin{bmatrix} \omega(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega(t_n) \end{bmatrix},$$

который мы интерпретируем как rn-мерный вектор-столбец, или как точку в векторном пространстве R^{rn}. Таким образом, программа из n-наблюдений $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$ определяет линейный оператор $\mathbf{P}$, отображающий пространство $C_r[0,\ 1]$ в R^{rn}, именно, $\omega(t) \longrightarrow \mathbf{P}\omega$. Если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|u\|_\infty < \varepsilon, \quad |x_0| < \varepsilon, \quad |\bar{x}_0| < \varepsilon$$

и из соотношения $\mathbf{P}\Omega(x_0, u)=\mathbf{P}\Omega(\bar{x}_0, u)$ следует, что $x_0=\bar{x}_0$, то процесс $\mathcal{S}$ называется *локально вполне n-наблюдаемым* для заданной программы $\mathbf{P}$. Мы отметим, что каждая такая программа $\overline{\mathbf{P}}=\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n\}$ есть точка в открытой области $\mathcal{P}$ в первом квадранте пространства R^n, которая определена неравенствами $0<t_1<t_2<\ldots<t_n<1$.

Мы покажем, что для *общей* или *не исключительной* программы $\mathbf{P}$ в $\mathcal{P}$ процесс $\mathcal{S}$ есть локально n-наблюдаемый процесс. Исключительные программы заполняют замкнутое и нигде не плотное подмножество в $\mathcal{P}$ (или в единичном n-мерном кубе $|t_1|\leqslant 1, \ldots, \ldots, |t_n|\leqslant 1$), т. е. множество всех не исключительных программ открыто и плотно в $\mathcal{P}$. В частности, каждую программу $\mathbf{P}$ в $\mathcal{P}$ можно аппроксимировать не исключительной программой.

Следствие. *Рассмотрим наблюдаемый процесс в R^n:*

($\mathcal{S}$) $\dot{x}=f(x, u)$, $\omega=h(x)$, где $f, h\in C^1$ *в окрестности точки $x=u=0$ со входными сигналами $u(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ в R^m и выходными сигналами $h(x(t))$ в R^r.*

Предположим, что:

(a) $f(0, 0)=0$ *и* $h(0)=0$;

(b) $\operatorname{rank}[H', A'H', \ldots, A'^{n-1}H']=n$, *где* $A=f_x(0, 0)$ *и* $H=h_x(0)$. *Тогда для каждой программы из n наблюдений*

$$\mathbf{P}:\ 0<t_1<t_2<\ldots<t_n<1,$$

за исключением нигде не плотного множества, процесс $\mathcal{S}$ является локально вполне n-наблюдаемым.

Доказательство. Заметим, что каждое $\mathbf{P}$ в $\mathcal{P}$ есть непрерывное линейное преобразование (и даже принадлежит классу C^1)

$$\mathbf{P}:\ C_r[0, 1]\longrightarrow R^{rn}:\ \omega(t)\longrightarrow\begin{bmatrix}\omega(t_1)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega(t_n)\end{bmatrix}.$$

Так как R^{rn} есть банахово пространство конечной размерности rn, то мы можем применить теорему о неявной функции к отображению

$$R^n\times L_\infty\longrightarrow R^{rn}:\ x_0,\ u\longrightarrow\mathbf{P}\Omega(x_0, u),$$

как в теореме (это отображение принадлежит классу C^1 и его производная равномерно непрерывна в окрестности начала координат).

Нам требуется только проверить, что частная производная $\frac{\partial(\mathbf{P}\,\Omega)}{\partial x_0}(0, 0)$ есть матрица, которая имеет ранг n как линейное отображение пространства R^n в R^{rn}. Но эта частная производная

выражается через n-мерные строки $r \times n$-матриц He^{At_1}, He^{At_2}, ..., He^{At_n}, по формуле

$$\Delta x_0 \longrightarrow \begin{bmatrix} He^{At_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ He^{At_n} \end{bmatrix} \Delta x_0.$$

Следовательно, нам необходимо только показать, что имеется n линейно независимых строк. Таким образом, следствие будет доказано, если мы сможем проверить, что матрица

$$[e^{A't_1}H', \ldots, e^{A't_n}H']$$

имеет n независимых столбцов, или n независимых строк. Следовательно, программы $\mathbf{P}$, для которых процесс $\mathcal{S}$ является локально вполне n-наблюдаемым, заполняют открытое подмножество области $\mathcal{P}$, так как условие линейной независимости сохраняется при малых возмущениях векторов.

Пусть $D(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ будет суммой квадратов всех миноров n-го порядка матрицы $[e^{A't_1}H', \ldots, e^{A't_n}H']$. Таким образом, эта матрица имеет ранг n лишь в случае, когда $D(t_1, \ldots, t_n) \neq 0$. Теперь рассмотрим $D(t_1, \ldots, t_n)$ для различных программ $\mathbf{P}$ в области $\mathcal{P}$, как действительную аналитическую функцию n действительных переменных $(t_1, \ldots, t_n)$. Или функция $D(t_1, \ldots, t_n)$ всюду не равна нулю, за исключением, возможно, замкнутого подмножества $\mathcal{P}$ без внутренних точек, или же $D(t_1, \ldots, t_n) \equiv 0$ на $\mathcal{P}$. В первом случае следствие доказано; мы покажем, что второй вариант невозможен.

Таким образом, нам необходимо только показать, что функция D является положительной где-либо на $\mathcal{P}$. Возьмем n моментов времени $t_1 = t$, $t_2 = 2t$, ..., $t_n = nt$ для некоторого малого значения $t > 0$. Мы докажем, что матрица

$$[e^{A't}H', \ldots, e^{A'nt}H'] = [H', A'H', \ldots, A'^{n-1}H'] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} I & \ldots & I \\ t & & nt \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + 0(t^n)\right\} & \ldots & \left\{\frac{(nt)^{n-1}}{(n-1)!} + 0(t^n)\right\} \end{bmatrix}$$

имеет ранг, равный n для некоторого малого $t > 0$ и, таким

образом, $D \neq 0$. В определителе ван-дер-Монда

$$\begin{vmatrix} I & \dots & I \\ t & & nt \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{(nt)^{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix} = V \cdot t^{(n-1)\,nr/2}$$

каждый элемент понимается как скалярная $r \times r$-матрица, и $V \neq 0$, т. е. $nr \times nr$-матрица является неособой для каждого $t > 0$. Но

$$\begin{vmatrix} I & \dots & I \\ t & & nt \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + 0(t^n)\right\} & \dots & \left\{\frac{(nt)^{n-1}}{(n-1)!} + 0(t^n)\right\} \end{vmatrix} =$$

$$= V \cdot t^{(n-1)\,nr/2} + 0\left(t^{[(n-1)\,nr/2]+r}\right)$$

и, таким образом, эта матрица является неособой для всех малых $t > 0$. Так как матрица $[H', A'H', \dots, A'^{n-1}H']$ имеет ранг n, ее произведение на неособую матрицу ранга nr по-прежнему имеет ранг n. Таким образом,

$$\operatorname{rank}\,[e^{A't}H', \dots, e^{A'nt}H'] = n$$

для всех малых $t > 0$, и следствие доказано.

Рассмотрим физический процесс, динамические свойства которого неизвестны; даже размерность пространства состояний может быть неизвестной. Пусть, однако, исходя из некоторой основной теоретической точки зрения, мы можем ожидать, что процесс описывается некоторыми категориями математических систем, например, системами обыкновенных дифференциальных уравнений, возможно, линейными и автономными. Тогда мы проведем серии экспериментов на процессе посредством приложения различных входных сигналов $u(t)$ и наблюдения результирующих выходных сигналов $\omega(t)$, которые зависят от косвенно измеренного состояния $x(t)$ процесса. С помощью этого найденного из эксперимента соотношения между входом и выходом мы попытаемся проанализировать внутреннюю динамическую структуру пространства состояний данного физического процесса. Для того чтобы продемонстрировать математические аспекты такого анализа процесса, мы сначала изложим основную теорию линейных автономных процессов, а затем обратимся к нелинейным процессам, где анализ будет локальным по своей природе и технически более трудным.

Определение. Рассмотрим линейный автономный процесс в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu \quad \text{и} \quad \omega = Hx.$$

Каждый входной сигнал $u(t)$ есть кусочно-непрерывный m-мерный вектор, обращающийся в нуль вне некоторого компактного подынтервала полубесконечного интервала $t \leqslant 0$, и соответствующее решение $x(t)$, где $x(-\infty) = 0$, определяет непрерывный r-мерный векторный выходной сигнал $\omega(t) = Hx(t)$. Множество всех таких входных сигналов образует действительное линейное пространство входных сигналов $\mathscr{J}$, и выходные сигналы для интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$ принадлежат $C_r[0, 1]$. Линейное преобразование

$$\mathbf{T}: u(t) \to \omega(t): \mathscr{J} \to C_r[0, 1]$$

есть соотношение между входом и выходом или *передаточный оператор* процесса $\mathscr{L}$.

Мы теперь покажем, что любые два линейных автономных наблюдаемых процесса

$$(\overline{\mathscr{L}}) \qquad \dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u \quad \text{и} \quad \omega = \overline{H}\overline{x} \quad \text{в } R^{\overline{n}}$$

и

$$(\hat{\mathscr{L}}) \qquad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad \text{и} \quad \omega = \hat{H}\hat{x} \quad \text{в } R^{\hat{n}},$$

которые реализуют одно и то же соотношение $\mathbf{T}$ между входным и выходным сигналом, являются линейно эквивалентными. Это означает, что $\overline{n} = \hat{n}$ и что существует неособое линейное преобразование $\hat{x} = P\overline{x}$, переводящее $\overline{\mathscr{L}}$ в $\hat{\mathscr{L}}$, т. е.

$$P\overline{A}P^{-1} = \hat{A}, \quad P\overline{B} = \hat{B}, \quad \overline{H}P^{-1} = \hat{H}.$$

В таком случае система $\hat{\mathscr{L}}$ совпадает с системой $\overline{\mathscr{L}}$, если произвести линейное преобразование координат в пространстве состояний $R^{\hat{n}}$. Если $\mathbf{T} \equiv 0$, то это соотношение между входом и выходом реализуется вырожденным «нульмерным процессом», и мы этот случай не рассматриваем.

Теорема 5. *Рассмотрим линейный автономный наблюдаемый процесс в* R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu \quad \text{и} \quad \omega = Hx$$

с m-мерными векторными входными сигналами $u(t) \in \mathscr{J}$ и r-мерными векторными выходными сигналами $\omega(t)$, определяющими элементы линейного пространства $C_r[0, 1]$. Пусть соотношение между входом и выходом задается отображением

$$\mathbf{T}: u(t) \to \omega(t): \mathscr{J} \to C_r[0, 1].$$

Тогда в некотором пространстве состояний $R^{\hat{n}}$ существует

линейный автономный наблюдаемый процесс

$$(\hat{\mathscr{L}}) \qquad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \quad и \quad \omega = \hat{H}\hat{x},$$

такой, что:

1) $\hat{\mathscr{L}}$ *является (вполне) управляемым и (вполне) наблюдаемым;*

2) *между входным и выходным сигналами процесса* $\hat{\mathscr{L}}$ *имеется то же самое соотношение* **T**.

Более того, с точностью до линейной эквивалентности, $\hat{\mathscr{L}}$ *является единственным процессом с этими свойствами.*

Доказательство. Существование процесса $\hat{\mathscr{L}}$, обладающего требуемыми свойствами, было показано в главе 2, и мы лишь коротко напомним здесь соответствующие идеи. Пусть сначала C есть линейное подпространство в R^n, состоящее из всех точек пространства R^n, в которые приводят траектории процесса $\mathscr{L}$, начинающиеся в начале координат и соответствующие всевозможным непрерывным управлениям, определенным на конечном интервале времени. Тогда C есть инвариантное подпространство в R^n (любая траектория, пересекающая C, целиком лежит в C для всех моментов времени), и мы рассмотрим суже́ние процесса $\mathscr{L}$ на подпространство C:

$$(\mathscr{L}_c) \qquad \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u \quad и \quad \omega = H_c x_c.$$

Здесь новые координаты $\begin{bmatrix} x_c \\ x_u \end{bmatrix}$ введены в R^n так, что подпространство C задается уравнениями $x_u = 0$. Следовательно, векторы состояния в C принимают вид $\begin{bmatrix} x_c \\ 0 \end{bmatrix}$ (и мы будем писать просто x_c), а матричные коэффициенты сначала преобразованы к новым координатам в R^n и затем соответствующим образом видоизменены для того, чтобы описать наблюдаемый процесс $\mathscr{L}_c$ в пространстве C. Отметим, что процесс $\mathscr{L}_c$ является вполне управляемым на C и имеет предписанное соотношение **T** между входом и выходом.

Теперь рассмотрим свободную систему, которая получается, если в $\mathscr{L}_c$ положить $u(t) \equiv 0$. Пусть подпространство C_0 состоит из тех начальных состояний в C, для которых $\omega(t) \equiv 0$ при $t \geqslant 0$. Мы определим проекцию $\mathscr{L}_c$ на фактор-пространство C/C_0, т. е. на векторное пространство, получающееся из пространства C отождествлением любых двух его точек, разность которых (как векторов) лежит в C_0. Разобьем совокупность координат пространства C $\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$ на две группы, x_a и x_b, так, чтобы уравнение $x_b = 0$ описывало подпространство C_0. Тогда, после соответствующего линейного преобразования координат в C, управляемый процесс

$\mathscr{L}_c$ можно записать в виде

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a u, \qquad \dot{x}_b = A_{bb}x_b + B_{bu}, \quad \omega = H_b x_b.$$

Заметим, что двум начальным состояниям, разность которых лежит в C_0, при произвольно выбранном (фиксированном) управлении $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, соответствуют траектории, разность которых принимает значения в C_0. Это означает, что на точки пространства C, принадлежащие одному классу смежности, который соответствует некоторой точке фактор-пространства C/C_0, произвольное управление действует одинаково. Следовательно, чтобы изучать, как действует это управление на точки фактор-пространства C/C_0, достаточно наблюдать лишь за поведением координаты x_b. Поэтому мы рассмотрим систему

$$(\hat{\mathscr{L}}) \qquad \dot{x}_b = A_{bb}x_b + B_b u \quad \text{и} \quad \omega = H_b x_b,$$

полученную проектированием системы $\mathscr{L}_c$ на подпространство $R^{\hat{n}} = C/C_0$. Так как нулевой класс смежности $(x_b = 0)$ можно перевести в произвольный класс смежности фактор-пространства C/C_0, процесс $\hat{\mathscr{L}}$ является вполне управляемым в $R^{\hat{n}}$. Если учесть характер идентификаций, произведенных при конструировании пространства C/C_0, то станет ясно, что процесс $\hat{\mathscr{L}}$ является вполне наблюдаемым. Так как ω зависит только от x_b в процессе $\mathscr{L}_c$, то соотношение между входным и выходным сигналами процесса $\hat{\mathscr{L}}$ описывается также оператором **T**. Поэтому $\hat{\mathscr{L}}$ есть вполне управляемый и вполне наблюдаемый процесс с заданным соотношением **T** между входом и выходом, и часть теоремы, относящаяся к вопросу о существовании системы $\hat{\mathscr{L}}$, доказана.

Мы теперь докажем единственность такой системы $\hat{\mathscr{L}}$ в $R^{\hat{n}}$ с точностью до линейной эквивалентности. Пусть существует другой, вполне наблюдаемый и вполне управляемый, процесс

$$(\overline{\mathscr{L}}) \qquad \dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u \quad \text{и} \quad \omega = \overline{H}\overline{x}$$

в пространстве состояний $R^{\overline{n}}$, с соотношением **T** между входом и выходом. Оба процесса, $\hat{\mathscr{L}}$ и $\overline{\mathscr{L}}$, используют одно и то же пространство входных сигналов $\mathscr{I}$ и имеют одно и то же соотношение **T** между входом и выходом. Пусть $\mathscr{I}_0$ состоит из таких входных сигналов пространства $\mathscr{I}$, для которых $\omega(t) \equiv 0$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Так как оба процесса, $\hat{\mathscr{L}}$ и $\overline{\mathscr{L}}$, являются вполне управляемыми и вполне наблюдаемыми, то фактор-пространство $\mathscr{I}/\mathscr{I}_0$ является линейным пространством, изоморфным каждому из пространств $R^{\hat{n}}$ и $R^{\overline{n}}$. Следовательно, $\hat{n} = \overline{n}$, и мы пользуемся упомянутым выше изоморфизмом, чтобы определить неособое линейное отображение $\hat{x} = P\overline{x}$ пространства R^{n} на $R^{\hat{n}}$.

Мы должны теперь проверить, что преобразование $\hat{x}=P\bar{x}$ переводит каждую траекторию процесса $\overline{\mathcal{L}}$, соответствующую произвольно выбранному фиксированному управлению $\tilde{u}(t)$ $(0\leqslant t\leqslant \tilde{t})$, в аналогичную траекторию процесса $\hat{\mathcal{L}}$. Но действие управления $\tilde{u}(t)$ на начальное состояние процесса $\overline{\mathcal{L}}$ (или $\hat{\mathcal{L}}$) можно описать, зная его воздействие на точки фактор-пространства $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}_0$. То есть под действием управления $\tilde{u}(t)$ точка $[u_0(t)]\in\mathfrak{I}/\mathfrak{I}_0$, где $u_0(t)\in\mathfrak{I}$ $(-t_0\leqslant t\leqslant 0)$, переходит в точку из $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}_0$, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned} &u_0(t+\tilde{t}) \quad \text{на} \quad -t_0-\tilde{t}\leqslant t<-\tilde{t},\\ &\tilde{u}(t+\tilde{t}) \quad \text{на} \quad -\tilde{t}\leqslant t\leqslant 0. \end{aligned}$$

Так как действию управления $\tilde{u}(t)$ на фактор-пространстве $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}_0$ соответствует действие управления $\tilde{u}(t)$ на пространствах состояний $R^{\hat{n}}$ и $R^{\bar{n}}$ в процессах $\hat{\mathcal{L}}$ и $\overline{\mathcal{L}}$, и так как существует изоморфизм $\hat{x}=P\bar{x}$ пространств $R^{\bar{n}}$ и $R^{\hat{n}}$, то мы заключаем, что процессы $\hat{\mathcal{L}}$ и $\overline{\mathcal{L}}$ идентичны. Теорема доказана.

Таким образом, заданное соотношение **T** между входным и выходным сигналами можно реализовать посредством единственного вполне управляемого и вполне наблюдаемого линейного процесса $\hat{\mathcal{L}}$ в $R^{\hat{n}}$. Размерность $\hat{n}$ есть наименьшая размерность пространства состояний, в котором оператор **T** можно реализовать линейным автономным процессом и, таким образом, реализация соотношения **T** с помощью процесса $\hat{\mathcal{L}}$ является наиболее эффективной.

Соотношение **T** между входным и выходным сигналами является соотношением типа передаточной функции, и теорема 5 до некоторой степени имеет такое же важное значение, как и теорема 14 главы 2. Мы теперь распространим эти понятия и методы на нелинейные наблюдаемые процессы.

Определение. Рассмотрим наблюдаемый процесс в R^n.

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=f(x,\ u) \text{ и } \omega=h(x),\ f,\ h\in C^1,$$

в окрестности точки $x=u=0$ и

$$f(0,\ 0)=0, \quad h(0)=0.$$

Каждый входной сигнал $u(t)$ есть кусочно-непрерывный m-мерный вектор, обращающийся в нуль вне интервала $-1\leqslant t\leqslant 0$ и удовлетворяющий ограничению $|u(t)|\leqslant\delta$, а соответствующее решение $x(t)$ $(x(-1)=0)$ определяет непрерывный r-мерный векторный выходной сигнал $\omega(t)=h(x(t))$ на $0\leqslant t\leqslant 1$ (по крайней мере, для достаточно малых $\delta>0$). Выпуклое множество $\mathfrak{I}_\delta$ входных

сигналов с равномерной топологией таким образом отображается непрерывно в банахово пространство $C_r[0, 1]$ посредством соотношения между входным и выходным сигналами или *передаточным* оператором

$$\mathbf{T}: u(t) \to \omega(t): \mathcal{I}_\delta \to C_r[0, 1].$$

Мы докажем единственность локально вполне управляемого и локально вполне наблюдаемого процесса $\mathcal{S}$, реализующего соотношение $\mathbf{T}$ между входным и выходным сигналами. Единственность понимается с точностью до локальной топологической эквивалентности.

Определение. Наблюдаемые процессы

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) \text{ и } \omega = h(x) \text{ в } R^n,$$

$f, h \in C^1$ в окрестности точки $x = u = 0$, где $f(0, 0) = 0$, $h(0) = 0$ и

$$(\hat{\mathcal{S}}) \qquad \dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u) \text{ и } \omega = \hat{h}(\hat{x}), \text{ в } R^{\hat{n}},$$

$\hat{f}, \hat{h} \in C^1$ в окрестности точки $\hat{x} = u = 0$, где $\hat{f}(0, 0) = 0$, $\hat{h}(0) = 0$ являются *локально топологически эквивалентными* в случае, если имеется топологическое отображение Ψ окрестности N начала координат пространства R^n на окрестность $\hat{N}$ начала координат пространства $R^{\hat{n}}$, удовлетворяющее условию $\Psi(0) = 0$, которое переводит систему $\mathcal{S}$ в систему $\hat{\mathcal{S}}$. Последнее означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого начального состояния $x_0 \in N$, где $|x_0| < \varepsilon$, и каждого кусочно-непрерывного управления $u(t)$, определенного при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ и удовлетворяющего ограничению $u(t)| < \varepsilon$, соответствующие решения $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ систем $\mathcal{S}$ и $\hat{\mathcal{S}}$, начинающиеся в точках x_0 и $\hat{x}_0 = \Psi(x_0)$, связаны соотношением

$$\Psi(x(t)) = \hat{x}(t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$$

и, кроме того, $h(x) \equiv \hat{h}(\Psi(x))$.

Теорема 6. *Рассмотрим наблюдаемые процессы*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u), \ \omega = h(x) \ \textit{в} \ R^n,$$

$f, h \in C^1$ *в окрестности точки* $x = u = 0$, *где* $f(0, 0) = 0$, $h(0) = 0$ *и*

$$(\hat{\mathcal{S}}) \qquad \dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u), \ \omega = \hat{h}(\hat{x}) \ \textit{в} \ R^{\hat{n}};$$

$\hat{f}, \hat{h} \in C^1$ *в окрестности точки* $\hat{x} = u = 0$, *где* $\hat{f}(0, 0) = 0$, $h(0) = 0$. *Допустим что процессы* $\mathcal{S}$ *и* $\hat{\mathcal{S}}$ *являются (алгебраически) локально вполне управляемыми и вполне наблюдаемыми и имеют то же самое соотношение между входным и выходным сигналами*

$$\mathbf{T}: u(t) \to \omega(t): \mathcal{I}_\delta \to C_r[0, 1].$$

Тогда процессы $\mathcal{S}$ *и* $\hat{\mathcal{S}}$ *являются локально топологически эквивалентными.*

Доказательство. Пусть множество $\mathcal{I}_L$ состоит из таких входных сигналов в $\mathcal{I}_\delta$, которые удовлетворяют условию Липшица

$$|u(t)-u(s)| \leqslant |t-s|,$$

так что управление $u(t)$ является непрерывным на интервале $-\infty < t \leqslant 0$. Тогда $\mathcal{I}_L$ с равномерной нормой есть компактное метрическое пространство. Отображение $u(t) \to x(0) = x_0$: $\mathcal{I}_L \to R^n$ пространства $\mathcal{I}_L$ в R^n, определенное с помощью траекторий процесса $\mathcal{S}$, удовлетворяющих условию $x(-1)=0$, является равномерно непрерывным отображением на компактное подмножество пространства R^n. Теперь рассмотрим пространство $[\mathcal{I}_L]$ всех классов эквивалентности в пространстве $\mathcal{I}_L$, где два управления из $\mathcal{I}$ считаются эквивалентными, если им соответствует один и тот же выходной сигнал. Тогда множество $[\mathcal{I}_L]$ с топологией, порожденной указанным отождествлением, есть компактное пространство. Рассмотрим отображение ψ: $u(t) \to x(0) = x_0 : [\mathcal{I}_L] \to R^n$ пространства $[\mathcal{I}_L]$ в R^n, где $u(t)$ представляет собой элемент пространства $[\mathcal{I}_L]$, а $x(t)$ есть соответствующая ему траектория процесса $\mathcal{S}$, удовлетворяющая условию $x(-1)=0$. Заметим, что отображение ψ корректно определено и взаимно однозначно, так как процесс $\mathcal{S}$ является локально вполне наблюдаемым (возможно, при несколько уменьшенном $\delta > 0$) и образ отображения ψ покрывает открытую окрестность начала координат, так как процесс $\mathcal{S}$ локально вполне управляем (см. теорему 1 и последующие замечания). Поэтому ψ есть топологическое отображение пространства $[\mathcal{I}_L]$ на некоторое подмножество пространства R^n (взаимно однозначное непрерывное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство является топологическим).

Мы определим аналогичное отображение

$$\hat{\psi} : u(t) \to \hat{x}(0) = \hat{x}_0 : [\mathcal{I}_L] \to R^n$$

для процесса $\hat{\mathcal{S}}$. Тогда $\Psi = \hat{\psi}\psi^{-1}$ есть топологическое отображение некоторой шаровой окрестности N начала координат пространства R^n на некоторую окрестность $\hat{N}$ начала координат пространства $\hat{R}^n$. Далее, $\Psi(0)=0$, так как оба начала координат $x_0 = \hat{x}_0 = 0$ соответствуют нулевому управлению $u(t) \equiv 0$. Таким образом, мы заключаем, что $n = \hat{n}$, и мы должны теперь показать, что при отображении Ψ процесс $\mathcal{S}$ переходит в $\hat{\mathcal{S}}$.

Выберем положительное число

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{2}, \ \frac{\delta}{2}, \ \frac{\text{радиус } N}{2}\right\}$$

такое, что $|x_0| < \varepsilon$, а управление $u(t)$, определенное на интервале

$0 \leqslant t \leqslant 1$, и удовлетворяющее на нем ограничению $|u(t)| < \varepsilon$, порождает траекторию $x(t)$ процесса $\mathcal{S}$ с начальным состоянием $x(0) = x_0$, которая лежит в N при всех t из интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Изучим теперь траектории $\mathcal{S}$, исходящие из x_0 при кусочно непрерывном управлении $\tilde{u}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, где $|\tilde{u}(t)| < \varepsilon$.

Определим действие управления $\tilde{u}(t)$ на подмножестве $U \subset [\mathcal{I}_L]$. При этом будем иметь в виду, что состояние в $[\mathcal{I}_L]$ будет соответствовать решению $x(t)$ системы $\mathcal{S}$, полученному с помощью отображения ψ, и решению $\hat{x}(t)$ системы $\hat{\mathcal{S}}$ с $x(0) = \Psi(x_0)$, полученному с помощью отображения $\hat{\psi}$. Тогда $\Psi(x(t)) = \hat{x}(t)$ на $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ и топологическая эквивалентность процессов $\mathcal{S}$ и $\hat{\mathcal{S}}$ будет показана. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что окрестность $|x_0| < \varepsilon$ в R^n соответствует такому открытому множеству $U \subset [\mathcal{I}_L]$, что каждый класс эквивалентности, соответствующий точкам из U, можно представить управлением $u_0(t)$, обращающимся в нуль на интервале $-1 \leqslant t \leqslant -1/2$. Так как процесс $\mathcal{S}$ локально вполне управляемый, то такой выбор числа ε возможен. Мы теперь определим действие управления $\tilde{u}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon)$ на элементе множества U, представленном управлением $u_0(t)$, обращающимся в нуль на интервале $-1 \leqslant t \leqslant -1/2$. Такое действие управления $\tilde{u}(t)$ на элемент из $[\mathcal{I}_L]$ задается формулой

$$[u_0 \# \tilde{u}] = \begin{cases} u_0(t+\varepsilon) \text{ на } -\varepsilon - \frac{1}{2} \leqslant t < -\varepsilon, \\ \tilde{u}(t+\varepsilon) \text{ на } -\varepsilon \leqslant t \leqslant 0, \end{cases}$$

причем всюду на R^1, где управление $[u_0 \# \tilde{u}]$ этой формулой не определено, оно полагается равным 0. Легко видеть, что траектория $x(t)$ процесса $\mathcal{S}$ с начальным условием $x(0) = x_0 = \psi(u_0)$ достигает точки $x(\varepsilon)$ под действием управления $\tilde{u}(t)$ и что $\psi[u_0 \# \tilde{u}] = x(\varepsilon)$ [$x(\varepsilon)$ лежит в N, если ε является достаточно малым]. Это справедливо, потому что процесс $\mathcal{S}$ является автономным, т. е. параметры его не зависят от времени. Если мы хотим вычислить выход в $[\mathcal{I}_L]$, соответствующий начальному состоянию $[u_0] \in U$ и управлению $\tilde{u}(t)$, то мы получим конечное состояние $[u_0 \# \tilde{u}] \in [\mathcal{I}_L]$. Состояние в $[\mathcal{I}_L]$ в любой промежуточный момент времени $0 \leqslant t_1 \leqslant \varepsilon$, соответствующее управлению $\tilde{u}(t)$, можно получить, используя t_1 вместо ε в указанных выше вычислениях.

Таким образом, мы определили действие управления $\tilde{u}(t)$ на состояния $[u_0] \in U \subset [\mathcal{I}_L]$, и это действие отображено посредством ψ на соответствующие траектории процесса $\mathcal{S}$ при управлении $\tilde{u}(t)$. Так как действие управления $\tilde{u}(t)$ на $U \subset [\mathcal{I}_L]$ определялось без

ссылки на $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}$, а только в зависимости от соотношения $\mathbf{T}$ между входным и выходным сигналами, мы заключаем, что Ψ отображает $\mathcal{S}$ на $\hat{\mathcal{S}}$, и что эти два наблюдаемых процесса являются локально топологическими эквивалентными. Теорема доказана.

Упражнения

1. Рассмотрим процесс в R^2:

$$\dot{x}=y,\ y=x^2+y^2+u^2,\ \text{где } u\in R^1.$$

Покажите, что область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости лежит в четвертом квадранте и что $\mathscr{C}$ не содержит открытой окрестности начала координат.

2. Рассмотрим процесс в R^2:

$$\dot{x}=y^3,\quad \dot{y}=-x+u,\quad \text{с ограничением } |u(t)|\leqslant 1.$$

Покажите, что $\mathscr{C}=R^2$, даже если алгебраические условия для управляемости не выполняются.

3. Рассмотрим процесс в R^2, определяемый уравнением

$$\ddot{x}+f(x,\ \dot{x})=u \text{ с ограничением } |u(t)|\leqslant 1,$$

т. е. $x=y$, $\dot{y}=-f(x,\ y)+u$. Покажите, что если функция $f(x,\ y)$ принадлежит классу C^1 в пространстве R^2 и удовлетворяет условиям

(a) $xf(x,\ 0)>0$ при $x\neq 0$,

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\geqslant 0$,

то $\mathscr{C}=R^2$. [Указание: вычислить производную функции

$$V=\frac{y^2}{2}+\int_0^x f(x,\ 0)\,dx$$

вдоль свободной траектории, т. е. при $u\equiv 0$.]

4. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}+(x^2-1)\,\dot{x}+x=u$$

или эквивалентную управляемую систему в R^2:

$$\dot{x}=y-\left(\frac{x^3}{3}-x\right),\quad \dot{y}=-x+u.$$

(a) Покажите, что совокупность всех траекторий с началом в фиксированной точке (x_0, y_0), соответствующих ограниченному управлению $u(t)$, $|u(t)|<k$, образует равномерно ограниченное семейство и что, тем самым, существует оптимальное по быстродействию управление, переводящее систему из состояния $(x_0, y_0)\in\mathscr{C}$ в начало координат. [Указание: $r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}=-\left(\dfrac{x^4}{3}-x^2\right)+yu$, так что $r\dot{r}\leqslant 1+kr$, где $r^2=x^2+y^2$.]

(b) Показать, что если k — достаточно малое положительное число, то область $\mathscr{C}$ содержит лишь малую окрестность начала координат; если же $k>0$ достаточно велико, то $\mathscr{C}=R^2$. [Указание. Известно, что свободный осциллятор Ван-дер-Поля имеет единственный предельный цикл, причем каждое решение, отличное от критической точки, навивается на этот предельный

цикл подобно спирали. Допустим, что точка $(x_0, y_0=0)$ лежит близко от предельного цикла; возьмем $u=x(t)$ до тех пор, пока $x(t)$ не станет достаточно близким к $+\sqrt{3}$ или $-\sqrt{3}$, после чего положим $u=(x^2-1)\dot{x}-\dot{x}$.]

5. В теории термодинамики, построенной Каратеодори, содержится концепция полной управляемости. Чтобы проиллюстрировать ее на простом примере, рассмотрим идеальную пробу газа с давлением p, объемом V, температурой T, связанными соотношением $pV=RT$, где R — положительная константа. Изменение состояния газа во времени описывается законом газового состояния и первым законом термодинамики

$$\frac{dQ}{dt}=p\frac{dV}{dt}+c_v\frac{dT}{dt},$$

где dQ/dt есть относительный поток тепловой энергии, а c_v есть постоянная удельная теплоемкость. Возьмем $u^1(t)=\dot{p}(t)$ и $u^2(t)=\dot{Q}(t)$ в качестве управляющих функций и решим систему дифференциальных уравнений, описывающую состояние газа:

$$\dot{p}=u^1,\quad \dot{V}=\frac{1}{(1+R/c_v)}\left[\frac{R}{c_v p}u^2(t)-\frac{V}{p}u^1(t)\right].$$

Покажите для случая адиабатического управления ($u^2(t)\equiv 0$), что существует по меньшей мере два состояния, из одного из которых система не может быть переведена в другое.

6. Рассмотрим нелинейный процесс в R^n:

$$(\mathscr{S})\qquad \dot{x}=f(x, u),\ f\in C^1 \text{ в окрестности точки } x=u=0.$$

Предположим, что $f(x, u)=Ax+Bu+o(x, u)$ и $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]=n$. Докажите, что существует постоянная матрица D, такая, что управление $u=Dx$ стабилизирует процесс $\mathscr{S}$ в окрестности начала координат, т. е. что система $\dot{x}=f(x, Dx)$ является асимптотически устойчивой в окрестности начала координат.

7. Управляемый процесс в R^n

$$\dot{x}=A(t, x)+B(t, x)u \quad \text{класса } C^1$$

является локально вполне управляемым вдоль решения $x=\varphi(t)$, соответствующего ограниченному измеримому управлению $v(t)$ на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ в случае, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что каждая точка x_1, для которой $|x_1-\varphi(t_1)|<\delta$, может быть достигнута из любой точки x_0 под действием измеримого управления, удовлетворяющего условию $|u(t)-v(t)|<\varepsilon$ на $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Покажите, что данный процесс является локально вполне управляемым вдоль решения $x=\varphi(t)$, если уравнение в вариациях

$$\dot{y}=[A_x(t, \varphi(t))+B_x(t, \varphi(t))v(t)]y+B(t, \varphi(t))u$$

является вполне управляемым на интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$.

8. Рассмотрим процесс в R^n:

$$\dot{x}=A(x)+Bu \quad \text{класса } C^1$$

при условии, что $|A(x)|+|\partial A/\partial x|<k$ (k — константа) в R^n, а B — постоянная $n\times m$-матрица, причем матрица BB' неособенная. Доказать, что каждую начальную точку $x_0\in R^n$ можно перевести в каждую целевую точку $x_1\in R^n$ при помощи непрерывного управления $u(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. [Указание: пусть $u(t)=B'\xi$, где ξ — постоянный вектор из R^n, а $x=\varphi^{\xi}(t)$ — соответствующая траектория. Взять в качестве ξ неподвижную точку отображения

$$\xi\longrightarrow(BB')^{-1}\left[x_1-x_0-\int_0^1 A(\varphi^{\xi}(t))\,dt\right].\ ]$$

9. Покажите, что соотношение **T** между входным и выходным сигналами скалярного наблюдаемого процесса

$$\dot{x}=u, \quad \omega=x^2$$

нельзя реализовать ни в каком локально вполне наблюдаемом и вполне управляемом процессе.

Следующие три задачи, развивающие некоторые положения теории дифференциального исчисления в банаховом пространстве, приводят к теореме о неявной функции, которая требуется нам для теории локальной наблюдаемости нелинейных процессов.

10. Пусть E и F — банаховы пространства и пусть f — абстрактная функция, определенная в открытой окрестности U начала координат пространства E и принимающая значения в пространстве F. Говорят, что функция f дифференцируема в точке $u_0 \in U$, если существует непрерывное (ограниченное) линейное отображение T пространства E в F такое, что

$$f(u_0+\Delta u)=f(u_0)+T\Delta u+o(|\Delta u|),$$

для всех малых $\Delta u \in E$. При этом пишут $f'(u_0)=T$. Заметим, что функция $f'(u_0)$ принадлежит банахову пространству $L(E, F)$ всех непрерывных линейных отображений E в F. Если $f'(u)$ существует в каждой точке $u \in U$ и отображение

$$u \longrightarrow f'(u) : U \longrightarrow L(E, F)$$

является непрерывным, говорят, что $f \in C^1$ в U (т. е. непрерывно и имеет непрерывную производную).

(a) Покажите, что композиция отображений класса C^1 вновь принадлежит классу C^1 и что *цепное правило* дает производную композиции отображений.

(b) Пусть $f(u)=Tu$ есть непрерывное линейное отображение E в F. Докажите, что $f \in C^1$ и $f'(u)\Delta u=T\Delta u$. Если T есть взаимно однозначное отображение E на F, то *теорема о замкнутом графике* утверждает, что T^{-1} является непрерывным отображением F на E.

(c) Если $f \in C^1$, то теорема о среднем дает, что

$$f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=\int_0^1 f'(u_0+t\Delta u)\,\Delta u\,dt$$

для сегмента $u_0+t\Delta u$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ в U. [Интеграл Римана определяется, как для обычных непрерывных функций]. Кроме того, для каждого линейного функционала $\varphi \in L(F, R^1)$ выполнено равенство

$$\varphi(f(u_0+\Delta u)-f(u_0))=\varphi\left(\int_0^1 f'(u_0+t\Delta u)\,\Delta u\,dt\right).$$

(d) Если $f \in C^1$, то имеет место теорема о среднем:

$$|f(u_0+\Delta u)-f(u_0)| \leqslant |\Delta u| \sup f'(\xi),$$

где $u_0+t\Delta u\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — сегмент из U, а точка ξ лежит на этом сегменте. Далее,

$$|f(u_0+\Delta u)-f(u_0)-f'(\bar{u})\,\Delta u| \leqslant |\Delta u| \sup |f'(\xi)-f'(\bar{u})|,$$

где $\bar{u}$ — фиксированная точка сегмента, и точная верхняя грань берется по всем ξ на сегменте.

11. Пусть $f: U \longrightarrow F$ есть принадлежащее классу C^1 отображение открытой окрестности U начала координат банахова пространства E в банахово пространство F. Предположим, что отображение

(a) $U \longrightarrow L(E, F): u \longrightarrow f'(u)$ равномерно непрерывно на U и

(b) $f'(0)$ есть взаимно однозначное непрерывное линейное отображение пространства E на замкнутое подпространство пространства F.

Покажите, что в этом случае существует подокрестность $V \subset U$, на которой из соотношения $f(u_1) = f(u_2)$ следует, что $u_1 = u_2$. [Указание: теорема о замкнутом графике утверждает, что $f'(0)^{-1}$ есть непрерывное отображение $f'(0)E$ на E. Таким образом, существует постоянная $c > 0$ такая, что $|f'(0)\Delta u| \geqslant c|\Delta u|$ для всех Δu в E; тем самым, $|f'(u)\Delta u| \geqslant \frac{c}{2}|\Delta u|$ для всех u в некоторой окрестности $V \subset U$ начала координат. Теперь теорема о среднем дает

$$|f(u_2) - f(u_1) - f'(\bar{u})(u_2 - u_1)| \leqslant |u_2 - u_1| \sup |f'(\xi) - f'(\bar{u})|,$$

где $\bar{u}$ и ξ принадлежат сегменту, соединяющему точку u_1 с точкой u_2. Из свойства равномерной непрерывности отображения $f'(u)$ следует, что мы можем сузить окрестность V так, что $|f'(\xi) - f'(u)| \leqslant c/4$. Тогда

$$|f(u_2) - f(u_1)| \geqslant \frac{c}{4}(u_2 - u_1),$$

откуда и следует нужный результат.]

12. Использовать упражнения 10 и 11 для доказательства теоремы 4, заметив, что отображение

$$R^n \times L_\infty \longrightarrow C_r[0, 1]: \; x_0, u \longrightarrow \Omega(x_0, u)$$

имеет равномерно непрерывную производную в некоторой окрестности U начала координат, которая в точке $x_0 = 0$, $u = 0$ задается соответствием

$$\Delta x_0, \Delta u \longrightarrow He^{At}\Delta x_0 + H\int_0^t e^{A(t-s)} B\Delta u(s)\, ds.$$

Показать, что отображение

$$R^n \times L_\infty \longrightarrow C_r[0, 1] \times L_\infty: \;\; x_0, u \longrightarrow \Omega(x_0, u), u$$

удовлетворяет (в окрестности начала координат) условиям предыдущего упражнения и что, тем самым, существует окрестность $V \subset U$, на которой из соотношения $\Omega(x_0, u) = \Omega(\bar{x}_0, u)$ следует, что $x = \bar{x}_0$.

6.2. Глобальная устойчивость нелинейных процессов

В предыдущем разделе мы изучали локальную полную управляемость нелинейного процесса

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) \text{ в } R^n.$$

Область $\mathscr{C}$ нуль-управляемости состояла из всех начальных состояний $x_0 \in R^n$, которые можно перевести в начало координат $x_1 = 0$ допустимыми управлениями за конечное время. Мы нашли, что при выполнении алгебраического условия полной управляемости для линейной аппроксимации процесса $\mathcal{S}$ область $\mathscr{C}$ содержит открытую окрестность начала координат. В этом разделе мы опишем процессы, для которых $\mathscr{C} = R^n$; при этом, как правило, процесс $\mathcal{S}$ будет предполагаться глобально асимптотически устойчивым, а также локально управляемым вблизи начала координат.

В главе 2 было показано, что линейный процесс в R^n

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$, содержащим точку $u = 0$ внутри себя, имеет своей областью нуль-управляемости все пространство R^n, если:

1) Матрица A устойчива, т. е. каждое характеристическое число λ матрицы A имеет отрицательную действительную часть, и

2) $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$.

Наши результаты распространяют эти понятия и методы на нелинейные процессы. Мы сначала напомним общепринятую терминологию, используемую для описания устойчивости автономной системы дифференциальных уравнений.

Определение. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{класса} \quad C^1 \quad \text{в} \quad R^n$$

называется *устойчивой относительно начала координат*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|x| < \delta$ решение $x(t)$, с началом в точке $x(0) = x_0$, удовлетворяет условию $|x(t)| < \varepsilon$ при $0 \leqslant t < \infty$.

Ясно, что необходимое условие устойчивости таково: $f(0) = 0$, начало координат есть критическая точка, или точка покоя, или точка равновесия. Если у матрицы $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ все характеристические числа имеют отрицательную действительную часть, то легко доказать, что система дифференциальных уравнений устойчива, даже асимптотически, относительно начала координат.

Определение. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{в} \quad R^n \quad \text{класса} \quad C^1$$

называется *асимптотически устойчивой относительно начала координат*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|x_0| < \delta$ решение $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0$ удовлетворяет условию $|x(t)| < \varepsilon$ на интервале $0 \leqslant t < \infty$ и $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$. Если каждое решение системы $\mathscr{S}$ в R^n определено на $0 \leqslant t < \infty$ и стремится к нулю при $t \to \infty$, то система $\mathscr{S}$ называется *глобально асимптотически устойчивой*.

Отметим, что условие устойчивости относительно начала координат слабее, чем условие асимптотической устойчивости, которое в свою очередь слабее условия глобальной асимптотической устойчивости.

Следующие две теоремы дают условия глобальной асимптотической устойчивости для систем дифференциальных уравнений

возникающих в нелинейных управляемых процессах. Первый результат есть непосредственное обобщение известного критерия устойчивости Ляпунова, а второй результат показывает, что свойство устойчивости зависит от знака характеристических чисел некоторой матрицы. Заметим, что из теоремы относительно глобальной асимптотической устойчивости, а так же из предыдущих результатов о локальной полной управляемости следует, что $\mathscr{C}=R^n$.

Теорема 7. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x,\ u) \quad \text{в} \quad C^1 \quad \text{в} \quad R^{n+m},$$

с ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$. *Предположим, что существует скалярная функция* $V(x)$ *и* m-*мерная вектор-функция* $U(x)$ *в* R^n *класса* C^1 *такие, что*

(a) $V(x)\geqslant 0$ *и* $V(x)=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=0$;

(b) $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x)=+\infty$;

(c) $U(x)\subset\Omega$;

(d) $\dfrac{\partial V}{\partial x^i}f^i(x,\ U(x))<0$ *для* $x\neq 0$.

Тогда система дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{S}_U) \qquad \dot{x}=f(x,\ U(x))$$

является глобально асимптотически устойчивой относительно начала координат. Следовательно, для каждого начального состояния $x_0\in R^n$ *решение* $x(t)$ *системы* $\mathscr{S}_U$ *стремится к точке* $x_1=0$ *при* $t\to+\infty$, *а управлению* $u(t)=U(x(t))\subset\Omega$, *определенному на интервале* $0\leqslant t<\infty$, *соответствует то же самое решение* $x(t)$ *процесса* $\mathscr{S}$, *переводящее точку* x_0 *в начало координат.*

Доказательство. Сначала отметим, что линии уровня

$$V(x)=c>0$$

являются компактными подмножествами пространства R^n и локально каждая из них является гладкой гиперповерхностью, так как $\operatorname{grad} V(x)\neq 0$. Таким образом, каждая такая линия уровня является компактным гладким подмногообразием (гиперповерхностью), которое разделяет пространство R^n на две области, и начало координат лежит во внутренней области, там, где $V(x)<c$. [Кривые ортогонального семейства ведут из внешней области в окрестность начала координат, причем каждая пересекается только один раз с каждой из линии уровня $V(x)=c$.]

Для каждой начальной точки $x_0\in R^n$ рассмотрим решение $x(t)$ системы $\mathscr{S}_U$, начинающееся в x_0. Вычислим скорость изменения функции V вдоль решения $x(t)$:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t))\,f^i(x(t),\ U(x(t)))\leqslant 0$$

и, таким образом, решение $x(t)$ остается все время внутри гиперповерхности уровня $V(x)=V(x_0)$. Поэтому решение $x(t)$ определено на интервале $0 \leqslant t < \infty$. Кроме того, если $x_0=0$, то $V(x(t)) \equiv 0$, так что $x(t) \equiv 0$. Следовательно, $f(0, U(0))=0$ и начало координат является критической точкой системы дифференциальных уравнений $\mathcal{S}_U$.

Если $x_0 \neq 0$, то решение $x(t)$ стремится внутрь, пересекая гиперповерхности уровня $V(x)=c>0$, но никогда не достигает начала координат. Пусть

$$\lim_{t \to \infty} V(x(t)) = V_\infty \geqslant 0.$$

Если $V_\infty > 0$, то решение $x(t)$ должно асимптотически приближаться к некоторой точке x_∞, лежащей на компактной гиперповерхности $V(x)=V_\infty$. Однако решение системы $\mathcal{S}_U$, начинающееся в точке x_∞, проникает во внутренность гиперповерхности $V(x)=V_\infty$ и соображения непрерывности показывают, что $x(t)$ должно также пересечь эту внутренность. Таким образом, мы заключаем, что $V_\infty=0$ и

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Мы доказали, что система $\mathcal{S}_U$ является глобально асимптотически устойчивой относительно начала координат. Очевидно, что управлению класса C^1

$$u(t) = U(x(t)) \quad \text{на интервале} \quad 0 \leqslant t < \infty$$

соответствует решение $x(t)$ системы $\mathcal{S}$. Теорема доказана.

В специальном случае, когда функция $f(x, u)$ не зависит от u, а на функцию $U(x)$ никакие условия не налагаются (при этом она просто исключается из рассмотрения), приведенная выше теорема известна как *критерий устойчивости Ляпунова*. Функция $V(x)$ называется *функцией Ляпунова* для систем дифференциальных уравнений.

Следствие. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u), \quad f \in C^1 \quad \text{в} \quad R^{n+m},$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$.

Допустим, что существуют функции $U(x)$ *и* $V(x)$ *класса* C^1 *в пространстве* R^n, *удовлетворяющие условиям* (a), (b), (c), (d) *теоремы. Предположим далее, что*

(a) $f(0, 0)=0$;

(f) $u=0$ *лежит внутри* Ω;

(g) $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$, *где* $A=f_x(0, 0)$, $B=f_u(0, 0)$.

Тогда область нуль-управляемости $\mathscr{C}$ *для управляемого процесса* $\mathcal{S}$ *совпадает с* R^n.

Доказательство. Доказательство немедленно следует из теоремы и полученных выше результатов о локальной полной управляемости.

Теорема 8. *Рассмотрим управляемый процесс*

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u); \quad f \in C^1 \quad в \quad R^{n+m},$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$.

Предположим, что

(a) $f(0, 0) = 0$;

(b) *существует m-мерная вектор-функция* $U(x)$ *в* R^n *класса* C^1, *причем* $U(x) \subset \Omega$ *и* $U(0) = 0$;

(c) *каждое характеристическое число* $\lambda(x)$ *матрицы* $J(x) + J'(x)$ *удовлетворяет условию* $\lambda(x) \leqslant -\varepsilon < 0$ *для всех* $x \in R^n$ *и некоторой константы* $\varepsilon > 0$, *где*

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, U(x)) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, U(x)) \frac{\partial U}{\partial x},$$

а $J'(x)$ *есть транспонированная матрица для матрицы* $J(x)$.

Тогда система дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{S}_U) \qquad \dot{x} = f(x, U(x))$$

является глобально асимптотически устойчивой относительно начала координат. Следовательно, для каждого $x_0 \in R^n$ *решение* $x(t)$ *системы* $\mathscr{S}_U$ *стремится к* $x_1 = 0$, *при* $t \to \infty$, *и управлению*

$$u(t) = U(x(t)) \subset \Omega \quad на \quad 0 \leqslant t < \infty$$

соответствует то же решение $x(t)$ *системы* $\mathscr{S}$, *переводящее точку* x_0 *в начало координат.*

Доказательство. Начало координат $x_1 = 0$ есть критическая точка для системы дифференциальных уравнений $\mathscr{S}_U$, и мы покажем, что это единственная критическая точка.

Пусть $\bar{x}$ — критическая точка системы $\mathscr{S}_U$ в R^n, такая, что $F(\bar{x}) = 0$, где $F(x) = f(x, U(x))$, а $J(\bar{x}) = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x})$ является матричным коэффициентом линейного приближения для системы $\mathscr{S}_U$ вблизи критической точки. Если матрица $J(\bar{x})$ является особой, то существует неравный нулю постоянный вектор $w \in R^n$, для которого $J(\bar{x}) w = 0$. Это означает, что

$$w'Jw = 0 \quad и \quad w'J'w = 0,$$

так что имеет место равенство

$$w'(J + J')w = 0,$$

которое противоречит предположению о том, что

$$w'(J + J')w \leqslant -\varepsilon w'w < 0.$$

Поэтому матрица $J(\bar{x})$ — не особая и, следовательно, отображение

$$x \to F(x) \quad \text{пространства} \quad R^n \quad \text{в} \quad \text{себя}$$

имеет изолированный нуль в критической точке $\bar{x}$ системы $\mathcal{S}_U$. Таким образом $\mathcal{S}_U$ имеет лишь изолированные критические точки.

Пусть $x(t)$ — решение системы $\mathcal{S}_U$, начинающееся в произвольной начальной точке x_0. Определим вектор скорости вдоль этого решения $v(t) = \dot{x}(t)$. Тогда

$$\dot{v} = J(x(t))\, v$$

и, таким образом,

$$v'\dot{v} = v'Jv, \quad \dot{v}'v = v'J'v.$$

Так как $\|v\|^2 = v'v$, то имеем

$$\frac{d\|v\|^2}{dt} = v'(J + J')\, v \leqslant -\varepsilon \|v\|^2.$$

Поэтому вектор скорости вдоль решения $x(t)$ удовлетворяет неравенству $\|v(t)\| \leqslant \|v(0)\| e^{-\varepsilon t/2}$ и, следовательно,

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int_0^t \|v(s)\|\, ds \leqslant \|x_0\| + \|v(0)\|(2/\varepsilon);$$

тем самым, решение $x(t)$ остается внутри компактного шара в R^n для $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и решение $x(t)$ должно стремиться к критической точке системы $\mathcal{S}_U$ при $t \to \infty$, ибо $\|v(t)\| \to 0$.

Так как функция $\|f(x, U(x))\|$ обращается в нуль только в изолированных критических точках, а функция $\|v(t)\|$ является монотонно убывающей, то каждая критическая точка системы $\mathcal{S}_U$ является локально асимптотически устойчивой. Но каждое решение $x(t)$ системы $\mathcal{S}_U$ должно стремиться к некоторой критической точке при $t \to \infty$. Легко видеть, что множество начальных состояний $x_0 \in R^n$, для которых решение $x(t)$ системы $\mathcal{S}_U$ стремится к заданной критической точке $\bar{x}$, является открытым подмножеством $\mathcal{O}(\bar{x})$ в R^n. Так как пространство R^n связно, оно не может быть разложено на два непересекающихся, непустых открытых подмножества. Поэтому имеется только одна критическая точка $x_1 = 0$ системы $\mathcal{S}_U$ и, таким образом, эта система является глобально асимптотически устойчивой.

Для каждой начальной точки x_0 движение $x(t)$ системы $\mathcal{S}_U$ можно также получить как решение управляемой системы $\mathcal{S}$, соответствующее управлению $u(t) = U(x(t))$. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим управляемый процесс в* R^n:

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u), \quad f \in C^1 \quad \text{в} \quad R^{n+m}$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. *Предположим, что условия* (a), (b) *и* (c) *теоремы выполняются, и пусть также*

(d) *точка* $u=0$ *лежит внутри множества* Ω *в* R^m;

(e) $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]=n$, *где*

$$A=f_x(0, 0), \quad B=f_u(0, 0).$$

Тогда область $\mathscr{C}$ *нуль-управляемости для системы* $\mathscr{S}$ *совпадает с* R^n.

Доказательство немедленно вытекает из теоремы и ранее полученных результатов о локальной полной управляемости.

В главе 2 мы изучали задачу стабилизации линейного автономного процесса в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x}=Ax+bu$$

с наблюдаемой линейной обратной связью $\sigma=cx$ и законом управления $u=\sigma=cx$. Здесь A есть действительная $n \times n$-матрица, b — действительный вектор-столбец, c — действительный вектор-строка, а σ есть действительная скалярная величина. В теореме 9 главы 2 мы показали, что если пара (A, b) является (вполне) управляемой, то вектор c можно выбрать так, что матрица $A+bc$ будет устойчивой, т. е. если

$$\det[b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b] \neq 0,$$

то можно выбрать вектор c так, что все характеристические значения матрицы $A+bc$ будут иметь отрицательные действительные части и процесс будет асимптотически устойчивым относительно начала координат.

В этом разделе мы проанализируем устойчивость вышеупомянутых процессов, но с нелинейным законом управления:

$$u=u(\sigma), \quad \text{где} \quad \sigma u(\sigma)>0 \quad \text{для} \quad \sigma \neq 0.$$

Эта задача известна как *задача Лурье* для прямого управления.

Определение. Рассмотрим управляемый процесс в R^n:

$$(Л) \qquad \dot{x}=Ax+bu(\sigma), \quad \sigma=cx,$$

где A есть действительная $n \times n$-матрица, а b и c — действительные векторы. Предположим, что закон управления таков, что управление $u(\sigma)$ порождает отрицательную обратную связь, т. е. функция $u(\sigma)$ принадлежит классу C^1 на интервале $-\infty<\sigma<\infty$, причем $\sigma u(\sigma)>0$ для $\sigma \neq 0$. Эти условия определяют класс управлений $\mathscr{U}$, и процесс $Л$ называется *абсолютно устойчивым*, если система

$$\dot{x}=Ax+bu(cx)$$

является глобально асимптотически устойчивой для любого

$u(\sigma) \subset \mathcal{U}$. Если матрица A и вектор b заданы, то область абсолютной устойчивости $\mathfrak{C}$ состоит из всех таких векторов c в R^n, для которых процесс $\mathcal{Л}$ является абсолютно устойчивым.

Замечания. Если хотя бы одно характеристическое число матрицы A имеет положительную действительную часть, то область $\mathfrak{C}$ является пустой, так как класс $\mathcal{U}$ содержит также линейные законы управления $u = \varepsilon\sigma$ для произвольно малого $\varepsilon > 0$. Поэтому мы рассмотрим задачу Лурье только для случая, когда A есть устойчивая матрица. (Случай, когда матрица A имеет чисто мнимые характеристические числа, требует более тонкого анализа.) Тогда область $\mathfrak{C}$ всегда содержит точку $c = 0$. Вообще говоря, область $\mathfrak{C}$ содержит объединение полупрямых, выходящих из начала координат. Чтобы доказать это свойство множества $\mathfrak{C}$, рассмотрим обратную связь $u(\lambda cx)$ при $\lambda > 0$ и $c \in \mathfrak{C}$. Положим $u_\lambda(\sigma) = u(\lambda\sigma)$ и тогда u_λ лежит в $\mathcal{U}$ всякий раз, когда u лежит в $\mathcal{U}$. Следовательно, процесс $\mathcal{Л}$ является глобально асимптотически устойчивым с обратной связью $u_\lambda(cx) = u(\lambda cx)$ и, таким образом, $\lambda c \in \mathfrak{C}$, что и требовалось доказать. Геометрию множества $\mathfrak{C}$ не легко описать, и задача Лурье состоит в определении области устойчивости $\mathfrak{C}$ для заданных (A, b).

Обычный метод доказательства абсолютной устойчивости процесса $\mathcal{Л}$ использует функцию Ляпунова (см. теорему 7) вида

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \int_0^\sigma u(s)\,ds,$$

где вектор-строка x' получен транспонированием вектора-столбца x. Положительно определенная матрица $B > 0$ в некоторых случаях может быть найдена из соотношения

$$A'B + B'A = -C,$$

где $C > 0$. Напомним, что в теореме 7 главы 3 было показано, что если A — устойчивая матрица, то каждой такой матрице $C > 0$ соответствует одна и только одна матрица $B > 0$. А именно,

$$B = \int_0^\infty e^{A't} C e^{At}\,dt.$$

Теорема 9. *Рассмотрим в R^n процесс*

$$(\mathcal{Л}) \qquad \dot{x} = Ax + bu(\sigma), \quad \sigma = cx$$

с законом управления $u(\sigma)$ из класса $\mathcal{U}$, где A есть действительная устойчивая матрица, а b и c суть действительные векторы. Предположим, что существует положительно определенная матрица $B > 0$ такая, что совокупность объектов $\{A, b, c\}$

удовлетворяет условию

$$-cb > \left(Bb + \frac{1}{2}A'c' + \frac{1}{2}\alpha c'\right)' C^{-1}\left(Bb + \frac{1}{2}A'c' + \frac{1}{2}\alpha c'\right)$$

для некоторого $\alpha > 0$, *где*

$$A'B + B'A = -C \quad \text{и} \quad C > 0.$$

Тогда $c \in \mathfrak{C}$, *так что процесс* $\mathcal{Л}$ *является абсолютно устойчивым.*

Доказательство. Зафиксируем закон управления $u(\sigma) \in \mathcal{U}$ и для каждого решения $x(t)$ уравнения, описывающего процесс $\mathcal{Л}$, положим $\sigma(t) = cx(t)$. Тогда получим систему

$$\dot{x} = Ax + bu(\sigma), \quad \dot{\sigma} = cAx + cbu(\sigma)$$

в R^{n+1}. Определим действительную функцию

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \int_0^\sigma u(s)\,ds$$

в R^{n+1}, которая является положительной всюду, кроме точки $x = \sigma = 0$. Вычисляя производную функции $V(x, \sigma)$ вдоль решения $x(t)$, $\sigma(t)$, получим

$$\dot{V} = x'B(Ax + bu) + (x'A' + ub')Bx + u(cAx + cbu)$$

или, учитывая, что $x'A'c' = cAx$, прибавляя и вычитая $\alpha\sigma u(\sigma)$ получим

$$-\dot{V} = \left\{x'Cx - 2x'\left(Bb + \frac{1}{2}A'c' + \frac{1}{2}\alpha c'\right)u - cbu^2\right\} + \alpha\sigma u(\sigma).$$

Для того чтобы функция $V(x, \sigma)$ могла служить функцией Ляпунова, потребуем, чтобы $-\dot{V} > 0$ везде, кроме точки $x = \sigma = 0$. Заметим, что производная $-\dot{V}$ представлена в виде квадратичной формы от $(n+1)$ переменной (x, u) с матрицей

$$\begin{bmatrix} C & d \\ d' & -cb \end{bmatrix},$$

где $d = -\left(Bb + \frac{1}{2}A'c' + \frac{1}{2}\alpha c'\right)$. Эта матрица является положительно определенной в том случае, когда все ее главные миноры положительны. Условие $C > 0$ гарантирует положительность всех главных миноров, за исключением, быть может, самого определителя

$$\begin{vmatrix} C & d \\ d' & -cb \end{vmatrix}.$$

Покажем, что из условий теоремы следует его положительность.

Так как $C>0$, то для этого нужно лишь доказать положительность определителя

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & d \\ d' & -cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & C^{-1}d \\ d' & -cb \end{bmatrix}.$$

Раскрывая его, получим

$$-cb-d'C^{-1}d=$$
$$=-cb-\left(Bb+\frac{1}{2}A'c'+\frac{1}{2}\alpha c'\right)' C^{-1}\left(Bb+\frac{1}{2}A'c'+\frac{1}{2}\alpha c'\right),$$

а последнее выражение, по условию, положительно.

Теперь докажем глобальную асимптотическую устойчивость процесса $\mathcal{Л}$. Для любого начального состояния $x_0 \in R^n$ решение $x(t)$ системы

$$\dot{x}=Ax+bu(cx)$$

остается в той области пространства R^n, где

$$x'Bx \leqslant V(x_0, cx_0)$$

и, следовательно, решение $x(t)$ определено на интервале $0 \leqslant t < \infty$ и начало координат является устойчивой критической точкой. Так как $\dot{V}(x(t), \sigma(t)) < 0$ вдоль решения $x(t) \neq 0$, $\sigma(t)=cx(t) \neq 0$, то мы заключаем, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0.$$

Таким образом, написанная выше система глобально асимптотически устойчива относительно начала координат, а процесс $\mathcal{Л}$ является абсолютно устойчивым. Теорема доказана.

Пример. Задача Лурье часто формулируется на языке *непрямого* управления, включающего производную от входного сигнала. Мы здесь поставим задачу Лурье с непрямым управлением и покажем, как ее можно свести к эквивалентной задаче с *прямым* управлением, т. е. к задаче того типа, который изучен в теореме 9.

Рассмотрим задачу с непрямым управлением в R^{n+1}:

$$(\mathcal{Л}_1) \qquad \dot{x}=Ax+bv, \quad \dot{v}=u(\sigma), \quad \sigma=cx-\rho v,$$

где управление $u(\sigma)$ принадлежит классу $\mathcal{U}$, т. е. $\sigma u(\sigma)>0$ для $\sigma \neq 0$. Мы должны найти значения действительной постоянной $n \times n$-матрицы A, n-мерных векторов b и c и скаляра ρ, при которых система $\mathcal{Л}_1$ является глобально асимптотически устойчивой для каждого соответствующего $u(\sigma)$. Заметим, что задача $\mathcal{Л}_1$ с непрямым управлением эквивалентна следующей задаче с прямым

управлением в пространстве R^{n+1}:

$$\dot{w} = \hat{A}w + \hat{b}u(\sigma), \quad \sigma = \hat{c}w,$$

где

$$w = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = (c, \ -\rho).$$

Здесь матрица $\hat{A}$ особая, и это ведет к некоторым дополнительным ограничениям на решение задачи Лурье непрямого управления.

При линейном законе управления $u(\sigma) = \varepsilon\sigma$ для некоторого малого $\varepsilon > 0$ система $Л_1$ принимает вид

$$\dot{x} = Ax + bv, \quad \dot{v} = \varepsilon cx - \varepsilon\rho v.$$

Для того чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость этой системы в R^{n+1} для всех малых $\varepsilon > 0$, мы предположим, что матрица A является устойчивой. Пусть, кроме того, $\rho > 0$. Так как след матрицы (т. е. сумма всех ее характеристических чисел), соответствующей последней системе, равен $(TrA - \varepsilon\rho)$, где TrA — след матрицы A, то ясно, что первые n характеристических чисел матрицы системы близки к соответствующим характеристическим числам матрицы A, а последнее характеристическое число (в силу условия $\rho > 0$) отрицательно. Потребуем также, чтобы точка $x = 0$, $v = 0$ была единственной критической точкой процесса $Л_1$, т. е. чтобы система уравнений

$$Ax + bv = 0, \quad cx - \rho v = 0$$

имела единственное решение. Для этого достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A & b \\ c & -\rho \end{vmatrix} \neq 0$$

или

$$\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & b \\ c & -\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & A^{-1}b \\ c & -\rho \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вычислив последний определитель, получим неравенство

$$-\rho - cA^{-1}b \neq 0.$$

Итак, мы рассматриваем процесс $Л_1$ при следующих *исходных предположениях*: A есть устойчивая матрица, $\rho > 0$, $\rho \neq -cA^{-1}b$. Введем теперь новые координаты в R^{n+1}:

$$y = Ax + bv, \quad s = cx - \rho v,$$

чтобы получить процесс с прямым управлением

$$(Л_2) \qquad \dot{y} = Ay + bu(\sigma), \quad \dot{s} = cy - \rho u(\sigma), \quad \sigma = s.$$

Ясно, что система $\mathcal{Л}_2$ является глобально асимптотически устойчивой в том и только в том случае, когда этим свойством обладает система $\mathcal{Л}_1$. Так как матричные коэффициенты процесса $\mathcal{Л}_2$ имеют вид

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}=\begin{bmatrix} b \\ -\rho \end{bmatrix}, \quad \tilde{c}=[0,\ 1],$$

то ясно, что условия теоремы 9 не выполняются. Однако мы продолжим наши исследования.

Утверждение. Предположим, что существует симметричная положительно определенная матрица $B>0$ такая, что

$$\rho>\left(Bb+\frac{1}{2}c'\right)'C^{-1}\left(Bb+\frac{1}{2}c'\right),$$

где

$$A'B+B'A=-C \quad \text{и} \quad C>0.$$

Тогда система $\mathcal{Л}_1$ является глобально асимптотически устойчивой при каждом законе управления

$$u(\sigma) \text{ из } \mathcal{U} \text{ таком, что } \int_0^{\pm\infty} u(\sigma)\,d\sigma=\infty.$$

Мы укажем доказательство этого утверждения, которое является аналогом теоремы 9 для задачи с непрямым управлением. Определим функцию Ляпунова для системы $\mathcal{Л}_2$ в R^{n+1}:

$$V(y,\ s)=y'By+\int_0^s u(s)\,ds>0$$

для всех $(y,\ s)\neq(0,\ 0)$. Теперь, вычисляя производную от функции $V(y,\ s)$ вдоль решений системы $\mathcal{Л}_2$, получим

$$-\dot{V}=y'Cy+\rho u^2(s)-2\left(Bb+\frac{1}{2}c'\right)'yu(s).$$

Таким образом, $-\dot{V}>0$ при $(y,\ u)\neq(0,0)$, если выполняется условие

$$\begin{bmatrix} C & Bb+\frac{1}{2}c' \\ \left(Bb+\frac{1}{2}c'\right)' & \rho \end{bmatrix}>0.$$

Однако последнее неравенство следует из предположения

$$\rho>\left(Bb+\frac{1}{2}c'\right)'C^{-1}\left(Bb+\frac{1}{2}c'\right).$$

Так как

$$\lim_{|y|+|s|\to\infty} V(y,\ s)=\infty,$$

то совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $V(y, s) \leqslant \leqslant V(y_0, s_0)$, образует компактное подмножество в R^{n+1}, и рассуждение, аналогичное использованному в доказательстве теоремы 9, показывает, что процесс $\mathcal{Л}_2$ является глобально асимптотически устойчивым, что и требуется.

Мы теперь перейдем к изучению задачи Лурье с прямым управлением при помощи методов, напоминающих метод передаточных функций линейного анализа. Рассмотрим передаточную функцию от входа u к выходу σ автономной линейной системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad \sigma = cx,$$

т. е., рациональную комплексную функцию

$$cA^{-1}(z)\,b, \quad \text{где} \quad A(z) = zI - A.$$

Если мы допускаем линейный закон управления

$$u(\sigma) = \varepsilon\sigma \quad \text{для} \quad \varepsilon > 0,$$

то критерий абсолютной устойчивости (для скалярного случая, с которого мы начнем), требует, чтобы матрица $(A + \varepsilon bc)$ была устойчивой для каждого $\varepsilon > 0$. Это означает, что определитель

$$|zI - A - \varepsilon bc| = |A(z)| \cdot |I - \varepsilon cA^{-1}(z)\,b|,$$

рассматриваемый как функция от z, не должен иметь нулей в замкнутой правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Так как матрица A является устойчивой, то критерий абсолютной устойчивости для линейных законов управления $u(\sigma) = \varepsilon\sigma$ принимает такой вид

$$\{-cA^{-1}(z)\,b\} \geqslant 0 \text{ *в замкнутой области* } \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Это условие, соответствующим образом модифицированное для нелинейной задачи Лурье, известно как *критерий устойчивости Пóпова*. Мы его рассмотрим в следующей ниже теореме. Ограничимся случаем, когда матрица A и вектор b образуют вполне управляемую пару (A, b), хотя от этого предположения при желании можно было бы освободиться.

Сначала напомним некоторые специальные свойства вполне управляемых и вполне наблюдаемых линейных процессов. Рассмотрим линейный автономный процесс в R^n:

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu, \quad \sigma = cx.$$

Если пара (A, b) является вполне управляемой, то существует действительное неособое преобразование координат $x = P\bar{x}$ в пространстве состояний R^n такое, что процесс $\mathcal{L}$ принимает вид

$$(\bar{\mathcal{L}}) \qquad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u, \quad \sigma = \bar{c}\bar{x},$$

где

$$A = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}$$

и

$$\bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = cP.$$

Пользуясь этими координатами, можно легко вычислить передаточную функцию от входа u к выходу σ,

$$\bar{c}\bar{A}^{-1}(z)\bar{b} = \frac{\bar{c}(z)}{|A(z)|}.$$

Здесь $|A(z)|$ есть определитель матрицы $A(z)$ или $\bar{A}(z) = zI - \bar{A}$, а полином

$$\bar{c}(z) = \bar{c}_n z^{n-1} + \bar{c}_{n-1} z^{n-2} + \ldots + \bar{c}_2 z + \bar{c}_1$$

имеет своими коэффициентами компоненты вектора $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{c}_n)$. Это важное вычисление облегчается тем, что

$$\bar{A}(z) \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \ldots \\ z^{n-2} \\ z^{n-1} \end{bmatrix} = |A(z)| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

так что

$$\bar{A}^{-1}(z)\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \ldots \\ z^{n-1} \end{bmatrix} |A(z)|^{-1}.$$

Таким образом, для любого заданного действительного полинома $\bar{c}(z)$ степени $\leqslant n-1$ имеется единственный вектор c, удовлетворяющий соотношению

$$\overline{c\bar{A}}^{-1}(z)\bar{b} = \frac{\bar{c}(z)}{|A(z)|}.$$

Теперь вернемся к координатам x в R^n, и пусть $\mu(z)$ — любой действительный полином степени $\leqslant n-1$. Рассмотрим уравнение относительно неизвестного вектора p:

$$pA^{-1}(z)b = \frac{\mu(z)}{|A(z)|}.$$

Его можно переписать в виде

$$(pP)(P^{-1}A^{-1}(z)P)(P^{-1}b)=\frac{\mu(z)}{|A(z)|}$$

относительно (pP) или в виде уравнения

$$(pP)\,\bar{A}^{-1}(z)\bar{b}=\frac{\mu(z)}{|A(z)|},$$

которое имеет единственное решение для (pP) и, таким образом, вектор p однозначно определен.

Процесс $\bar{\mathscr{L}}$ и, следовательно, процесс $\mathscr{L}$ [или пара (A, c)] является вполне наблюдаемым тогда и только тогда, когда

$$\det|c',\ A'c',\ \ldots,\ A'^{n-1}c'|\neq 0.$$

Согласно лемме 2 теоремы 14 главы 2 процесс $\bar{\mathscr{L}}$ является вполне наблюдаемым тогда и только тогда, когда полиномы

$$\bar{c}(z)=\bar{c}_n z^{n-1}+c_{n-1}z^{n-2}+\ldots+c_2 z+c_1,$$
$$|A(z)|=|\bar{A}(z)|=\det|zI-A|=z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_n$$

взаимно просты (не имеют общих корней). Таким образом, пара $(\bar{A},\ \bar{c})$ (или система $\bar{\mathscr{L}}$) является вполне наблюдаемой тогда и только тогда, когда передаточная функция

$$\bar{c}\bar{A}^{-1}(z)\,\bar{b}=\frac{\bar{c}(z)}{|A(z)|}$$

есть дробно-рациональная функция, у которой числитель и знаменатель взаимно просты. Теперь вернемся к первоначальным координатам x в R^n и рассмотрим процесс $\mathscr{L}$. Вид передаточной функции при переходе от системы $\bar{\mathscr{L}}$ к системе $\mathscr{L}$ (или обратно) не изменяется,

$$\bar{c}\bar{A}^{-1}(z)\bar{b}=(cP)(P^{-1}A^{-1}(z)P)(P^{-1}b)=cA^{-1}(z)\,b$$

и, таким образом, пара $(A,\ c)$ наблюдаема тогда и только тогда, когда взаимно просты числитель и знаменатель передаточной функции

$$cA^{-1}(z)\,b=\frac{\bar{c}(z)}{|A(z)|}.$$

Вернемся теперь к задаче Лурье о стабилизации систем с нелинейным законом управления. Мы сначала докажем сложную алгебраическую лемму, относящуюся к теории матриц.

Лемма. *Пусть A — действительная устойчивая $n\times n$-матрица, b и c — действительные n-мерные векторы и τ — неотрицательный скаляр. Предположим, что пара $(A,\ b)$ вполне управляема и что рациональная комплексная функция*

$$T(z)=\tau-2cA^{-1}(z)\,b\not\equiv 0$$

удовлетворяет условию $\operatorname{Re} T(i\omega) \geqslant 0$ *при* $-\infty < \omega < \infty$. *Тогда существуют две действительные симметричные* $n \times n$*-матрицы*

$$B > 0 \quad \text{и} \quad D \geqslant 0$$

и n*-мерный действительный вектор* q *такие, что*:

1) $A'B + B'A = -qq' - D$;
2) $Bb + c' + \sqrt{\tau}\, q = 0$;
3) *пара* $(A,\ q')$ *является наблюдаемой.*

Доказательство. Заметим, что b и q суть векторы-столбцы, и что c есть вектор-строка, в соответствии с ранее введенными обозначениями. Мы начнем с определения действительного полинома

$$\eta(z) = |A(z)|\,|A(-z)|\,\{\tau - cA^{-1}(z)b - b'A'^{-1}(-z)\,c'\}.$$

Заметим, что степень полинома $\eta(z)$ равна $2n$, так как наивысшая степень полиномов — элементов присоединенной матрицы $|A(z)|\,A^{-1}(z)$,— есть $n-1$, и что старший член $\eta(z)$ есть $(-1)^n \tau z^{2n}$. [Если $\tau = 0$, то полином $\eta(z)$ имеет степень $< 2n$. Однако важно лишь, что $\eta(z) \not\equiv 0$ (см. приведенное ниже упражнение).]

Далее, для доказательства необходимо провести анализ структуры разложения полинома $\eta(z)$ на действительные неприводимые (линейные) и квадратичные множители.

Так как $A'(z)$ и $|A(z)|\,A^{-1}(z)$ суть действительные полиномиальные матрицы, то $\eta(z)$ есть полином с действительными коэффициентами. Так как $\eta(z) = \eta(-z)$, то $\eta(z)$ — четный полином. На мнимой оси (при $z = i\omega$) имеем

$$\operatorname{Re} \eta(i\omega) = |A(i\omega)|\ |A(-i\omega)|\,\{\tau - 2 \operatorname{Re} cA^{-1}(i\omega)\, b\} \geqslant 0$$

при $-\infty < \omega < \infty$, как следует из условий леммы. Таким образом, нули полинома $\eta(z)$ распределены симметрично относительно действительной и мнимой оси, а нули функции $\eta(i\omega)$ имеют четную кратность [так как $\operatorname{Re} \eta(i\omega)$ не меняет знак на мнимой оси]. Поэтому

$$\eta(z) = \theta(z)\,\theta(-z),$$

где $\theta(z)$ есть действительный полином, у которого нет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Положим, наконец,

$$\theta(z) = \theta_1(z)\,\theta_2(z),$$

где $\theta_1(z)$ и $\theta_2(z)$ суть действительные полиномы с нулями только в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ и только на мнимой оси соответственно. Выберем полином $\theta_2(z)$ так, чтобы его старший коэффициент был равен $+1$. Имеем

$$\eta(z) = \theta_1(z)\,\theta_2(z)\,\theta_1(-z)\,\theta_2(-z).$$

Так как $\theta_1(i\omega)$ есть многочлен от ω, не обращающийся в нуль, то

$$\theta_1(i\omega)\,\theta_1(-i\omega) > \varepsilon_0 > 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Пусть α — такое действительное положительное число, что

$$\alpha^2 \leqslant \varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \alpha^2 \neq \theta_1(\lambda_i)\,\theta_1(-\lambda_i),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть характеристические числа матрицы A. Если $\theta_1(z)$ — константа, то полагаем $\alpha = 0$.

Пользуясь свойством управляемости пары (A, b), определим действительный вектор g с помощью соотношения

$$g'A^{-1}(z)\,b = \frac{\alpha\theta_2(z)}{|A(z)|}.$$

Это возможно, так как степень полинома $\theta_2(z)$ меньше n, если полином $\theta_1(z)$ не является константой и $\alpha \neq 0$. Нужная нам симметричная матрица D задается соотношением

$$D = gg'.$$

Рассмотрим действительный четный полином

$$\Gamma(z) = \theta_2(z)\,\theta_2(-z)\,[\theta_1(z)\,\theta_1(-z) - \alpha^2].$$

Так как

$$\theta_2(i\omega)\,\theta_2(-i\omega) \geqslant 0$$

и

$$\theta_1(i\omega)\,\theta_1(-i\omega) > \varepsilon_0 \geqslant \alpha^2,$$

то $\Gamma(i\omega) \geqslant 0$ для всех действительных ω. Кроме того, полином $\Gamma(z)$ взаимно прост с полиномом $|A(z)|\,|A(-z)|$, так как нули полинома $\Gamma(z)$ не равны ни одному из чисел $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \ldots$, или $\pm\lambda_n$. Так как $\Gamma(z)$ есть действительный четный полином и $\operatorname{Re}\Gamma(i\omega) \geqslant 0$, то существует действительный полином $\nu(z)$ с нулями только в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, и такой, что

$$\Gamma(z) = \nu(z)\,\nu(-z).$$

Так как главный член полинома $\Gamma(z)$ тот же, что и у полинома $\eta(z)$, а именно $(-1)^n\tau z^{2n}$, то в качестве $\nu(z)$ можно взять полином с главным членом $\sqrt{\tau}\,z^n$.

Теперь разделим $\nu(z)$ на $|A(z)|$. Частное есть $\sqrt{\tau}$, а остаток мы обозначим через $-\mu(z)$

$$\frac{\nu(z)}{|A(z)|} = -\frac{\mu(z)}{|A(z)|} + \sqrt{\tau}.$$

Здесь $\mu(z)$ есть действительный полином степени меньшей, чем n. Ясно, что $\mu(z) \not\equiv 0$, ибо в этом случае

$$\nu(z) = \sqrt{\tau}\,|A(z)| \quad \text{и} \quad \Gamma(z) = \tau\,|A(z)|\cdot|A(-z)|,$$

что противоречит тому факту, что полином $\Gamma(z)$ взаимно прост с полиномом $|A(z)||A(-z)|$. [Если $\tau=0$, то $\nu(z)=-\mu(z)\not\equiv 0$.]

Определим вектор q соотношением

$$q'A^{-1}(z)\,b=\frac{-\mu(z)}{|A(z)|}.$$

Поскольку полиномы $\mu(z)$ и $|A(z)|$ взаимно просты, то из теории наблюдаемости следует, что пара $(A,\ q')$ является вполне наблюдаемой. Зададим положительно определенную матрицу $B>0$ соотношением

$$A'B+B'A=-qq'-D,$$

или

$$B=\int_0^\infty e^{A't}\{qq'+D\}\,e^{At}\,dt.$$

Покажем теперь, что

$$Bb+c'+\sqrt{\tau}q=0.$$

Для этого заметим, что

$$\nu(z)\,\nu(-z)=\Gamma(z)=\eta(z)-\alpha^2\theta_2(z)\,\theta_2(-z).$$

Делением обеих частей последнего равенства на $|A(z)|\cdot|A(-z)$ получим

$$\left[\frac{-\mu(z)}{|A(z)|}+\sqrt{\tau}\right]\left[\frac{-\mu(-z)}{|A(-z)|}+\sqrt{\tau}\right]=$$
$$=\{\tau-cA^{-1}(z)b-b'A'^{-1}(-z)c'\}-b'A'^{-1}(z)\,gg'A^{-1}(-z)b.$$

Заменяя $-\mu(z)/|A(z)|$ на $q'A^{-1}(z)\,b$ и полагая $z=i\omega$, после некоторых упрощений получим

$$c\{A^{-1}(i\omega)+A^{-1}(-i\omega)\}\,b+\sqrt{\tau}q'\{A^{-1}(i\omega)+A^{-1}(-i\omega)\}\,b=$$
$$=b'A'^{-1}(i\omega)\{-qq'-gg'\}\,A^{-1}(-i\omega)b.$$

Учитывая соотношение

$$A'B+B'A=-qq'-gg'$$

и используя формулы

$$A=zI-A(z),\quad A^{-1}(z)\,A=AA^{-1}(z)=zA^{-1}(z)-I,$$

найдем, что

$$c+\sqrt{\tau}q')\{A^{-1}(i\omega)+A^{-1}(-i\omega)\}\,b=-b'B\{A^{-1}(i\omega)+A^{-1}(-i\omega)\}\,b.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}(b'B+c+\sqrt{\tau}q')\,A^{-1}(i\omega)=0.$$

Но $A^{-1}(0)=-A^{-1}$ есть действительная и неособая матрица, так что

$$b'B+c+\sqrt{\tau}q'=0.$$

Поэтому

$$Bb + c' + \sqrt{\tau} q = 0,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Мы приведем краткое следствие, представляющее собой некоторую модификацию доказанной леммы.

Следствие. *Пусть A — действительная устойчивая $n \times n$-матрица, а b и c действительные n-мерные векторы. Если*

$$T(i\omega) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \omega < \infty,$$

то

$$\operatorname{Re} T(z) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Доказательство. Заметим, что $T(z) = \tau - 2cA^{-1}(z)b$ есть комплекснозначная аналитическая функция без особенностей в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, так что $\operatorname{Re} T(z)$ есть гармоническая функция в правой полуплоскости. Но

$$\lim_{|z| \to \infty} T(z) = \tau \geqslant 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0$$

и, следовательно, функция $\operatorname{Re} T(z)$ неотрицательна, если z лежит в правой полуплоскости и имеет достаточно большой модуль. Таким образом,

$$\operatorname{Re} T(i\omega) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Если теперь $\operatorname{Re} T(z_0) < 0$ в некоторой точке z_0 из правой полуплоскости, то гармоническая функция $-\operatorname{Re} T(z)$ где-то в области $\operatorname{Re} z > 0$ должна иметь максимум. Но это противоречит принципу максимума для гармонических функций. Следовательно,

$$\operatorname{Re} T(z) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

что и требуется. Следствие доказано.

Следствие показывает, что предположение леммы относительно функции $T(z)$ можно заменить условием

$$\operatorname{Re} T(z) \geqslant 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

которое выглядит естественнее и при этом не ограничивает общности утверждения леммы. Условие $T(z) \not\equiv 0$ эквивалентно требованию $\tau + |c| > 0$ (см. упражнения). Такие функции иногда называют положительными и класс таких функций изучается в теории аналитических функций комплексного переменного. В последней формулировке лемма напоминает критерий устойчивости для процессов с линейным законом управления. Эта лемма нам понадобилась для доказательства следующей теоремы.

Теорема 10. *Рассмотрим процесс в R^n:*

$$(Л) \qquad \dot{x} = Ax + bu(\sigma), \quad \sigma = cx$$

с законом управления $u(\sigma)$ *из класса* $\mathcal{U}$, *где* A *есть действительная устойчивая матрица,* b *и* c *— действительные векторы, а пара* (A, b) *вполне управляема. Предположим, что существуют неотрицательные действительные числа* α *и* β, *где* $\alpha+\beta>0$ *такие, что рациональная комплексная функция*

$$T(z)=-(\alpha+\beta z)\,cA^{-1}(z)\,b$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} T(i\omega)\geqslant 0 \quad \textit{при} \quad -\infty<\omega<\infty.$$

Тогда начало координат есть устойчивая критическая точка процесса $\mathcal{Л}$ *для каждого* $u(\sigma)$ *из* $\mathcal{U}$. *Если, кроме того,* $\alpha>0$, *то процесс* $\mathcal{Л}$ *является глобально асимптотически устойчивым и, следовательно, абсолютно устойчивым.*

Доказательство. Пользуясь равенством $zI=A(z)+A$, получим

$$T(z)=-\beta cb-2\left(\frac{\beta cA+\alpha c}{2}\right)A^{-1}(z)\,b.$$

Так как $\lim\limits_{|z|\to\infty} A^{-1}(z)=0$ и $\operatorname{Re} T(i\omega)\geqslant 0$, то $-\beta cb\geqslant 0$. Заметим, что $T(z)\not\equiv 0$, иначе выполнялось бы равенство $cA^{-1}(z)\,b\equiv 0$, которое означает (см. упражнение ниже), что $c=0$. Но мы исключаем из рассмотрения этот случай, ибо при $c=0$ теорема тривиальна. Применим лемму, полагая

$$\tau=-\beta cb \quad \text{и} \quad k=\frac{\beta cA+\alpha c}{2}.$$

Согласно лемме существуют симметричные матрицы $B>0$ и $D\geqslant 0$ и вектор q, такие, что

$$A'B+B'A=-qq'-D, \quad Bb+\left(\frac{\beta cA+\alpha c}{2}\right)'+\sqrt{\tau}\,q=0.$$

Определим действительную функцию в R^{n+1}:

$$V(x,\sigma)=x'Bx+\beta\int_0^{\sigma} u(s)\,ds.$$

Ясно, что $V(x,\sigma)\geqslant 0$, причем $V(x,\sigma)>0$ при $x\neq 0$ и

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x,\sigma)=\infty.$$

Вычислим производную от функции V вдоль произвольного решения $x(t)$, $\sigma(t)=cx(t)$ системы

$$\dot{x}=Ax+bu(\sigma), \quad \dot{\sigma}=cAx+cbu(\sigma)$$

в R^{n+1}, соответствующего фиксированному управлению $u(\sigma)\in\mathcal{U}$:

$$\dot{V}=x'B\,(Ax+bu(\sigma))+(x'A'+u(\sigma)\,b')\,Bx+\beta u(\sigma)\,(cAx+cbu(\sigma)),$$

откуда

$$-\dot{V} = -x'(BA + A'B)x - (2b'B + \beta cA)xu(\sigma) - \beta cbu^2(\sigma),$$

или

$$-\dot{V} = x'Dx + x'qq'x + 2\left(-Bb - \frac{\beta A'c' + \alpha c'}{2}\right)' xu(\sigma) + \alpha cxu(\sigma) + \tau u^2(\sigma).$$

Из последнего соотношения следует, что

$$-\dot{V} = x'Dx + (\sqrt{\tau}u(\sigma) + q'x)^2 + \alpha\sigma u(\sigma) \geqslant 0.$$

Пусть x_0, $\sigma_0 = cx_0$ есть начальное состояние системы. Тогда соответствующее решение $x(t)$ удовлетворяет условию

$$x'Bx \leqslant V(x_0, cx_0).$$

Тем самым решение $x(t)$ определено для всех t из интервала $0 \leqslant t < \infty$, и начало координат является устойчивой критической точкой.

Предположим, что $\alpha > 0$. Если решение $x(t)$ не приближается к началу координат, то оно должно стремиться при $t \to \infty$ к некоторой точке $\bar{x} \in R^n$, так чтобы

$$\lim_{t \to \infty} V(x(t), cx(t)) = V(\bar{x}, c\bar{x}) > 0.$$

Но решение $(\bar{x}(t), \bar{\sigma}(t))$, начинающееся в точке $(\bar{x}, c\bar{x})$, удовлетворяет неравенству

$$V(\bar{x}(t), c\bar{x}(t)) < V(\bar{x}, c\bar{x}),$$

для некоторого $t > 0$, и по непрерывности $V(x(t), cx(t)) < V(\bar{x}, c\bar{x})$, если только $\sigma(t) \not\equiv 0$. Но в этом исключительном случае решение $\bar{x}(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x} = Ax$ или $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}$ и $-\dot{V} = x'Dx + (q'x)^2 = 0$. Но тогда $q'e^{At}\bar{x} \equiv 0$, откуда в силу условия наблюдаемости пары (A, q') следует, что $\bar{x} = 0$, что является противоречием. Итак,

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0,$$

и процесс $Л$ является абсолютно устойчивым. Теорема доказана.

Следующая теорема распространяет задачу Лурье на нелинейные процессы с нелинейным законом управления $u(\sigma)$ из $\mathcal{U}$. Мы докажем, что алгебраические условия теоремы 10 гарантируют асимптотическую устойчивость системы относительно начала координат при любом $u(\sigma) \in \mathcal{U}$. Конечно, это утверждение для нелинейного процесса относится лишь к некоторой окрестности начала координат.

Теорема 11. *Рассмотрим процесс в* R^n:

$$(\textstyle\sum) \qquad \dot{x} = f(x, u) = Ax + bu + o(x, u) \quad \text{класса } C^1$$

с заданной обратной связью

$$\sigma = \sigma(x) = cx + o(x) \text{ класса } C^1$$

и законом управления $u(\sigma)$ *из* $\mathcal{U}$. *Предположим, что* A *есть действительная устойчивая матрица,* b *и* c — *действительные векторы, причем пара* (A, b) *вполне управляема. Предположим далее, что существуют действительные числа*

$$\alpha > 0, \ \beta > 0 \quad \text{такие, что} \quad \tau = -\beta cb > 0$$

и что рациональная функция

$$T(z) = -(\alpha + \beta z) cA^{-1}(z) b$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} T(i\omega) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Тогда процесс $\sum$ *асимптотически устойчив относительно начала координат для каждого* $u(\sigma) \in \mathcal{U}$, *где* $u'(0) > 0$.

Доказательство. Пусть $o(x, u)$ есть величина высшего порядка малости по сравнению с $(|x| + |u|)$. Положим

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0), \quad c = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(0).$$

Пусть матрицы $B > 0$, $D \geqslant 0$ и вектор $q \neq 0$, получены так же, как и в теореме 10. Фиксируем закон управления $u(\sigma) \in \mathcal{U}$ и определим действительную функцию в R^{n+1} по формуле

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \beta \int_0^\sigma u(s)\, ds.$$

Ясно, что $V(x, \sigma) > 0$ всюду, кроме $x = \sigma = 0$. Выберем в качестве начального состояния точку $x_0 \neq 0$ в R^n, и пусть $x(t)$ — соответствующее решение уравнения

$$\dot{x} = f(x, u(\sigma(x))).$$

Полагая $\sigma(t) = \sigma(x(t))$ и вычисляя производную от функции $V(t) = V(x(t), \sigma(x(t)))$, получаем

$$-\dot{V} = x'Dx + (\sqrt{\tau} u + q'x)^2 + \alpha(\sigma - o(x)) u + uo(x, u) + xo(x, u).$$

Однако, поскольку матрица D не является положительно определенной, то очевидная оценка по Ляпунову может и не проходить для произвольного управления $u(t) \in \mathcal{U}$.

Поэтому положим $u(\sigma) = u_1 \sigma + o(\sigma)$, где $u_1 = u'(0) > 0$. Тогда, по теореме 10, линейный процесс

$$(Л) \qquad \dot{x} = Ax + bu(\sigma), \quad \sigma = cx$$

будет асимптотически устойчивым при линейном законе управле-

ния $u=u_1\sigma$. Однако $\mathcal{Л}$ в точности совпадает с линеаризацией нелинейного процесса

$$(\sum) \qquad \dot{x}=f(x,\ u(\sigma(x)))$$

для заданного закона управления $u(\sigma)=u_1\sigma+o(\sigma)$. Следовательно, $\sum$ — асимптотически устойчивый процесс в окрестности начала координат, что и требовалось доказать.

В качестве последнего вопроса теории устойчивости мы рассмотрим вопрос о *корректности задачи оптимального управления*. Является ли задача оптимального управления хорошо поставленной в том смысле, что малые изменения данных задачи порождают лишь малые изменения критерия оптимальности?

Рассмотрим задачу управления в R^n:

$$P=\{\mathcal{S},\ C,\ X_0,\ X_1,\ \Omega\}$$

для процесса

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x}=A(x)+B(x)u$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^{t_1}[A^0(x)+B^0(x)u]\,dt,$$

и коэффициентами $A(x)$, $B(x)$, $A^0(x)$, $B^0(x)$ класса C^1 в R^n. Управления суть измеримые функции $u(t)$, определенные на различных подынтервалах $0\leqslant t\leqslant t_1$ заданного конечного интервала $0\leqslant t\leqslant T$, причем $u(t)\subset\Omega$, где Ω — компактное выпуклое ограничивающее множество в R^m. Мы пытаемся перевести некоторую точку компактного множества X_0 начальных состояний в точку компактного целевого множества X_1 в пространстве R^n при оптимальном (минимальном) значении критерия качества $C(u)$.

Мы скажем, что другая такая задача управления

$$\hat{P}=\{\hat{S},\ \hat{C},\ \hat{X}_0,\ \hat{X}_1,\ \hat{\Omega}\},$$

лежит на расстоянии, не превосходящем δ от P, если

$$|A(x)-\hat{A}(x)|+|B(x)-\hat{B}(x)|+|A^0(x)-\hat{A}^0(x)|+|B^0(x)-\hat{B}^0(x)|<\delta,$$

когда $|x|<\frac{1}{\delta}$, и

$$\operatorname{dist}(X_0,\ \hat{X}_0)+\operatorname{dist}(X_1,\ \hat{X}_1)+\operatorname{dist}(\Omega,\ \hat{\Omega})<\delta$$

(мы пользуемся принадлежащим Хаусдорфу определением расстояния между непустыми компактными подмножествами пространств R^n и R^m). Расстояние между задачами P и $\hat{P}$ мы определим как точную нижнюю грань всех таких $\delta>0$. Тем самым, мы трактуем множество $\mathcal{P}$ всех таких задач управления как метрическое пространство.

Теорема 12. *Рассмотрим задачу управления P в пространстве $\mathcal{P}$, заданную в R^n системой*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = A(x) + B(x)u$$

с критерием качества

$$C(u) = \int_0^{t_1} [A^0(x) + B^0(x)u]\,dt$$

с коэффициентами $A(x)$, $A^0(x)$, $B(x)$, $B^0(x)$ класса C^1 в R^n, измеримыми управлениями $u(t) \subset \Omega$, определенными на различных интервалах $0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant T$ и компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$.

Начальную точку $x_0 \in R^n$ нужно по оптимальной траектории перевести в целевую точку $x_1 = 0$.

Предположим, что:

(a) *существует равномерная оценка $|x(t)| \leqslant \beta$ для всех траекторий процесса $\mathcal{S}$, начинающихся в точке $x(0) = x_0$ и соответствующих управлениям $u(t) \subset \Omega$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T+1$;*

(b) *существует допустимая траектория системы $\mathcal{S}$, переводящая точку x_0 в точку $x_1 = 0$ и соответствующая такому управлению $u_0(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$, что $C(u_0) < C(u)$ для всех $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau;$ $T \leqslant \tau \leqslant T+1)$ со значениями в Ω;*

(c) rank $[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$, *где* $A(0) = 0$, $A = \frac{\partial A}{\partial x}(0)$, $B = B(0)$;*c*

(d) Ω *содержит точку $u = 0$ внутри себя.*

Тогда существует окрестность $\mathcal{N}$ задачи P в пространстве $\mathcal{P}$ такая, что каждая задача $\hat{P} \in \mathcal{N}$ обладает оптимальным управлением $\hat{u}^*(t)$, определенным на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^* \leqslant T$, а оптимальное значение критерия качества $\hat{C}(\hat{u}^*)$ стремится к $C(u^*)$, когда $\hat{P}$ стремится к P.

Доказательство. Первые два условия предполагают существование оптимального управления $u^*(t) \subset \Omega$ для задачи P, определенного на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Кроме того, $C(u^*) < \inf C(u)$ для всех $u(t) \subset \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant \tau;$ $T \leqslant \tau \leqslant T+1)$.

Пусть теперь задача $\hat{P}$ лежит в некоторой достаточно малой окрестности $\mathcal{N}$ задачи P в метрическом пространстве $\mathcal{P}$. Общеизвестные оценки показывают, что имеется равномерная граница для всех траекторий процесса $\hat{\mathcal{S}}$, соответствующих управлениям $\hat{u}(t) \subset \hat{\Omega}$ $(0 \leqslant t \leqslant T+1)$. Таким образом, если точки множества $\hat{X}_0$ можно перевести в точки множества $\hat{X}_1$ с помощью управлений из $\hat{\Omega}$, определенных на интервалах $0 \leqslant t \leqslant \hat{t}$, $\hat{t} \leqslant T$, то задача $\hat{P}$ обладает оптимальным управлением $\hat{u}^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*;$ $t^* \leqslant T)$.

Пусть управление $u^*(t)$, определенное на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*$, переводит точку x_0 оптимально в $x_1 = 0$ вдоль траектории системы $\mathcal{S}$. Пусть управление $\hat{u}_1(t)$ — ближайшая к $u^*(t)$ точка в $\hat{\Omega}$, и пусть точка $\hat{x}_0 \in \hat{X}_0$ близка к x_0. Тогда управление $\hat{u}_1(t)$ переводит точку $\hat{x}_0$ в некоторую точку $\hat{x}_1$ из некоторой окрестности начала координат, вдоль траектории процесса $\hat{\mathcal{S}}$. При предположениях (c) и (d) точку x_1 можно перевести в любую точку в окрестности начала координат малыми управлениями из $\Omega \cap \hat{\Omega}$ вдоль траекторий процесса $\mathcal{S}$. С помощью методов приближения, используемых в локальной теории управляемости, мы находим, что точку $\hat{x}_1$ в течение короткого промежутка времени можно перевести в множество $\hat{X}_1$ вдоль траектории процесса $\hat{\mathcal{S}}$. Поэтому для каждой задачи $\hat{P}$ из достаточно малой окрестности $\mathcal{N}$ существует оптимальное управление $\hat{u}^*(t)$, определенное на интервале $0 \leqslant t \leqslant t^*(t^* < T)$.

Пользуясь изложенной конструкцией, можно показать, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует столь малая окрестность $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$, что $\hat{C}(\hat{u}^*) < C(u^*) + \varepsilon$. Теперь предположим, что $\hat{C}(\hat{u}^*) < C(u^*) - \varepsilon$ для некоторого $\hat{P} \subset \mathcal{N}_1$, независимо от того, как мала окрестность $\mathcal{N}_1$, выбираемая для задачи P. Тогда, пользуясь управлением $\tilde{u}(t) \subset \Omega$, ближайшим к $\hat{u}^*(t)$, точку x_0 можно перевести в окрестность точки $x_1 = 0$ за время $0 \leqslant t \leqslant \hat{t}^*$, $\hat{t}^* \leqslant T$, и отсюда перевести точно в $x_1 = 0$ некоторым управлением $\tilde{\tilde{u}}$, определенным на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T + 1$ с критерием качества $C(\tilde{\tilde{u}}) < C(u^*) - \frac{\varepsilon}{2}$. Но это противоречит условию (b) и, таким образом, $C(\hat{u}^*) \geqslant C(u^*) - \varepsilon$ всякий раз, когда окрестность $\mathcal{N}_1$ достаточно мала. Поэтому функция $\hat{C}(\hat{u}^*)$, являясь одновременно функцией от $\hat{P} \in \mathcal{P}$, непрерывна по $\hat{P}$ в точке P. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $P^{(k)}$ — последовательность задач управления из $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}$ и пусть*

$$\lim_{k \to \infty} P^{(k)} = P.$$

Тогда существует подпоследовательность $P^{(k_i)}$, для которой $t^*_{(k_i)} \to t^*$,

$$\lim_{i \to \infty} u^*_{(k_i)}(t) = u^*(t) \text{ слабо}$$

и

$$\lim_{i \to \infty} x^*_{(k_i)}(t) = x^*(t) \text{ равномерно}$$

на каждом компактном подынтервале отрезка $0 \leqslant t < t^*$. Здесь $u^*(t) \subset \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ есть оптимальное управление для задачи P, $x^*(t)$ — соответствующее решение.

Доказательство. Так как все t_k^* лежат на компактном интервале, подпоследовательность $t_{(k_i)}^*$ сходится к некоторой точке $t^* \leqslant T$. Так как все $u_{(k_i)}^*(t) \subset \Omega_{(k_i)}$ и $\Omega_{(k_i)} \to \Omega$, то функции $u_{(k_i)}^*(t)$ равномерно ограничены на компактном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \leqslant \bar{t} < t^*$ и на нем подпоследовательность слабо сходится. Заметим, что все $u_{(k_i)}^*(t)$ определены на интервале $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$ для больших k_i и мы сохраняем за соответствующей подпоследовательностью обозначение $u^*_{k_i)}(t)$. Обозначим через $u^*(t)$ ее слабый предел. Ясно, что $u^*(t) \subset \Omega$ (почти всюду), так как в силу предположения о том, что $u_{(k_i)}^* \subset \Omega_{(k_i)}$ и $\Omega_{(k_i)} \to \Omega$, точка $u^*(t)$ не может лежать снаружи какой-либо из счетного числа гиперплоскостей, определяющих область Ω в течение промежутка времени ненулевой длительности. Соответствующие решения $x_{(k_i)}^*(t)$ равномерно ограничены с равномерно ограниченными производными, и таким образом, подпоследовательность $x_{(k_i)}$ (пока еще занумерованная индексами k_i) сходится равномерно на каждом подынтервале $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$; $\bar{t} < t^*$ к некоторой предельной функции $x^*(t)$.

Пользуясь методами доказательства теорем существования главы 4, мы находим, что $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ является допустимым управлением для процесса $\mathcal{S}$, переводящим точку x_0 в точку $x_1 = 0$ вдоль решения $x^*(t)$. Аналогично, $C_{(k_i)}(u_{(k_i)}^*) \to C(u^*)$ и, следовательно, $u^*(t)$ есть оптимальное управление для процесса $\mathcal{S}$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Рассмотрим задачу управления P в пространстве $\mathcal{P}$, соответствующую системе*

$$(\mathcal{S}) \qquad \dot{x} = A(x) + B(x)u \quad \text{в} \quad R^n,$$

с критерием качества

$$C(u) = t_1.$$

В условиях теоремы существует такая окрестность $\mathcal{N}$ задачи P в пространстве $\mathcal{P}$, что каждая задача управления $\hat{P} \in \mathcal{N}$ имеет оптимальное значение критерия качества $\hat{t}^* < T$, причем $\hat{t}^*$ стремится к t^*, когда $\hat{P}$ стремится к P.

Упражнения

1. Рассмотрим позиционное управление вращающимся твердым телом:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 + u_1(t),$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\,\omega_3\omega_1 + u_2(t),$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 + u_3(t),$$

где I_1, I_2, I_3 есть главные моменты инерции, а ω_1, ω_2, ω_3 — соответствующие компоненты угловой скорости. Построить функцию Ляпунова и доказать, что система может быть переведена из любого заданного начального состояния в начало координат посредством управлений, удовлетворяющих ограничению $|u_i(t)| \leqslant 1$.

2. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x) \quad \text{класса} \quad C^1 \quad \text{в} \quad R^n.$$

Допустим, что функция $V(x)$ класса C^1 в R^n удовлетворяет условиям:

(a) $V(x) \geqslant 0$ в R^n, причем $V(x) = 0$ только при $x = 0$;

(b) $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = \infty$;

(c) $\dfrac{\partial V}{\partial x_i} f^i(x) \leqslant \theta(x, V)$,

где θ — функция класса C^1 в R^{n+1} такая, что каждое решение скалярного дифференциального уравнения $\dot{V} = \theta(x, V)$ стремится к нулю при $t \longrightarrow \infty$.

Доказать, что система $\mathscr{S}$ глобально асимптотически устойчива относительно начала координат.

3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x), \quad f(x) \in C^1 \quad \text{в} \quad R^n.$$

Пусть D — компактное множество в R^n. Мы скажем, что D — инвариантное подмножество, если каждое решение, начинающееся в D, всегда остается в D. Пусть $V(x)$ — действительная функция класса C^1 в D такая, что $(\operatorname{grad} V) f(x) \leqslant 0$. Пусть, далее, E — максимальное инвариантное подмножество в D, на котором $(\operatorname{grad} V) f(x) = 0$. Доказать, что каждое решение системы $\mathscr{S}$ в D стремится к E при $t \longrightarrow +\infty$.

4. Рассмотрим управляемый процесс в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u) \quad \text{класса} \quad C^1 \quad \text{в} \quad R^{n+m},$$

с компактным ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$. Показать, что шар радиуса $\rho > 0$

$$D(\rho) = \{x \mid x'x \leqslant \rho^2\}$$

является инвариантным, если

$$\max_{\substack{u \in \Omega \\ x'x = \rho^2}} x' f(x, u) \leqslant 0.$$

5. Показать, что критерий устойчивости теоремы 9 инвариантен относительно подстановки

$$\overline{A} = P^{-1} A P, \quad \overline{B} = P'BP, \quad \overline{C} = P'CP, \quad \overline{b} = P^{-1} b, \quad \overline{c} = cP,$$

где P — ортогональная матрица.

6. Показать, что условия теоремы 9 при $\alpha = 0$ являются бессодержательными, так как форма

$$-\dot{V} = -(2Bx + uc')'(Ax + bu)$$

от переменных x, u не является положительно определенной. Пусть

$$-cb = \left(Bb + \frac{1}{2} A'c'\right)' C^{-1} \left(Bb + \frac{1}{2} A'c'\right),$$

и предположим, что система уравнений

$$(\mathscr{L}) \qquad Ax + bu(cx) = 0$$

имеет только нулевое решение для всех $u \in \mathscr{U}$. Показать, что тогда $\mathscr{L}$ является абсолютно устойчивой системой.

7. Рассмотрим линейный автономный разомкнутый процесс

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где x и u изменяются в R^n. Теперь рассмотрим замкнутый контур с обратной связью, описываемый системой

$$\dot{x}=Ax+B(u-x).$$

Пусть передаточная матрица разомкнутого контура будет

$$T(z)=(z-A)^{-1}B,$$

а передаточная матрица замкнутого контура будет

$$T_c(z)=[z-(A-B)]^{-1}B.$$

Доказать *формулу Найквиста:*

$$T_c(z)=[I+T(z)]^{-1}T(z).$$

Показать, что если функция $T_c(z)$ имеет n полюсов в левой полуплоскости, то замкнутая система устойчива [т. е. что $(A-B)$ есть устойчивая матрица].

8. Пусть A — действительная устойчивая $n\times n$-матрица, b и c — действительные векторы, пара (A, b) — вполне управляема и

$$cA^{-1}(z)b+cA^{-1}(-z)b\equiv 0.$$

Доказать, что тогда (как и в лемме, предшествующей теореме 10) $c=0$. [Указание: для больших $|z|$ анализ соответствующего степенного ряда показывает, что

$$cAb=0, \quad cA^3b=0, \ldots, cA^{2n-1}b=0.$$

Поэтому, если пара (A^2, b) управляема, то $c=0$. Но пара (A, b) управляема, что эквивалентно необращению в нуль некоторых компонент вектора $\hat{b}$ (см. упражнение 7 раздела 2.3). Изучая жорданову форму $\hat{A}$ матрицы A (см. также упражнение 7 раздела 2.3), легко установить, что пара (A^2, b) также управляема.]

9. Рассмотрим управляемый процесс в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=A(x)+B(x)u,$$

с критерием качества

$$C(u)=\int_0^T [A^0(x)+B^0(x)u]\,dt$$

с измеримыми управлениями $u(t)$, определенными на фиксированном конечном интервале времени $0\leqslant t\leqslant T$ и с компактным выпуклым ограничивающим множеством $\Omega\subset R^m$. Предположим, что коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $A^0(x)$, $B^0(x)$ принадлежат классу C^1 в R^n, а начальное состояние x_0 лежит в замкнутом ограниченном множестве $\Delta\subset R^n$. Ищется оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0\leqslant t\leqslant T$ с соответствующей траекторией $x^*(t)\subset\Delta$. Применим к этой задаче, являющейся задачей с ограниченными фазовыми координатами, метод *штрафных функций* (см. упражнение 12 раздела 3.4).

Пусть $F(x)$ — действительная непрерывная функция, равная нулю на Δ, и строго положительная вне Δ. Для каждого действительного $\lambda>0$ пусть $u_\lambda^*(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ есть оптимальное управление для системы $\mathscr{S}$ с соответствующим значением критерия качества

$$C_\lambda(u)=\int_0^T [A^0(x)+B^0(x)u+\lambda F(x)]\,dt$$

(без учета фазовых ограничений Δ). Предположим, что

(a) совокупность траекторий процесса $\mathscr{S}$, соответствующих управлениям из Ω, является равномерно ограниченной: $|x(t)|\leqslant\beta$;

(b) существует константа $K>0$ такая, что $|C_\lambda(u_\lambda^*)|<K$ для всех $\lambda>0$.

Показать, что существует последовательность $\lambda_i \longrightarrow \infty$, такая, что

$$u^*_{\lambda_i}(t) \longrightarrow u^*(t) \text{ слабо,}$$

$$x^*_{\lambda_i}(t) \longrightarrow x^*(t) \text{ равномерно,}$$

и

$$C_{\lambda_i}(u^*_{\lambda_i}) \longrightarrow C(u^*).$$

Здесь $u^*(t)$ есть оптимальное управление для задачи с ограниченными фазовыми координатами, а $x^*(t)$ — соответствующая оптимальная траектория, лежащая в Δ.

10. Рассмотрим линейный автономный процесс в R^n:

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + Bu,$$

с измеримыми управлениями $u(t)$, которые определены на различных конечных интервалах времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и принимают значения из компактного выпуклого многогранника $\Omega \subset R^m$, содержащего точку $u = 0$ внутри себя. Нужно перевести систему из начального состояния x_0 в точку $x_1 = 0$ за минимальное время. Предположим, что существует оптимальное управление $u^*(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t^*)$ и что процесс $\mathscr{L}$ является нормальным, так что такое управление $u^*(t)$ единственно.

Управление $\hat{u}(t) \subset \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant \hat{t})$ называется *δ-субоптимальным*, если $\hat{t} \leqslant t^* + \delta$ и $|\hat{x}(\hat{t})| \leqslant \delta$.

Показать, что для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что если существуют абсолютно непрерывные функции $x(t)$, $\eta(t)$, удовлетворяющие условиям:

(a) $|\dot{x}(t) - Ax(t) - B\hat{u}(t)| < \varepsilon$;

(b) $|x(0) - x_0| < \varepsilon$ и $|x(\hat{t})| < \varepsilon$;

(c) $|\dot{\eta}(t) + \eta(t) A| < \varepsilon$;

(d) $|\eta(t) B \hat{u}(t) - \max\limits_{u \in \Omega} \eta(t) Bu| < \varepsilon$ почти всюду;

(e) функция $\eta(t)$ не обращается в нуль;

(f) существует лишь конечное множество моментов времени t, при которых выражение $\eta(t) Bu$, рассматриваемое как функция от u, достигает своего максимального значения в каждой точке некоторого ребра многогранника Ω,

тогда управление $\hat{u}(t)$ является субоптимальным, т. е. выполняется неравенство

$$\hat{t} \leqslant t^* + \delta \text{ и } |\hat{x}(\hat{t})| < \delta.$$

11. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x) + w(t), \quad f \in C^1$$

с непрерывными возмущениями $w(t)$ на $0 \leqslant t < \infty$. Система считается устойчивой (в начале координат) относительно постоянно действующих возмущений, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|x(t)| < \varepsilon$ $(0 \leqslant t < \infty)$, если $|x_0| < \delta$, $|w(t)| < \delta$ $(0 \leqslant t < \infty)$. Рассмотрим теперь управляемый процесс в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u), \quad f \in C^1 \text{ в } R^{n+m},$$

причем $f(0, 0) = 0$ и $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$, где $A = f_x(0, 0)$, $B = f_u(0, 0)$. Показать, что существует линейное управление с обратной связью

$$u = Dx,$$

такое, что процесс

$$\dot{x} = f(x, Dx) + w(t)$$

является устойчивым относительно постоянно действующих возмущений.

ГЛАВА 7

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

В этой главе мы применим ранее развитую общую теорию оптимального управления к ряду технических и теоретических задач управления. Синтез здесь имеет целью определить управление с обратной связью, когда это возможно сделать, или привести задачу к некоторой вычислительной процедуре, при помощи которой может быть определена управляющая функция. Более подробное обсуждение вычислительных методов для решения двухточечной краевой задачи оптимального управления можно найти в дополнении A и трудах, указанных в библиографии.

В дополнении A мы даем краткий обзор методов, пригодных для определения оптимального управления с использованием вычислительных машин, точнее, методов решения двухточечной краевой задачи, которая возникает при применении принципа максимума. Это дает нам управляющую функцию для управления по разомкнутому циклу (см. главу 1) при заданных начальных условиях. Одна из возможностей для синтеза управления в виде системы с обратной связью по известному управлению по разомкнутому циклу состоит в измерении текущего состояния обычного управляемого процесса и вычислении в очень быстром темпе управляющей функции разомкнутой системы. Первые найденные значения этой функции используются на коротком интервале времени, после которого производится новое измерение состояния процесса и вычисляется новая управляющая функция разомкнутой системы, соответствующая этому новому измерению. Потом процедура повторяется. Таким образом, внешние возмущения и другие неизвестные берутся в расчет тем же самым образом, как при построении управления с обратной связью. Если никакие возмущения или другие неизвестные не встречаются, то значения повторно вычисленной управляющей будут совпадать с соответствующими значениями ранее вычисленного управления. Это, по существу, принцип оптимальности Беллмана в теории динамического программирования.

Принцип оптимальности.

Оптимальная управляющая политика обладает тем свойством, что каково бы ни было начальное состояние и начальная управляющая политика, последующая управляющая политика (т. е. политика после короткого промежутка времени) должна составлять оптимальную политику относительно состояния, которое получается в результате использования начальной политики в течение указанного короткого промежутка времени.

Имеются некоторые задачи оптимального управления, которые непосредственно не удовлетворяют этому принципу. Например, при рассмотрении задачи о минимизации времени управления при движении к началу координат, при ограничениях на среднюю энергию, после короткого промежутка времени, в течение которого движение происходило вдоль оптимальной траектории, указанное среднее значение может далее оказаться недоступным. Этот недостаток легко устраняется при переходе в рассматриваемой задаче к другим координатам. Мы теперь вернемся к задачам прямого конструирования синтезирующей функции управления с обратной связью.

Многие особенности нелинейных задач управления проявляются уже в системах второго порядка. При решении теоретических и технических задач часто встречаются системы, которые можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Синтез оптимального управления с обратной связью для нелинейных процессов второго порядка с одной степенью свободы рассмотрен в разделе 7.1.

Раздел 7.2 содержит классический пример, относящийся к вопросу об управлении ракетой, а именно, задачу о достижении метеорологической ракетой нужной высоты (относительно земли) при наименьшей затрате топлива.

Раздел 7.3 посвящен задаче управления угловой скоростью космического корабля, а в разделе 7.4 содержатся приложения к задаче оптимального наведения.

Дальнейшие приложения теории можно найти в доступных книгах, относящихся к экономике, проектированию химических процессов, исследованию операций и т. д. Вообще, эта теория может быть использована во всех задачах, приводящих к динамическому процессу, например, таких, как управление предприятием и т. д. Однако в таких задачах зачастую трудно построить адекватную математическую модель управляемого процесса. Тем не менее, с помощью современных эффективных вычислительных машин с каждым днем удается исследовать все более широкий круг подобных задач, в соответствии с появлением адекватного описания динамики процесса, происходящего в исследуемой системе.

Журналы всех технических обществ (например, AIAA, IEEE, ASME, AIChE, ORS, SIAM Journal on Control, «Автоматика и телемеханика») содержат много примеров применения рассматриваемой нами теории.

7.1. Синтез оптимальных по быстродействию управлений с обратной связью для нелинейных систем второго порядка с одной степенью свободы

Рассмотрим дифференциальное уравнение системы с одной степенью свободы,

$$\ddot{x}+f(x, \dot{x})=u,$$

или эквивалентную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=-f(x, y)+u.$$

Предположим, что функция $f(x, y)$ принадлежит классу C^1 в плоскости R^2, и что управление u принимает значения из компактного интервала Ω: $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

Определение. Для заданных начальных условий (x_0, y_0) в момент $t=0$ обозначим через Δ класс всех измеримых управлений $u(t)$, определенных на различных конечных интервалах времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$, принимающих значения из множества Ω и переводящих систему из точки (x_0, y_0) в начало координат $(0, 0)$ в момент времени $t=t_1$. Соответствующая траектория $(x(t), y(t))$ есть абсолютно непрерывное решение системы уравнений

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-f(x, y)+u(t)$$

с начальными условиями $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

Управление $u(t)$, определенное на интервале $[0, t_1]$ в Δ, называется оптимальным (по быстродействию), если для каждого управления $\hat{u}(t)$ в Δ, определенного на интервале $[0, \hat{t}_1]$, мы имеем $t_1 \leqslant \hat{t}_1$. Из принципа максимума [теорема 2 главы 5] известно, что оптимальное управление необходимо является максимальным управлением. Это означает, что:

1) существует сопряженное решение, нигде не обращающееся в нуль, представляющее собой абсолютно непрерывный вектор

$$\boldsymbol{\eta}(t)=(\eta_1(t), \eta_2(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1),$$

такой, что вектор-функции $\mathbf{x}(t)=(x(t), y(t))$ и $\boldsymbol{\eta}(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial \eta_1}, \quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial \eta_2}, \quad \dot{\eta}_1=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{\eta}_2=-\frac{\partial H}{\partial y};$$

2) $H(\eta_1(t),\ \eta_2(t),\ x(t),\ y(t),\ u(t)) = M(\eta_1(t),\ \eta_2(t),\ x(t),\ y(t))$ для почти всех t из интервала $[0,\ t_1]$. Здесь

$$H(\eta_1,\ \eta_2,\ x,\ y,\ u) = \eta_1 y - \eta_2 f(x,\ y) + \eta_2 u$$

и

$$M(\eta_1,\ \eta_2,\ x,\ y) = \max_{-1 \leqslant u \leqslant 1} H(\eta_1,\ \eta_2,\ x,\ y,\ u);$$

3) $0 \leqslant M(\eta_1(0),\ \eta_2(0),\ x(0),\ y(0)) = M(\eta_1(t),\ \eta_2(t),\ x(t),\ y(t))$ для всех t из интервала $[0,\ t_1]$.

Мы хотим построить такую функцию $\Psi(x,\ y)$, чтобы каждая траектория $(x(t),\ y(t))$ системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x,\ y) + \Psi(x,\ y)$$

достигала начала координат за минимальное время. Для этого мы для каждой начальной точки $(x_0,\ y_0)$ найдем управление, которое переводит точку $(x_0,\ y_0)$ в точку $(0,\ 0)$ за оптимальное время, а затем укажем, как использовать найденное управление $u(t)$ для построения *синтезирующей* функции, которую мы обозначим через $\Psi(x,\ y)$.

Мы рассмотрим сначала задачу оптимального быстродействия, т. е. задачу определения управлений $u(t) \subset \Omega$, переводящих точку $(x_0,\ y_0)$ в целевую точку $(0,\ 0)$ вдоль соответствующих траекторий $(x(t),\ y(t))$ системы $\mathscr{S}$ за минимальное время. Требуемый синтез управления с обратной связью $\Psi(x,\ y)$ может быть осуществлен затем при помощи попятного движения во времени вдоль траекторий системы. При этом мы будем отмечать те точки в плоскости $(x,\ y)$, где величина управления $u(t)$ меняется скачком. Линию переключения управления обычно можно легко найти, так как максимальные управления принимают только два значения ($+1$ или -1) и имеется определенное соответствие между изменением величины управления и положением фазовой точки на плоскости $(x,\ y)$. Мы рассмотрим в дальнейшем два примера, иллюстрирующих метод построения $\Psi(x,\ y)$. Покажем теперь, что оптимальное управление может принимать только два значения, $+1$ или -1.

Максимальные управления суть релейные управления

Рассмотрим задачу управления для системы

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x,\ y) + u, \quad f(x,\ y) \in C^1, \ \Omega\colon -1 \leqslant u \leqslant 1$$

с измеримыми управлениями $u(t) \in \Delta$, переводящими начальную точку $(x_0,\ y_0)$ в начало координат, как сказано выше. Траектория системы $\mathscr{S}$, соответствующая максимальному управлению, называется максимальной траекторией.

Определение. Управление $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ из класса Δ называется *релейным* управлением, если существует конечное число моментов переключения

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = t_1,$$

таких, что на каждом открытом интервале $\tau_{i-1} < t < \tau_i$, $i = 1, \ldots, k$ функция $u(t)$ постоянна и равна -1 или $+1$, причем значения функции $u(t)$ на каждой паре соседних интервалов отличаются по знаку.

Применяя принцип максимума, мы немедленно получаем следующий результат.

Следствие. *Пусть $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ есть максимальное управление из класса Δ для системы $\mathscr{S}$. Тогда $u(t)$ почти всюду равно релейному управлению $\operatorname{sgn} \eta_2(t)$. Кроме того, сопряженное решение $\eta_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ имеет только конечное число нулей и каждый из этих нулей является простым.*

Доказательство. Так как $H(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = M(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{x}(t))$ для почти всех t из интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$, то $u(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t)$ для почти всех t. Действительно, мы можем доопределить управление $u(t)$ на множестве меры нуль, не изменяя соответствующего решения, так что

$$u(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad \eta_2(t) < 0, \\ 0, & \text{если} \quad \eta_2(t) = 0, \\ +1, & \text{если} \quad \eta_2(t) > 0. \end{cases}$$

Теперь учтем, что сопряженное решение $\eta(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

и, таким образом, не обращающийся в нуль вектор $\boldsymbol{\eta}(t)$ принадлежит классу C^1 на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и удовлетворяет приведенной выше системе линейных дифференциальных уравнений всюду на этом интервале. Если бы функция $\eta_2(t)$ имела на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ бесконечное множество нулей, то в точке накопления $\bar{t}$ мы имели бы $\eta_2(\bar{t}) = 0$, $\dot{\eta}_2(\bar{t}) = 0$, откуда $\eta_1(\bar{t}) = 0$, что невозможно. Следовательно, функция $\eta_2(t)$ имеет на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ лишь конечное число нулей. В каждом таком нуле $t = \tau$ мы имеем $\eta_1(\tau) \neq 0$, так что $\dot{\eta}_2(\tau) \neq 0$ и $\bar{t} = \tau$ есть простой нуль функции $\eta_2(t)$. Следствие доказано.

Замечание. Впредь мы будем всегда рассматривать максимальное управление $u(t)$, модифицированное на множестве меры нуль таким образом, чтобы оно совпадало всюду с соответствующим релейным управлением $u(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t)$. Заметим, что на замкнутом интервале между моментами переключения решение $\mathbf{x}(t)$,

соответствующее максимальному управлению $u(t)$, принадлежит классу C^1.

Следующая теорема связывает моменты переключения для максимального решения с геометрией фазовой плоскости. Этот результат, который состоит в том, что нули функции $y(t)$ чередуются с нулями функции $\eta_2(t)$, нужен для описания свойств множества переключений W, необходимых для конструирования управления с обратной связью.

Теорема 1. *Пусть управление $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ из Δ является максимальным для системы $\mathcal{S}$, в смысле, определенном выше. Пусть $\mathbf{x}(t) = (x(t),\ y(t))$ — соответствующее решение, а $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ — сопряженное решение $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Пусть далее ξ_1, ξ_2 — моменты времени из интервала $[0, t_1]$ такие, что $0 \leqslant \xi_1 < \xi_2 \leqslant t_1$. Тогда справедливы следующие четыре утверждения:*

1) *если $\eta_2(\xi_1) = \eta_2(\xi_2) = 0$ и $y(\xi_1) = 0$, то $y(\xi_2) = 0$;*

2) *если $\eta_2(\xi_1) = \eta_2(\xi_2) = 0$ и $y(\xi_1) \neq 0$, то $y(\xi_2) \neq 0$, но функция $y(t)$ имеет нуль на открытом интервале $\xi_1 < t < \xi_2$;*

3) *если $y(\xi_1) = y(\xi_2) = 0$, $y(t) \neq 0$ на интервале $\xi_1 < t < \xi_2$ и если $\eta_2(\xi_1) = 0$, то $\eta_2(\xi_2) = 0$;*

4) *если $y(\xi_1) = y(\xi_2) = 0$, $y(t) \neq 0$ на интервале $\xi_1 < t < \xi_2$ и если $\eta_2(\xi_1) \neq 0$, то $\eta_2(\xi_2) \neq 0$, но функция $\eta_2(t)$ имеет нуль на открытом интервале $\xi_1 < t < \xi_2$.*

Таким образом, при условии, что нули функции $y(t)$ являются изолированными, они или совпадают с нулями функции $\eta_2(t)$ или никакой из нулей функции $y(t)$ не является нулем функции $\eta_2(t)$, но эти два множества нулей «переплетаются».

Доказательство. Предположим, что $\eta_2(\xi_1) = \eta_2(\xi_2) = 0$. Так как $M(\boldsymbol{\eta}(0), \mathbf{x}(0)) = M(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{x}(t)) = \eta_1 y - \eta_2 f(x, y) + |\eta_2| \geqslant 0$ для всех t из интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$, то $\eta_1(\xi_1)\eta_1(\xi_2) < 0$ и

$$\eta_1(\xi_1)\, y(\xi_1) = \eta_1(\xi_2)\, y(\xi_2) \geqslant 0.$$

Таким образом, $y(\xi_1) = 0$ тогда и только тогда, когда $y(\xi_2) = 0$. Если $y(\xi_1) \neq 0$, то $y(\xi_1)\, y(\xi_2) < 0$ и, таким образом, у функции $y(t)$ имеется только один нуль на интервале $\xi_1 < t < \xi_2$. Поэтому утверждения 1) и 2) доказаны.

Теперь предположим, что $y(\xi_1) = y(\xi_2) = 0$ и $y(t) \neq 0$ на интервале $\xi_1 < t < \xi_2$. Предположим также, что $\eta_2(\xi_1) = 0$. Мы уже показали, что функция $\eta_2(t)$ не обращается в нуль на интервале $\xi_1 < t < \xi_2$. Таким образом, на замкнутом интервале $\xi_1 \leqslant t \leqslant \xi_2$ функция $y(t) \in C^2$, причем под производными в концевых точках понимаются односторонние производные. На замкнутом интервале имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}[y\eta_1 + \dot{y}\eta_2] = 0.$$

Поэтому

$$\dot{y}(\xi_1)\, \eta_2(\xi_1) = \dot{y}(\xi_2)\, \eta_2(\xi_2).$$

Далее, $y^2(t)+\dot{y}^2(t)\neq 0$ на интервале $\xi_1<t<\xi_2$, так как в противном случае из свойства единственности решений системы дифференциальных уравнений $\mathscr{S}$ вытекало бы, что $y(t)\equiv 0$ на этом интервале. Так как $\eta_2(\xi_1)=0$, то мы находим, что $\eta_2(\xi_2)=0$. Таким образом, утверждение 3) доказано.

Допустим, наконец, что $y(\xi_1)=y(\xi_2)=0$, $y(t)\neq 0$, $(\xi_1<t<\xi_2)$ и $\eta_2(\xi_1)\neq 0$. Тогда ясно, что $\eta_2(\xi_2)\neq 0$. Но если функция $\eta_2(t)$ не обращается в нуль нигде на интервале $\xi_1\leqslant t\leqslant\xi_2$, то $\dot{y}(\xi_1)\dot{y}(\xi_2)>0$, что невозможно, так как ξ_1 и ξ_2 — последовательные нули функции $y(t)$. Теорема доказана.

Замечание. В специальных случаях, проанализированных ниже в этом разделе, нули функции $y(t)$ являются изолированными, так как момент переключения для максимального управления не совпадает с критической точкой решения систем $\mathscr{S}_+$ или $\mathscr{S}_-$. Здесь $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_-$ являются системами дифференциальных уравнений $\mathscr{S}$, соответствующими управлениям $u=+1$ и $u\equiv -1$.

Следствие. *Пусть управление* $u(t)$ $(0\leqslant t\leqslant t_1)$ *из* Δ *является максимальным для системы* $\mathscr{S}$, *в смысле, определенном выше. Пусть далее* $\mathbf{x}(t)=(x(t),\ y(t))$ — *соответствующее решение, а* $\boldsymbol{\eta}(t)=(\eta_1(t),\ \eta_2(t))$ — *сопряженное решение на интервале* $0\leqslant t\leqslant t_1$. *Пусть, наконец,* $\eta_2(\xi)=0$, *где* $0\leqslant\xi\leqslant t_1$.

Если $y(\xi)>0$, *то* $\dot{\eta}_2(\xi)<0$.

Если $y(\xi)<0$, *то* $\dot{\eta}_2(\xi)>0$.

Доказательство. Имеем $M(\boldsymbol{\eta}(t),\ \mathbf{x}(t))=\eta_1 y-\eta_2 f(x,\ y)+|\eta_2|\geqslant 0$. Если $\eta_2(\xi)=0$, $y(\xi)>0$, то $\eta_1(\xi)>0$ и, таким образом, $\dot{\eta}_2(\xi)=-\eta_1(\xi)<0$. Другой случай рассматривается аналогично. Следствие доказано.

Замечание. Это следствие устанавливает, что при движении точки вдоль максимальной траектории максимальное релейное управление переключается с $+1$ на -1 при $y>0$ и с -1 на $+1$ при $y\leqslant 0$.

Области управляемости и существование оптимальных управлений

Определение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(\mathscr{S})\quad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x,\ y)+u,\quad f(0,\ 0)=0,\quad f(x,\ y)\in C^1,$$

где управление удовлетворяет ограничению $-1\leqslant u\leqslant 1$, как и выше. Множество $\mathscr{C}$ всех точек $(x_0,\ y_0)\in R^2$, для которых существует измеримое управление $u(t)$ $(-1\leqslant u(t)\leqslant 1)$ на конечном интервале $0\leqslant t\leqslant t_1$, переводящее систему из точки $(x_0,\ y_0)$ в начало координат $(0,\ 0)$, называется областью *нуль-управляемости*.

Замечание. Мы условимся, что точка (0, 0) всегда находится в $\mathscr{C}$ и соответствует максимальному управлению $u(t)=0$, определенному на вырожденном интервале $t=0$.

Теорема 2. *Для системы*

$$(\mathscr{S})\quad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x,\ y)+u,\quad f(0,\ 0)=0,\quad f(x,\ y)\in C^1$$

с ограничением $-1\leqslant u\leqslant 1$ *область* $\mathscr{C}$ *нуль-управляемости есть открытое связное подмножество пространства* R^2.

Доказательство. Вычислим действительные постоянные матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,\ 0) & -\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,\ 0)\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

подобно тому как это сделано в теореме 1 главы 6. Утверждение теоремы станет очевидным, если заметить, что векторы B и AB линейно независимы. Теорема доказана.

Теорема 3. *Рассмотрим систему*

$$(\mathscr{S})\qquad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x,\ y)+u,\quad f(x,\ y)\in C^1,$$

где $u(t)$ — *измеримая функция, удовлетворяющая ограничению* $-1\leqslant u\leqslant +1$. *Предположим, что* $f(x,\ y)$ *есть притягивающая сила с неотрицательным трением, т. е.* $xf(x,\ 0)>0$ *при* $x\neq 0$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\geqslant 0$ *в* R^2. *Тогда область управляемости* $\mathscr{C}$ *есть* R^2. *Более того, каждая точка из* R^2 *может быть переведена в начало координат при помощи оптимального управления* $u(t)\in\Delta$.

Доказательство. Существует окрестность N начала координат, которая лежит в $\mathscr{C}$. Выберем точку P в верхней полуплоскости $y>0$ (случай $y<0$ является аналогичным, а случай $y=0$ приводится немедленно к одному из этих случаев) и покажем, что существует управление $u(t)$, с помощью которого систему можно перевести из точки P вдоль соответствующего решения в окрестность N.

Сначала переведем точку вдоль решения S_0 системы $\mathscr{S}_0$

$$(\mathscr{S}_0)\qquad \dot{x}=y,\quad y=-f(x,\ y),$$

начинающегося в точке P, пока она не попадет в первый квадрант. Затем применяем управление $u(t)\equiv -1$ до тех пор, пока точка P не встретит положительную полуось x в точке P_1. Если решение системы $\mathscr{S}$, построенное описанным образом, попадет в N, то $P\in\mathscr{C}$, ибо $N\subset\mathscr{C}$ (см. рис. 7.1).

Далее следуем вдоль решения системы $\mathscr{S}_0$, проходящего через точку P_1, до тех пор, пока оно не достигнет третьего квадранта,

и затем применяем управление $u(t) \equiv +1$ до тех пор, пока решение не пересечет отрицательную полуось x в точке P_2. Пусть S_0^1 будет решением системы $\mathscr{S}_0$, проходящим через P_2. Следуем вдоль решения S_0^1 в направлении убывания времени до первой точки пересечения P_1^1 с положительной полуосью x. Если кривая S_0^1 при движении вперед во времени из точки P_2 не пересекает положительную полуось x, то мы получаем область, ограниченную кривой S_0^1 и вертикальным сегментом, проходящим через точку P_1^1, что противоречит условию Бендиксона, так как $\partial f/\partial y \geqslant 0$ [1]). Таким образом, S_0^1 должно быть либо периодическим решением системы $\mathscr{S}_0$ либо спиралью, которая в свою очередь, закручиваясь, либо пересекает по очереди положительную и отрицательную полуоси x, приближаясь при этом к N, либо наматывается на некоторый предельный цикл системы $\mathscr{S}_0$.

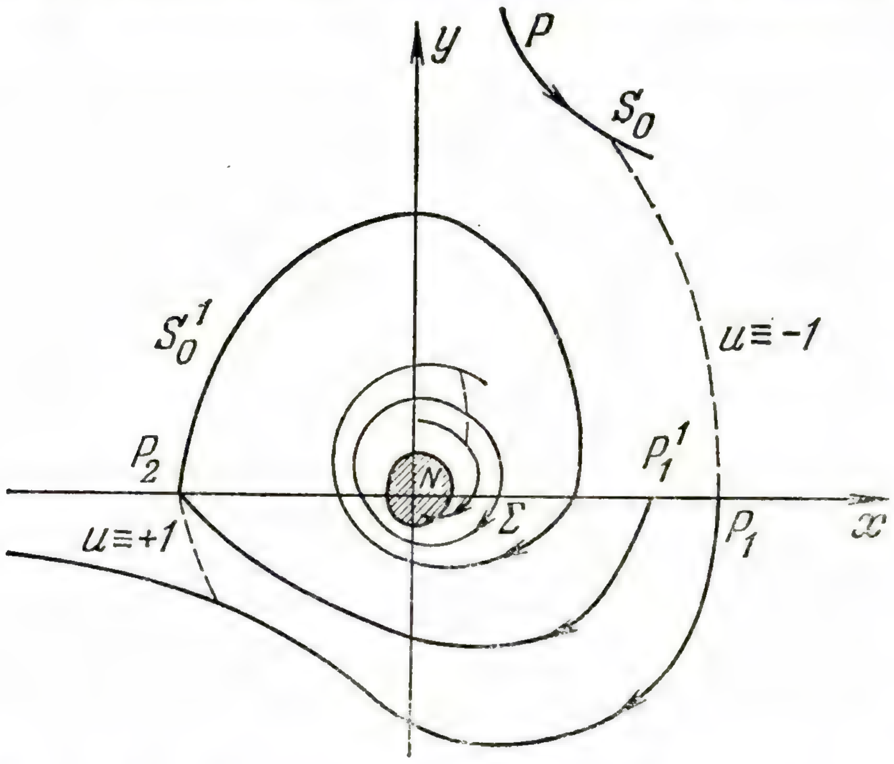

Рис. 7.1. Построение области управляемости на плоскости при наличии восстанавливающей силы и неотрицательного трения.

Но в некоторый момент фазовая точка, двигаясь вдоль траектории S_0^1, приближающейся к предельному циклу, под действием управления $u(t)$, вновь переходит на некоторое решение системы $\mathscr{S}_0$ так, что соответствующее решение S системы $\mathscr{S}$ проникает во внутренность данного предельного цикла системы $\mathscr{S}_0$. Предельные циклы системы $\mathscr{S}_0$ линейно упорядочены относительно вложения. Пусть Σ будет точной нижней гранью всех предельных циклов системы $\mathscr{S}_0$, к которым можно приблизиться вдоль таких решений S системы $\mathscr{S}$. Однако и в цикл Σ можно проникнуть так же, используя соответствующий малый импульс управления $u(t)$. Таким образом, решение S системы $\mathscr{S}$, проходящее через точку P, можно заставить под действием соответствующего управления $u(t)$ войти в область N и затем перевести его в начало координат.

Для того чтобы доказать существование оптимального управления в Δ для каждой начальной точки $P \in R^2$, мы должны показать, пользуясь условием ограниченности из теоремы 4 главы 4, что решения системы $\mathscr{S}$, которые начинаются в точке P и достигают начала координат до момента времени $t_1 + 1$, где момент времени t_1 задан заранее, не могут уйти далеко от начала координат.

[1]) Поток векторного поля, определяемого системой $\mathscr{S}_0$, через границу этой области был бы положительным, в то время как дивергенция этого поля, равная $-\partial f/\partial y$, всюду неположительна. (*Прим. ред.*)

Пусть

$$g(x)=f(x, 0) \quad \text{и} \quad G(x)=\int_0^x g(s)\, ds \geqslant 0.$$

Положим

$$E(x, y)=\frac{y^2}{2}+G(x).$$

Тогда

$$\dot{E}=y[g(x)-f(x, y)]+u(t)\, y \leqslant u(t)\, y.$$

Поэтому

$$\dot{E} \leqslant |y| \leqslant \frac{y^2}{2}+1 \leqslant E+1$$

и

$$E(t)+1 \leqslant [E(x_0, y_0)+1]\, e^{t_1+1}$$

вдоль любого решения, начинающегося в $P=(x_0, y_0)$ и определенного на некотором подынтервале времени из интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1+1$. Итак

$$\frac{y^2}{2} \leqslant [E(x_0, y_0)+1]\, e^{t_1+1}$$

и $|y(t)|$, а следовательно, и $|x(t)|$ является ограниченным для всех таких решений системы $\mathcal{S}$. Теорема доказана.

Для изучения систем дифференциальных уравнений с отталкивающей силой мы предположим, что выполняются следующие условия (которые можно немного ослабить так же, как это сделано в теореме 3):

$$(\mathcal{S}_0) \quad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=-f(x, y), \quad f(0, 0)=0, \; f(x, y) \in C^1,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)<-\varepsilon<0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$ для некоторого $\varepsilon>0$. Эта система имеет в начале координат единственную критическую точку. Вблизи начала координат семейство кривых — решений системы $\mathcal{S}_0$ — является топологически эквивалентным [Хартман] семейству кривых — решений линейной системы

$$(\mathcal{L}) \qquad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=x-y.$$

Таким образом, имеются четыре кривые-решения системы $\mathcal{S}_0$, которые приближаются к началу координат при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Обозначим эти кривые символами I, II, III, IV соответственно квадрантам, в которых они лежат. Изучение геометрии системы $\mathcal{S}_0$ показывает, что каждая из кривых I и III однозначно определена как функция на одной из полуосей x. Аналогично, кривые II и IV однозначно определены на некоторых подынтервалах оси x, причем $|y| \to \infty$ с возрастанием $|x|$. Действительно, критическая

точка и кривые I, II, III, IV, и только они, являются сепаратрисами системы $\mathcal{S}_0$, а остальная часть семейства кривых-решений системы $\mathcal{S}_0$ состоит из четырех параллельных канонических областей [см. Маркус]. Поэтому система $\mathcal{S}_0$ глобально гомеоморфна системе $\mathcal{L}$ в R^2. Сепаратрисы II и IV называются *главными сепаратрисами* системы $\mathcal{S}_0$ (рис. 7.2).

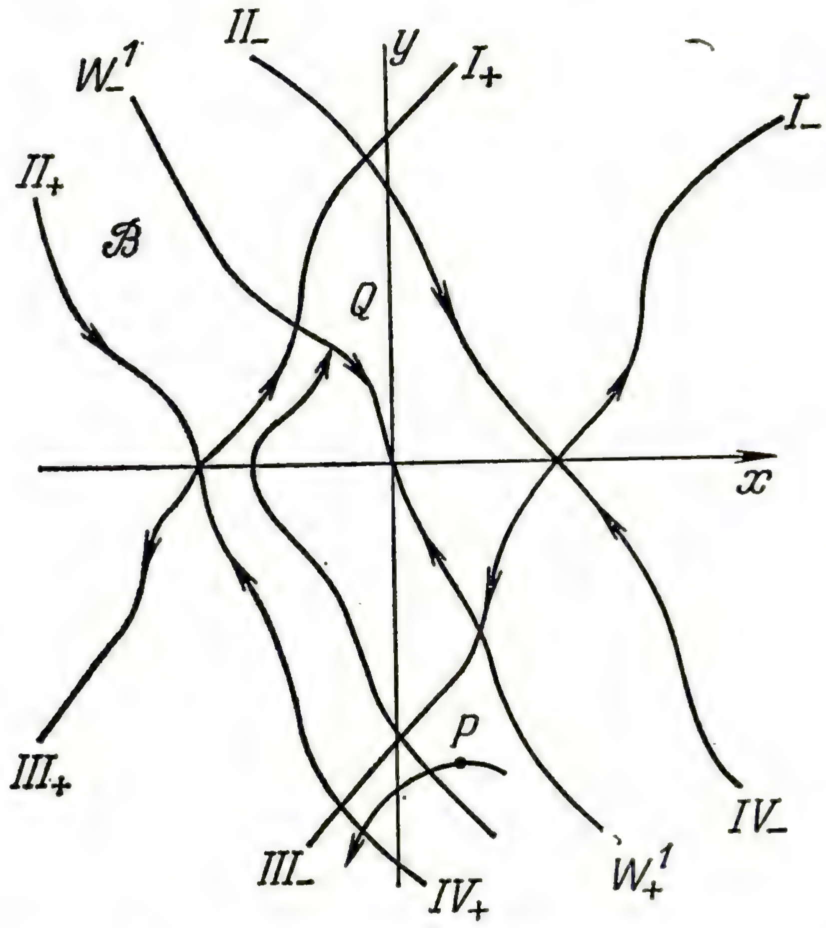

Рис. 7.2. Область управляемости при наличии отталкивающей силы и неотрицательного трения.

Теорема 4. *Рассмотрим систему*

$$(\mathcal{S})\quad \dot{x} = y,\ \dot{y} = -f(x, y) + u,$$
$$f(0, 0) = 0,\ f(x, y) \in C^1,$$

где $u(t)$ — измеримая функция, удовлетворяющая ограничению $-1 \leqslant u \leqslant 1$, как и выше. Предположим, что $f(x, y)$ есть отталкивающая сила с отрицательным трением, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) < -\varepsilon < 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geqslant 0 \quad в \quad R^2$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда каждая из систем $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$ (см. ниже) *гомеоморфна линейной системе $\mathcal{L}$ и имеет своими сепаратрисами кривые I_+, II_+, III_+, IV_+ и I_-, II_-, III_-, IV_- соответственно. Область $\mathcal{C}$ нуль-управляемости системы $\mathcal{S}$ является открытой топологической полосой $\mathcal{B}$, ограниченной двумя линиями, гомеоморфными прямым, одна из которых составлена из кривых II_+ и IV_+, состыкованных в критической точке системы $\mathcal{S}^+$, а другая составлена аналогично из кривых II_- и IV_-. Кроме того, каждую точку из $\mathcal{B}$ можно перевести в начало координат оптимальным управлением $u(t) \in \Delta$* (см. рис. 7.2).

Доказательство. Каждая из систем

$$(\mathcal{S}_+)\qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x, y) + 1$$

и

$$(\mathcal{S}_-)\qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x, y) - 1$$

имеет в точности одну критическую точку и четыре других сепаратрисы $I_\pm$, $II_\pm$, $III_\pm$, $IV_\pm$ и является гомеоморфной системе $\mathcal{L}$. Далее, главные сепаратрисы II_+, IV_+ и II_-, IV_- вместе с двумя критическими точками систем $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$ ограничивают открытую полосу $\mathcal{B}$, которая гомеоморфна плоской полосе, расположенной между двумя параллельными линиями. Кроме того, область управляемости $\mathcal{C}$ совпадает с $\mathcal{B}$.

Сепаратрисы I_+ и III_- ограничивают относительно замкнутый криволинейный четырехугольник Q в $\mathscr{B}$ (см. рис. 7.2). Начальная точка из Q, которая переводится в начало координат при помощи управления $u(t) \in \Delta$, не может покинуть Q во время своего перемещения в начало координат. Кроме того, начальная точка P из $\mathscr{B}$, которая переводится в начало координат при помощи управления $u(t) \in \Delta$, никогда не может покинуть ограниченное множество, состоящее из объединения множества Q и подмножества $\mathscr{B}$ ограниченного: 1) решениями систем $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_-$, проходящими через $P\,(t \geqslant 0)$; 2) граничными сепаратрисами полосы $\mathscr{B}$ и 3) краем множества Q, ближайшим к P. Таким образом, в любом случае точка P и ее будущая траектория лежат в ограниченном подмножестве пространства R^2. Такая априорная оценка гарантирует существование оптимального управления из Δ для каждой начальной точки P в $\mathscr{B} = \mathscr{C}$. Теорема доказана.

Кривая переключений

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$(\mathscr{S})\quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x, y) + u, \quad f(0, 0) = 0, \; f(x, y) \in C^1,$$

где $u(t)$ — измеримая функция, удовлетворяющая ограничению $-1 \leqslant u \leqslant 1$, как и выше. Если $u(t)$ есть максимальное управление из Δ, то $u(t) = \operatorname{sgn} \eta_2(t)$, где $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ есть решение сопряженной системы

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Определение. Рассмотрим множество максимальных релейных управлений в Δ для системы $\mathscr{S}$, переводящих точку области управляемости $\mathscr{C}$ в начало координат. Линия переключений W есть множество всех точек в $\mathscr{C}$, в которых соответствующие решения $x(t)$ не имеют производных, т. е. W состоит из тех точек, в которых стыкуются $\mathscr{S}_+$- и $\mathscr{S}_-$-куски какой-либо максимальной траектории. Для определенности мы включаем начало координат в W.

Перейдем к описанию метода построения W. Пусть W_+^1 есть решение (или дуга решения) системы $\mathscr{S}_+$, проходящего через начало координат и расположенного в четвертом квадранте $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Пусть W_-^1 есть решение (или дуга решения) системы $\mathscr{S}_-$, проходящего через начало координат и расположенного во втором квадранте $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$. Отложим теперь из каждой точки траектории W_+^1 в направлении, обратном ходу времени, на соответствующем решении системы $\mathscr{S}_-$ дугу, соответствующую промежутку времени, равному интервалу между нулями функции $\eta_2(t)$. Это

означает, что мы пользуемся решением системы уравнений

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),\ y(t)),$$

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)),$$

где $\boldsymbol{x}(t) = (x(t),\ y(t))$ — соответствующее решение системы $\mathscr{S}_-$, начинающееся на дуге W_-^1, а $\eta_1(0) = -1$, $\eta_2(0) = 0$. [Отметим, что сопряженная линейная система является однородной и что мы начинаем траекторию $\boldsymbol{x}(t)$ автономной системы $\mathscr{S}_-$ в момент времени $t = 0$.] Мы получаем первый нуль функции $\eta_2(t)$ в момент времени $t < 0$, что определяет интервал времени, в течение, которого мы следуем вдоль решения $\boldsymbol{x}(t)$ системы $\mathscr{S}_-$, начинающегося на W_+^1. Геометрическое место концов всех построенных таким образом дуг решений системы $\mathscr{S}_-$ с началом на дуге W_+^1 мы обозначим через W_-^2 и назовем *отражением* дуги W_+^1.

Теперь из каждой точки дуги W_-^1 отложим в направлении, обратном ходу времени на соответствующем решении системы $\mathscr{S}_+$, дугу, соответствующую промежутку времени, равному интервалу между нулями функции $\eta_2(t)$. Это означает, что мы пользуемся решением системы уравнений

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),\ y(t)),$$

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),\ y(t)),$$

где $x(t) = (x(t),\ y(t))$ — соответствующее решение системы $\mathscr{S}_+$, начинающееся на дуге W_-^1, а $\eta_1(0) = 1$, $\eta_2(0) = 0$. Как и выше, мы встречаем первый нуль функции $\eta_2(t)$ в момент времени $t < 0$. Обозначим отражение множества W_-^1 с помощью системы $\mathscr{S}_+$ через W_+^2.

Пусть теперь $W_+^1, W_+^2, \ldots, W_+^k$ и $W_-^1, W_-^2, \ldots, W_-^k$ определены, и пусть W_+^{k+1} есть отражение траектории W_-^k с помощью системы $\mathscr{S}_+$, а W_-^{k+1} — отражение траектории W_+^k с помощью системы $\mathscr{S}_-$, построенное как указано выше. Конечно, может случиться, что множество $W_+^k \cup W_-^k$ окажется пустым для любого достаточно большого k.

Теорема 5. *Рассмотрим систему*

$$(\mathscr{S}) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x,\ y) + u, \quad f(0,\ 0) = 0,\ f(x,\ y) \in C^1$$

с измеримыми управлениями $u(t)$, удовлетворяющими ограничению $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Линия переключений W есть в точности объединение множеств $W_+^k \cup W_-^k$ по $k = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Пользуясь теоремой 1, получаем, что для каждой точки P траектории W_+^1 $(y < 0)$ мы можем выбрать сопряженное решение $\boldsymbol{\eta}(t) = (\eta_1(t),\ \eta_2(t))$ так, чтобы функция

$\eta_2(t)$ обращалась в нуль, когда $\boldsymbol{x}(t)=P$ и нигде более. Аналогично, если P есть концевая точка W^1_+, а $y=0$, мы можем выбрать $\boldsymbol{\eta}(t)$ так, что функция $\eta_2(t)$ обращается в нуль в моменты времени, соответствующие $\boldsymbol{x}(t)=P$ и $\boldsymbol{x}(t)=0$. Тогда каждая точка из W^1_+, включая концевые, может оказаться точкой переключения для решения, соответствующего максимальному релейному управлению в Δ. Таким образом, $W^1_+\subset W$ и аналогично $W^1_-\subset W$.

Так как каждому максимальному релейному управлению, которое переводит точку из $\mathscr{C}$ в начало координат, должно соответствовать решение, которое входит в начало координат вдоль одной из кривых W^1_+ или W^1_-, и так как решение должно состоять из чередующихся кусков кривых, представляемых семейством решений $\mathscr{S}_+$ или $\mathscr{S}_-$, с переключениями, происходящими в нулях функции $\eta_2(t)$, то мы видим, что W есть объединение всех W^k_+ и W^k_- для $k=1, 2, 3, \ldots$ Теорема доказана.

Синтез оптимального управления для случая притягивающей силы

Мы рассмотрим здесь синтез оптимального управления для системы с одной степенью свободы, к которой приложена притягивающая сила. Итак, рассмотрим систему

$$(\mathscr{S})\quad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x, y)+u,\quad f(0, 0)=0,\quad f(x, y)\in C^1,$$

где управление $u(t)$ является измеримой функцией с ограничением $-1\leqslant u\leqslant 1$, и

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)>\varepsilon>0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\geqslant 0$$

для некоторого $\varepsilon>0$. Эти предположения, до некоторой степени более сильные, чем предположения теоремы 3, гарантируют, что каждая из максимальных систем $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_-$ имеет в точности одну критическую точку, и вообще упрощают изложение задачи. Так, например, каждое решение системы $\mathscr{S}_\pm$, кроме единственной критической точки, есть или периодическое решение, или же накручивается как спираль на предельный цикл, или, наконец, стремится к критической точке при $t\to+\infty$. Если к тому же $\partial f/\partial y>0$, то из условия Бендиксона следует, что здесь не имеется предельных циклов.

Теорема 6. *Рассмотрим систему*

$$(\mathscr{S})\quad \begin{aligned} &\dot{x}=y,\\ &\dot{y}=-f(x, y)+u,\quad f(0, 0)=0,\ f(x, y)\in C^2, \end{aligned}$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0)>\varepsilon>0$ *для некоторого* $\varepsilon>0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\geqslant 0$ *в* R^2. *Рассмотрим, далее, максимальные управления* $u(t)\in\Delta$, *переводящие*

точки из $\mathscr{C} = R^2$ в начало координат, и построим линию переключения W как объединение множеств $W_+^k \cup W_-^k$, как описано в теореме 5. Тогда множество W содержит гомеоморфный образ прямой, который является кусочно-гладкой кривой, разделяющей плоскость. Кроме того, множество W лежит целиком во втором и четвертом квадрантах.

Доказательство. Линия переключения W совпадает с объединением $W_+^k \cup W_-^k$ по $k = 1, 2, 3 \ldots$ Конечно, W_+^1 и W_-^1 — кривые класса C^2. Так как сопряженный интервал времени, использованный в процессе отражения, гладко зависит от начальных условий, то ясно, что W_+^2 и W_-^2 являются кривыми класса C^1. Аналогично, W_+^k и W_-^k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ являются кривыми класса C^1, и гладко зависят от начальных условий.

Мы покажем теперь, что множество W содержит гомеоморфный образ прямой, который разделяет плоскость. Для простоты изложения сначала рассмотрим консервативный случай, когда $\partial f/\partial y \equiv 0$ в R^2. В этом случае каждое решение системы $\mathscr{S}_\pm$, кроме критической точки, есть периодическое решение, охватывающее критическую точку. Легко также видеть, что каждое такое периодическое решение есть выпуклая замкнутая кривая, симметричная относительно оси x. При $y > 0$ имеем

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-f(x) + u}{y}$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-yf'(x) - [f(x) - u]^2/y}{y^2} < 0.$$

Аналогично, при $y < 0$ мы получим, что $y'' > 0$, откуда легко следует, что периодическое решение выпукло и симметрично в смысле, указанном выше.

Пусть S_+^1 есть решение системы $\mathscr{S}_+$, проходящее через начало координат так, что W_+^1 есть дуга кривой S_+^1. Обозначим через R_1 правую точку пересечения дуги W_+^1 с осью x. Пусть аналогично S_-^1 есть решение системы $\mathscr{S}_-$, проходящее через начало координат, W_-^1 — его дуга (см. рис. 7.3), а L_1 — левая точка пересечения дуги W_-^1 с осью x. Пусть S_-^2 — решение системы $\mathscr{S}_-$, проходящее через точку R_1, а S_+^2 — решение системы $\mathscr{S}_+$, проходящее через точку L_1.

Пусть S_+^k и S_-^k, $k = 1, 2, \ldots$, определенные аналогично тому как указано выше, решения систем $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_-$, соответственно, а R_k и L_k — аналогично определенные точки оси x, так что S_-^{k+1} есть решение системы $\mathscr{S}_-$, проходящее через точку R_k, а S_+^{k+1} есть решение системы $\mathscr{S}_+$, проходящее через точку L_k. Легко видеть, что решение S_+^k лежит внутри области, ограниченной решением S_+^{k+1}. Аналогичное замечание можно сделать по поводу

взаимного расположения решений S_-^k и S_-^{k+1}. Далее,

$$0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_k \to +\infty$$

и

$$0 > L_1 > L_2 > \ldots > L_k \to -\infty.$$

Теперь мы опишем множество W для каждого сегмента $[0, R_1]$, $[R_1, R_2]$, ... $[R_k, R_{k+1}]$ ..., с тем, чтобы получить непрерывную кривую, определенную при $x \geqslant 0$ и лежащую в четвертом квадранте. Затем аналогично построим кривую W для $x \leqslant 0$.

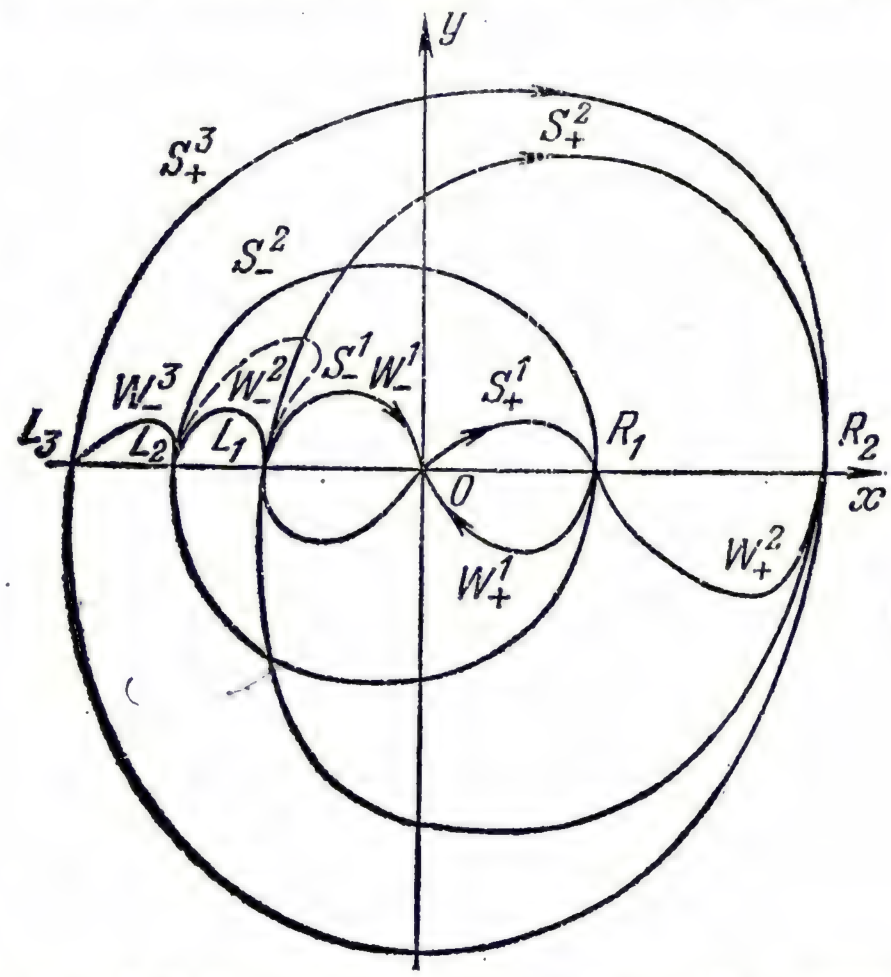

Рис. 7.3. Кривая переключения для случая нелинейной восстанавливающей силы.

Положим на отрезке $[0, R_1]$ $W = W_+^1$. По теореме 1, дуга W_+^2, соединяющая точки R_1 и R_2 и лежащая между траекториями S_+^1 и S_+^2 $(y \leqslant 0)$, есть кривая класса C^1. Аналогично, дуга W_-^2, соединяющая точки L_1 с L_2 и лежащая между траекториями S_-^1 и S_-^2 при $y \geqslant 0$, есть кривая класса C^1. По индукции мы находим, что W_-^k есть кривая класса C^1, соединяющая точки L_{k-1} с L_k и лежащая между траекториями S_-^{k-1} и S_-^k в области $y \geqslant 0$, а W_+^k есть кривая класса C^1, соединяющая точки R_{k-1} с R_k и лежащая между решениями S_+^{k-1} и S_+^k в области $y \leqslant 0$ для любого $k = 2, 3, 4, \ldots$ Таким образом, $W = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (W_+^k \cup W_-^k)$ есть счетное объединение кривых класса C^1 и W разделяет плоскость на две части.

Случай, когда $\partial f/\partial y \not\equiv 0$, рассматривается аналогично, за исключением того, что здесь S_+^1 или S_-^1 или одно из последующих отражений $W_\pm^k$ может иметь концевую точку в $\pm\infty$, т. е. $W_\pm^k$ может не пересекать оси x, а стремиться к бесконечности. В таком случае совокупность непустых множеств может быть конечной (см. рис. 7.4). Однако утверждения теоремы справедливы и для этого случая. Теорема доказана.

Специальные гипотезы относительно геометрии линии переключения

Мы здесь вынуждены предположить, что линия переключения $W = W(x)$ определяется однозначной функцией, определенной на оси x. Это, конечно, справедливо, если кривые W_+^1 и W_-^1 уходят

в бесконечность, не пересекаясь с осью x, как в случае системы с отталкивающей силой (см. теорему 4). В качестве иллюстрации рассмотрим систему

$$\ddot{x}+b\dot{x}+g(x)=u(t), \quad -1\leqslant u(t)\leqslant 1,$$

где $b>0$ — постоянная величина и $g(x)\in C^1$, причем $g(0)=0$, $g'(x)>0$, $|g(x)|>1$ для всех x с достаточно большим $|x|$. Далее мы предположим, что $g'(x)\leqslant b^2/4$ при $(-\infty<x<+\infty)$. В качестве примера системы с такой слабой упругой силой и линейным трением возьмем систему

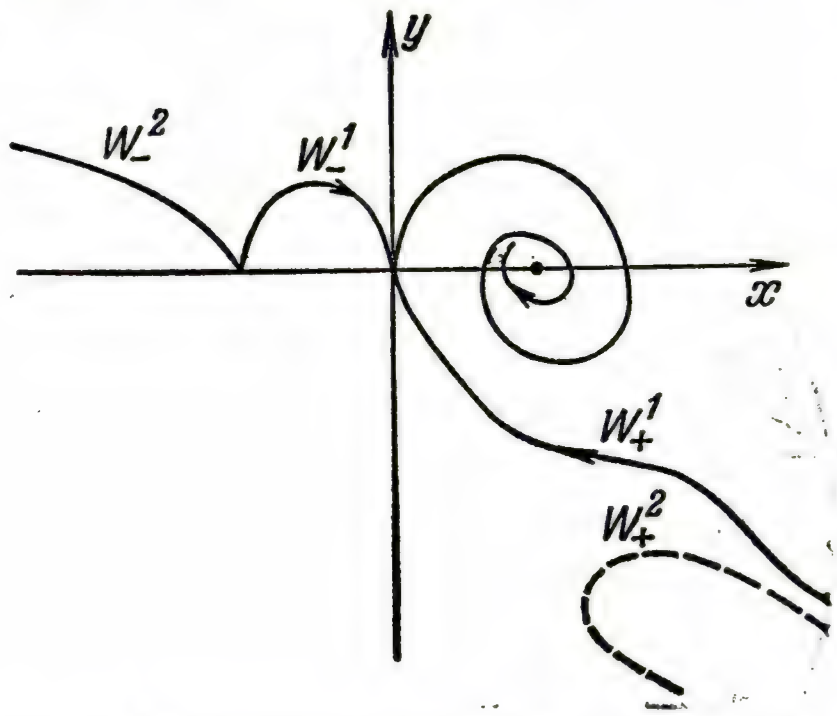

Рис. 7.4. Кривая переключения с дугами, уходящими в бесконечность.

$$\ddot{x}+2\dot{x}+\left(x-\frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x\right)=u(t),$$
$$-1\leqslant u(t)\leqslant 1,$$

где

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arctg} x<\frac{\pi}{2}.$$

Если бы кривая W_+^1 пересекала ось x более, чем в одной точке, то уравнение в вариациях, построенное для $x(t)=W_+^1$, имело бы решение $v^1(t)=\dot{x}(t)$, которое обращается в нуль дважды. Но это уравнение в вариациях

$$\ddot{v}+b\dot{v}+g'(x(t))\,v=0$$

при помощи подстановки $z=e^{bt/2}v$ приводится к виду

$$\ddot{z}+\left(g'(x(t))-\frac{b^2}{4}\right)z=0.$$

Но нетривиальное решение $z(t)$ этого уравнения имеет не более одного нуля. Отсюда следует, что кривая W_+^1 не пересекает положительную полуось x, и простая оценка ее наклона показывает, что кривая W_+^1 определена для всех $x>0$. Аналогично, кривая W_-^1 является однозначной на отрицательной полуоси x.

Максимальное решение вне множества $W(x)=W_-^1\cup W_+^1$ не имеет никаких переключений. Это следует из вида присоединенного уравнения

$$\ddot{\eta}_2-b\dot{\eta}_2+g'(x(t))\,\eta_2=0.$$

Поэтому линия переключений есть в точности

$$W(x)=W_-^1\cup W_+^1$$

и сделанные выше особые предположения в этом случае выполняются. Они выполняются также, когда система $\mathscr{S}_\pm$ имеет лишь

изохронные периодические решения, например, в случае, когда $f(x, y) = x$. В этом случае уравнение в вариациях вдоль решений системы $\mathscr{S}_+$ или $\mathscr{S}_-$ имеет вид

$$\dot{v}^1 = v^2, \quad \dot{v}^2 = -\frac{\partial f}{\partial x} v^1 - \frac{\partial f}{\partial y} v^2,$$

где $\boldsymbol{v}(t) = (v^1(t), v^2(t))$ — вектор параллельного смещения вдоль потока систем $\mathscr{S}_\pm$. Но

$$v^1\eta_1 + v^2\eta_2 = \text{const}$$

и, таким образом,

$$v^1(0)\,\eta_1(0) = v^1(t_1)\,\eta_1(t_1)$$

для двух последовательных моментов переключения $t = 0$ и $t = t_1$. Так как

$$\eta_1(0)\,\eta_1(t_1) < 0,$$

то

$$v^1(0)\,v^1(t_1) \leqslant 0.$$

Поэтому, взяв в качестве $\boldsymbol{v}(0)$ касательный вектор к траектории $W^k_\pm$, получим, что $\boldsymbol{v}(t_1)$ есть также касательный вектор к траектории $W^{k+1}_\pm$ и, поэтому кривая $W^{k+1}_\pm$ определяется однозначной на оси x функцией, если кривая $W^k_\pm$ обладает этим свойством. Теперь (по индукции) можно показать, что $W = W(x)$ является однозначной функцией на оси x.

Следствие. *Рассмотрим систему $\mathscr{S}$ теоремы 6. Предположим, что кривая $W = W(x)$ определяется однозначной функцией на оси x. Тогда для каждой точки $P \in R^2$ в Δ имеется одно и только одно максимальное релейное управление, которое переводит точку P в начало координат.*

Доказательство. Мы должны только показать, что никакая траектория S системы $\mathscr{S}_-$ (или $\mathscr{S}_+$) не пересекается с кривой W^k_+ (или с кривой W^k_-) по внутренней точке дуги (траектории S), использованной при построении кривой W^k_+ (или W^k_-). Так как кривая W^k_+ лежит в области $y < 0$ целиком, за исключением своих концевых точек, то решение S системы $\mathscr{S}_-$, начинающееся в точке P кривой W^k_+, не может пересечь кривую W^k_+ в области $y < 0$ в какой-нибудь точке, абсцисса x которой лежит левее P. Кроме того, так как в соответствующей кольцевой области на каждом решении системы $\mathscr{S}_+$ имеется только одна точка кривой W^k_+ и, так как решения системы $\mathscr{S}_-$ имеют отрицательный касательный вектор $(-y, f+1)$ в противоположность вектору $(-y, f-1)$ для решений системы $\mathscr{S}_+$, то получаем, что траектория S не может пересечь кривой W^k_+ в полуплоскости $y < 0$.

Аналогичное рассуждение справедливо для решений системы $\mathscr{S}_+$ пересекающих кривую W^k_-. Следствие доказано.

Теорема 7. *Рассмотрим систему*

$$(\mathcal{S})\quad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x,\ y)+u,\quad f(0,\ 0)=0,\quad f(x,\ y)\in C^1,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ 0)>\varepsilon>0$ *для некоторого* $\varepsilon>0$ *и* $\frac{\partial f}{\partial y}\geqslant 0$ *в* R^2. *Предположим, что функция* $W=W(x)$ *однозначна на оси* x. *Тогда для каждой точки* P *в* R^2 *имеется в точности одно оптимальное управление* $u(t)$ $(-1\leqslant u\leqslant 1)$ *из класса* Δ, *которое переводит точку* P *в начало координат. Определим синтезирующую функцию*

$$\Psi(x,\ y)=\begin{cases} 1 & \text{для}\quad y<W(x),\\ 0 & \text{для}\quad y=W(x),\\ -1 & \text{для}\quad y>W(x).\end{cases}$$

Тогда искомая оптимальная траектория для точки P *есть единственное решение уравнения*

$$\ddot{x}+f(x,\ \dot{x})=\Psi(x,\ \dot{x}),$$

соответствующее начальному условию $x(0)=P$.

Доказательство. Согласно общей теории существования оптимального и, тем самым, максимального релейного управления, развитой выше, каждая точка $P\in R^2$ лежит по крайней мере на одной траектории, соответствующей максимальному релейному управлению, переводящему точку P в начало координат. Но конструкция, использованная в теореме 6 вместе со следствием, показывает, что точка P лежит на единственной траектории, соответствующей такому максимальному релейному управлению и, следовательно, это управление должно быть единственным оптимальным управлением из класса Δ для точки P.

Из теоремы 6 следует, что синтезирующая функция $\Psi(x,\ y)$ обладает нужными свойствами. Теорема доказана.

Синтез оптимального управления для случая отталкивающей силы

Рассмотрим задачу управления для системы

$$(\mathcal{S})\quad \dot{x}=y,\quad \dot{y}=-f(x,\ y)+u,\quad f(0,\ 0)=0,\quad f(x,\ y)\in C^1,$$

где $u(t)$ — измеримая функция $(-1\leqslant u\leqslant 1)$. Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y)<-\varepsilon<0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\geqslant 0$ для некоторого $\varepsilon>0$. Эти предположения, до некоторой степени более сильные, чем предположения теоремы 4, гарантируют существование полосы $\mathcal{B}$ между главными сепаратрисами систем $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$, которая является областью $\mathcal{C}$ нуль-управляемости системы $\mathcal{S}$. Для каждой точки $P\in\mathcal{B}$ существует оптимальное управление $u(t)$ из допустимого класса Δ, которое переводит P в начало координат.

Линия переключений W системы $\mathcal{S}$ определяется так же, как и в теореме 5. Перейдем к построению W. Пусть W_+^1 — решение системы $\mathcal{S}_+$, проходящее через начало координат и лежащее в четвертом квадранте. Путем сравнения наклонов траекторий систем $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$ мы обнаружим, что W_+^1 лежит всегда внутри полосы $\mathcal{B}$, в полуплоскости $y<0$, и что $y \to -\infty$ с ростом x вдоль кривой W_+^1. Пусть W_-^1 — решение системы $\mathcal{S}_-$, проходящее через начало координат и лежащее во втором квадранте. Ясно, что кривая W_-^1 — лежит внутри $\mathcal{B}$ и что $y \to -\infty$ с ростом $(-x)$, если $(x, y) \in W_-^1$. Отражения $W_\pm^k$ определяются как в теореме 5, но мы покажем, что все эти отражения являются пустыми множествами для $k=2,3,4,\ldots$, и что, тем самым, $W=W'_+ \cup W_-^1$ (см. рис. 7.2).

Теорема 8. *Рассмотрим систему*

$$(\mathcal{S})\quad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=-f(x, y)+u, \quad f(0, 0)=0, \quad f(x, y) \in C^1,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)<-\varepsilon<0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geqslant 0$ *в* R^2 *для некоторого* $\varepsilon>0$. *Рассмотрим максимальное релейное управление* $u(t)$ $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$ *из класса* Δ, *и построим линию переключения* W. *Тогда* $W=W(x)$ *есть непрерывная однозначная функция на сегменте оси* x, *разбивающая область* $\mathcal{B}$ *на две подобласти. Кроме того,*

$$W(x)=\begin{cases} W_+^1(x) & \text{для} \quad x \geqslant 0, \\ W_-^1(x) & \text{для} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

так что $W(x) \in C^1$ *при* $x \neq 0$.

Доказательство. Мы сначала докажем, что множества $W_\pm^2$ являются пустыми. Это будет в том случае, еслч нетривиальное решение $\boldsymbol{\eta}(t)=(\eta_1(t), \eta_2(t))$ системы

$$\dot{\eta}_1=\eta_2 \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)),$$

$$\dot{\eta}_2=-\eta_1+\eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

таково, что функция $\eta_2(t)$ имеет не более одного нуля. Здесь $\mathbf{x}(t)=(x(t), y(t))$ есть решение системы $\mathcal{S}_-$ или $\mathcal{S}_+$. Пусть t_1, t_2 $(t_1<t_2)$ два последовательных нуля функции $\eta_2(t)$ и пусть $\eta_2(t)>0$ при $t_1<t<t_2$. Тогда $\eta_1(t_1)<0$ и $\eta_1(t_2)>0$. Так как $\partial f/\partial x<-\varepsilon<0$, то $\dot{\eta}_1(t)<0$ при $t_1<t<t_2$, что невозможно. Аналогично рассматривается случай $\eta_2(t)<0$ $(t_1<t<t_2)$. Поскольку в силу теоремы 5 $W_+^1 \cup W_-^1 \subset W$, то

$$W=W(x)=\begin{cases} W_+^1(x) & \text{для} \quad x \geqslant 0, \\ W_-^1(x) & \text{для} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ясно, что W есть топологический образ прямой, и что W разбивает полосу $\mathscr{B}$ на две части. Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим систему $\mathscr{S}$ теоремы 8. Тогда для каждой точки $P \in \mathscr{B}$ имеется одно и только одно максимальное релейное управление в Δ, которое переводит точку P в начало координат.*

Доказательство. Никакое решение системы $\mathscr{S}_-$ не может пересечь W_+^1 в двух различных точках, как это следует из сравнения наклонов касательных векторов решений систем $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_-$. Аналогичное утверждение справедливо и относительно кривой W_-^1. Конструкция линии W показывает, что каждому максимальному релейному управлению из класса Δ, переводящему $P \in \mathscr{B}$ в начало координат, соответствует траектория, которая пересекает кривую W и затем никогда не покидает W, а следует по W в начало координат. Следствие доказано.

Теорема 9. *Рассмотрим систему*

$$(\mathscr{S})\quad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=-f(x, y)+u, \quad f(0, 0)=0, \quad f(x, y) \in C^1,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)<-\varepsilon<0$ для некоторого $\varepsilon>0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geqslant 0$ в R^2. Рассмотрим далее область $\mathscr{C}=\mathscr{B}$ управляемости для измеримых управлений $u(t)$ $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$ из Δ и построим линию переключения $W=W(x)$.

Тогда для каждой точки $P \in \mathscr{B}$ существует только одно оптимальное управление $u(t)$ из класса Δ, которое переводит точку P в начало координат. Определим синтезирующую функцию

$$\Psi(x, y)=\begin{cases} 1 & \text{для } y<W(x), \\ 0 & \text{для } y=W(x), \\ -1 & \text{для } y>W(x). \end{cases}$$

Тогда оптимальная траектория для P есть (единственное) решение уравнения

$$\ddot{x}+f(x, \dot{x})=\Psi(x, \dot{x})$$

с начальным условием $x(0)=P$.

Доказательство. Общая теория оптимального и максимального управления, развитая выше, показывает, что каждая точка $P \in \mathscr{B}$ лежит по крайней мере на одной траектории максимального управления, переводящей P в начало координат. Но построения теоремы 8, вместе со следствием, показывают, что точка P лежит на единственной траектории такого максимального релейного управления и, следовательно, это управление должно быть единственным оптимальным управлением класса Δ для P.

Из построений теоремы 8 следует, что функция $\Psi(x, y)$ обладает нужными свойствами. Теорема доказана.

Примеры построения управлений с обратной связью

Пример 1 (жесткая пружина). Рассмотрим *уравнение Дуффинга* с управлением

$$\ddot{x}+x+2x^3=u(t)$$

или эквивалентную систему первого порядка:

$$(\mathcal{S}_d) \qquad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=-x-2x^3+u,$$

где $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Эта система есть математическая модель, описывающая поведение нелинейной жесткой пружины под действием внешней силы $u(t)$.

Для задачи оптимального быстродействия оптимальное управление $u(t)$ на различных интервалах времени равно $+1$ или -1. Поэтому рассмотрим систему уравнений

$$(\mathcal{S}_\pm) \qquad \dot{x}=y, \quad \dot{y}=-x-2x^3\pm 1.$$

Ясно, что каждая точка в фазовом пространстве может быть соединена с началом координат кривой, состоящей из кусков траекторий систем $\mathcal{S}_+$ и $\mathcal{S}_-$, что гарантирует нам существование оптимального управления. Рассмотрим теперь сопряженную систему (как и в предыдущем случае)

$$(\mathcal{A}) \qquad \dot{\eta}_1=-\frac{\partial H}{\partial x}=\eta_2(1+6x^2(t)), \quad \dot{\eta}_2=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\eta_1,$$

из которой мы найдем функцию $\eta_2(t)$, определяющую интервалы времени, на которых максимальная траектория совпадает с траекториями того или другого семейства.

Построим теперь линию переключения W способом, указанным в предшествующей теории. Здесь W_+^1 есть решение системы $\mathcal{S}_+$, проходящее через начало координат и лежащее в четвертом квадранте (см. рис. 7.5), а W_-^1 есть решение системы $\mathcal{S}_-$, проходящее через начало координат и лежащее во втором квадранте.

Мы теперь построим отражение кривой W_-^1 с помощью системы $\mathcal{S}_+$. Из точек *1*, *2*, ..., *9* кривой W_-^1 следуем вдоль соответствующих решений системы $\mathcal{S}_+$ в направлении обратному ходу времени в течение промежутков времени, равных интервалу между нулями функции $\eta_2(t)$, т. е. например, из точки *2* ($\eta_1(0)=1$, $\eta_2(0)=0$) следуем вдоль соответствующего решения $\mathcal{S}_+$ до тех пор, пока $\eta_2(t)$ не будет снова нулем. Это определяет точку *2a* на кривой W_+^2. Повторив эту процедуру для каждой из точек *3*, ..., *9*, мы получим соответствующие точки *3a*, ..., *9a* кривой W_+^2. Так как мы знаем, что W_+^2 есть кривая класса C^1, то мы можем проинтерполировать ее гладкой кривой, соединяющей *2a*, *3a*, ..., *8a*. По этой причине требуется рассмотрение лишь конечного числа максимальных траекторий для построения линии W.

Теперь, когда кривая W_+^2 построена, мы можем получить кривую W_-^2 отражением кривой W_+^2 относительно начала координат (рис. 7.5). Далее мы находим W_-^3 переносом кривой W_+^2 вдоль решений системы $\mathscr{S}_+$, как указано выше. Остальные дуги кривой W строятся точно таким же образом.

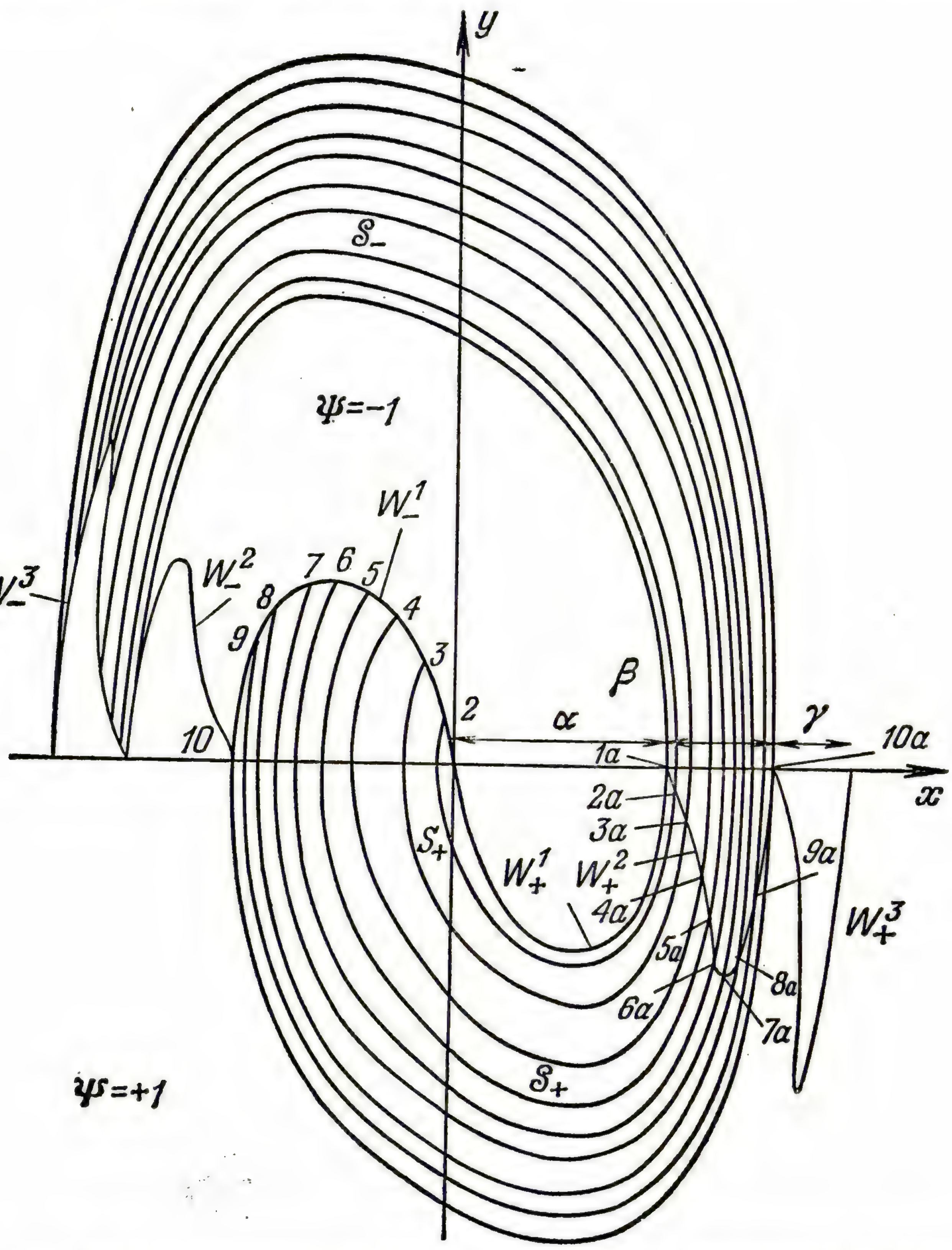

Рис. 7.5. Синтез управления с обратной связью для уравнения Дуффинга.

Тем самым, мы построили управление $u = \Psi(x, y)$ с обратной связью для уравнения Дуффинга ($\mathscr{S}_d$). Синтез будет полным, если положить $\Psi(x, y) = +1$ ниже границы переключения W и $\Psi(x, y) = -1$ выше границы переключения W.

Возникает вопрос относительно точности, с которой мы построили кривую W на рис. 7.5 (она была построена при помощи аналого-во-цифровой вычислительной машины). Тем не менее, на рис. 7.5 видно, что линия переключения действительно является однозначной функцией относительно обоих потоков $\mathscr{S}_+$ и $\mathscr{S}_-$. Численный метод построения управления с обратной связью, использую-

щий цифровую машину, подробно рассмотрел Х. Л. Бурмейстер (H. L. Burmeister). (Сравните его рис. 3 с нашим рис. 7.5.)

Для уравнения Дуффинга с управлением

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -x - x^3 + u,$$

где $-1 \leqslant u \leqslant 1$, мы также построили на рис. 7.6 изохронные кривые в окрестности начала координат. Мы уже обсуждали свойства изохронной функции для линейной задачи оптимального

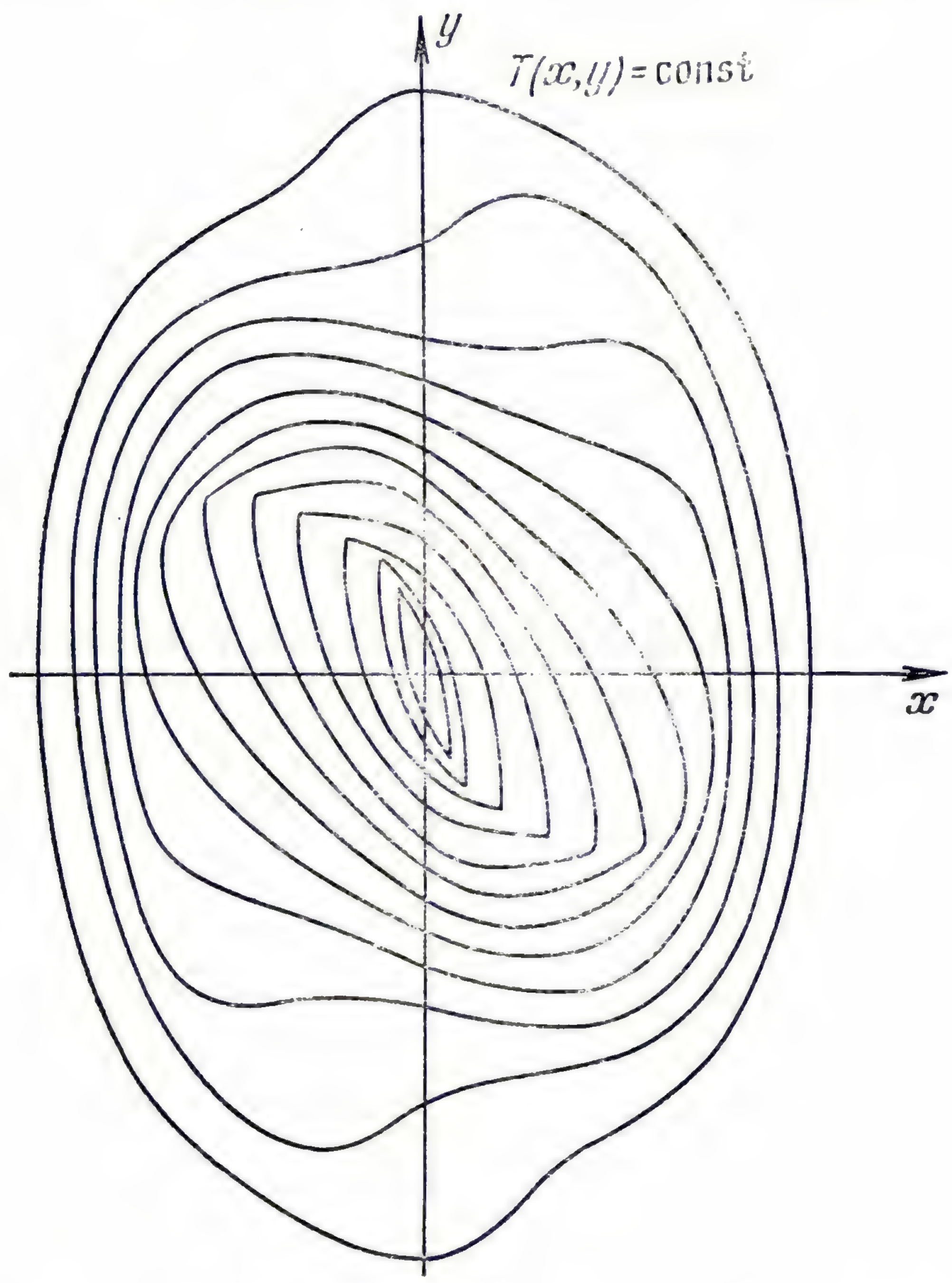

Рис. 7.6. Изохроны для системы $\ddot{x}+\dot{x}+x^3=u$, $|u| \leqslant 1$.

быстродействия перед теоремой 21 главы 2 и в упражнении 2 раздела 5.2 для нелинейных систем. Замкнутая область, ограниченная каждой из этих кривых, совпадает со множеством достижимости из начала координат за время T для задачи с обращенным временем на отрезке $[0, T]$, где T — значение изохронной функции на соответствующей кривой. Из рис. 7.6 и рис. 7.5 видно, что множество достижимости не является выпуклым, но, по-видимому, имеет гладкую границу.

Пример 2 (маятник). Рассмотрим уравнение движения плоского маятника (рис. 7.7) массы m, подвешенного к точке опоры при помощи жесткого невесомого стержня:

$$I\ddot{\theta}+b\dot{\theta}+mgl\sin\theta=M(t).$$

Здесь $I=ml^2$ — момент инерции; $b\geqslant 0$ коэффициент демпфирования; $M(t)$ — внешний управляющий момент; g — гравитационная постоянная (ускорение силы тяжести); l — длина жесткого стержня маятника; m — масса, сосредоточенная в конце жесткого стержня (см. рис. 7.7).

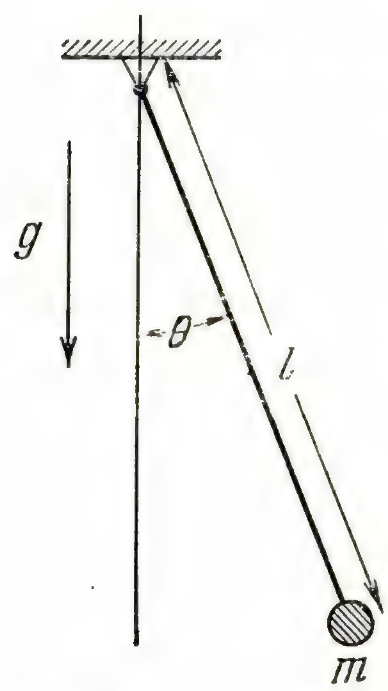

Рис. 7.7. Управляемый маятник.

Чтобы привести уравнение к стандартной форме, сделаем замену переменной $\tau=t\sqrt{mgl/I}$ и получим уравнение движения в следующем виде:

$$\ddot{\theta}+\alpha\dot{\theta}+\sin\theta=\beta(t),$$

где $\alpha=b/\sqrt{Imgl}\geqslant 0$, $\beta(t)=M(t)/mgl$. Эквивалентная система уравнений первого порядка имеет вид

$$\dot{\theta}=z,\quad \dot{z}=-\sin\theta-\alpha z+\beta(t).$$

Задачей оптимального по быстродействию управления является остановка маятника в одной из точек устойчивого равновесия ($\theta=\pm 2\pi k,\ z=0$), для $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ за минимальное время посредством выбора управляющего момента $\beta(t)$, удовлетворяющего ограничению $|\beta(t)|\leqslant B,\ B>0$. Таким образом, целевое множество G имеет вид

$$G=\{(\theta,\ z)\,|\,\theta=\pm 2\pi k,\ z=0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Сначала покажем, что применением некоторого допустимого управления из каждой начальной точки плоскости $(\theta,\ z)$ система может быть переведена в G. Действительно, для этого достаточно применить следующую последовательность управлений:

1. $\beta(t)=-B\operatorname{sgn}z(t)$ до тех пор, пока система не попадет в точку с координатами $z=0,\ \theta$, где $2\pi k\leqslant\theta\leqslant 2(k+1)\pi$ для некоторого $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

2. $\beta(t)=-\beta_0 z(t)$, где $\beta_0>0$ является настолько малым, что $B\geqslant|\beta(t)|$ (после вывода системы из состояния неустойчивого равновесия, если это окажется необходимым).

3. Когда исходная система попадает в окрестность точки $\theta=2k\pi,\ z=0$, мы применим критерий управляемости (глава 6) для системы

$$\dot{\theta}=z,\quad \dot{z}=-\theta-\alpha z+\beta(t)$$

с матрицей

$$\left[\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right],$$

неособой для всех α. Это обеспечивает возможность точного достижения точки равновесия в течение конечного времени из любой точки некоторой окрестности положения равновесия.

Покажем теперь, произведя оценку скорости фазовой точки, что целевое множество для этой задачи можно считать компактным. Тем самым, исходя из соображений непрерывности, его можно считать просто конечным. Имеем

$$|\dot{z}| \leqslant 1 + \alpha |z| + B,$$

$$|z(t)| \leqslant ce^{\gamma t} \text{ для некоторых } c > 0,\ \gamma > 0$$

и

$$|\theta(t)| \leqslant c_1 e^{\gamma t} \text{ для некоторого } c_1 > 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Таким образом, решение является равномерно ограниченным на любом конечном отрезке времени. Заметим, что точки $\theta = 2\pi k$, $z = 0$ для больших $|k|$ можно достичь лишь за очень длительный промежуток времени, и поэтому она не является кандидатом в концевые точки траектории, оптимальной по быстродействию.

Согласно теоремам главы 4 оптимальное управление $\beta^*(t)$ существует. Кроме того, из предшествующих результатов этого раздела вытекает, что оптимальное управление есть релейное управление, принимающее только два значения, $+B$ и $-B$, на различных интервалах времени. Здесь можно также применить предшествующие результаты этого раздела, касающиеся геометрии линии переключения. Приступим к построению линии переключения оптимального управления. Для удобства мы изучим сначала случай, когда $\alpha = 0$, и затем покажем, что для случая $\alpha > 0$ результаты выглядят даже проще.

При $\alpha = 0$ каждую целевую точку можно достичь, т. е. маятник может быть приведен в колебательное движение все с большей и большей амплитудой, даже если B очень мало́, до тех пор, пока маятник пройдет через точку неустойчивого равновесия, из которой можно перейти к любым другим точкам равновесия. Мы сначала рассмотрим оптимальный переход только к одной точке равновесия, в качестве которой возьмем начало координат.

Имеется два особенно интересных случая: (1) случай, когда $B > 2/\pi$, который соответствует ситуации, когда линия переключения (для одной целевой точки) пересекает ось θ только в начале координат; (2) случай $B \leqslant 2/\pi$ — когда линия переключения пересекает ось θ больше, чем в одной точке.

Рассмотрим гамильтонову систему уравнений (как и в главе 5):

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = (\cos\theta)\,\eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = -\frac{\partial H}{\partial z} = \alpha\eta_2 - \eta_1,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial \eta_1} = z, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \eta_2} = -\sin\theta - \alpha z + \beta(t),$$

где

$$H = H(\eta_1,\ \eta_2,\ \theta,\ z,\ \beta) = \eta_1 z + \eta_2[-\sin\theta - \alpha z + \beta].$$

Оптимальное управление является релейным максимальным управлением вида

$$\beta(t) = \operatorname{sgn}\eta_2(t).$$

Вопрос о том, пересекает ли линия переключения ось θ более, чем в одной точке, эквивалентен вопросу о том, имеет ли более одного нуля функция $\eta_2(t)$, когда фазовая точка системы движется в плоскости $(\theta,\ z)$ из начала координат в направлении, противоположном ходу времени вдоль траектории системы, удовлетворяющей начальным условиям $\theta(0) = z(0) = \eta_2(0) = 0$, $\eta_1(0) = 1$.

Из предшествующих результатов следует, что нули функций $\eta_2(t)$ и $z(t)$ вдоль такой траектории чередуются. Для специальных начальных условий $(0,\ 0,\ \pm 1,\ 0) = (\theta(0),\ z(0),\ \eta_1(0),\ \eta_2(0))$ нули функций $\eta_2(t)$ и $z(t)$ совпадают. Уравнения движения с обращенным временем имеют вид

$$\dot{\theta} = -z, \quad \dot{z} = \sin\theta - B\operatorname{sgn}\eta_2,$$

$$\dot{\eta}_1 = -\eta_2\cos\theta, \quad \dot{\eta}_2 = \eta_1$$

с начальными условиями $(0,\ 0,\ 1,\ 0)$ (или $(0,\ 0,\ -1,\ 0)$). Здесь функция $\eta_2(t)$ не может иметь других нулей, кроме тех, что имеет функция $z(t)$. Рассмотрим фазовую кривую на фазовой плоскости первых двух координат, когда $\eta_2(t) > 0$, т. е. кривую, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\sin\theta - B}{-z},$$

проходящую через начало координат, и лежащую в четвертом квадранте. Интегрирование дает

$$z = -\sqrt{2(\cos\theta + B\theta - 1)}.$$

Эта кривая изображена на рис. 7.8 для различных значений B и, понятно, она не пересекает ось θ, если $B > 2/\pi$ и является частью кривой переключения, именно кривой W^1_+. Для того чтобы определить, имеет ли линия переключения ветви, смыкающиеся на бесконечности, достаточно выполнить процедуру, описанную ранее. Именно, из точки кривой W^1_+ $(\eta_1(0) = -1,\ \eta_2(0) = 0)$ мы следуем вперед во времени вдоль решения уравнений с обращен-

ным временем до тех пор, пока функция $\eta_2(t)$ не обратится снова в нуль, и отмечаем эту точку в плоскости (θ, z) (она принадлежит линии переключения). На рис. 7.9 построена линия переключения для случая $\alpha=0$, $B=1$, причем при построении, произведенном аналогично тому, как это было сделано в примере 1, использовано десять точек кривой W_+^1.

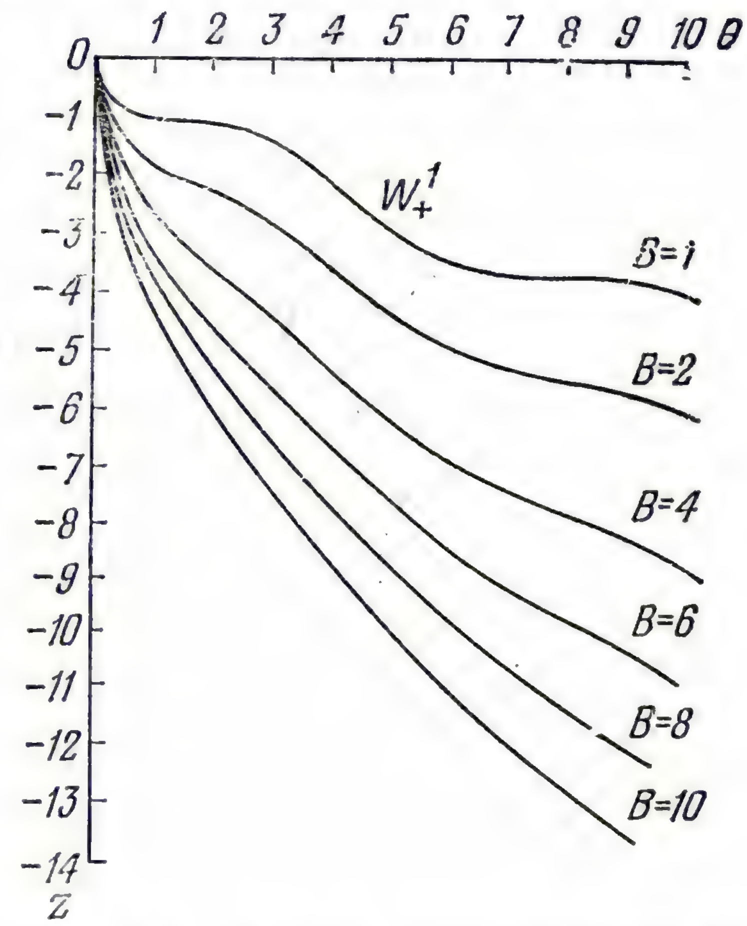

Рис. 7.8. Кривая переключения для маятника при отсутствии демпфирования.

Ветвь линии переключения, лежащую во втором квадранте, можно получить отражением построенной кривой относительно начала координат. Аналогично строится линия переключения для произвольной целевой точки, являющейся концом некоторой оптимальной траектории.

Однако мы должны еще установить аналогичную процедуру, которая годилась бы для всей совокупности целевых точек одновременно. Покажем, что требуется рассмотреть только линию переключения слева или линию пере-

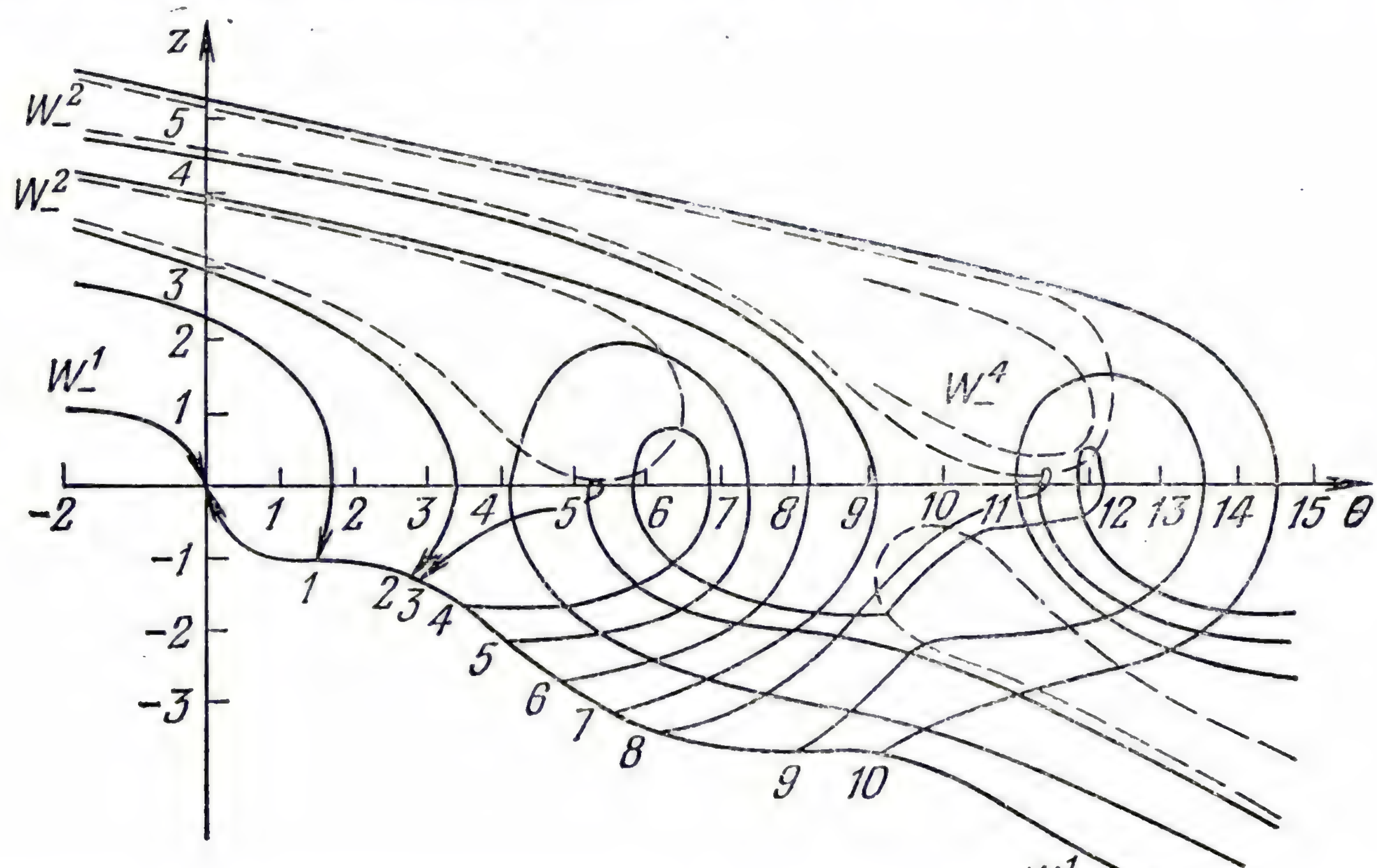

Рис. 7.9. Построение кривой переключения для маятника в случае больших ограничений на управления.

ключения справа от начальной точки при решении вопроса, какая точка берется в качестве целевой, если линия переключения

не имеет ветвей, смыкающихся на бесконечности. Ситуация указана на рис. 7.10 для всех кривых переключения.

Рассмотрим точку p на рис. 7.10. Если сначала выбрано управление $\beta \equiv +B$, то может не быть переключений до тех пор, пока

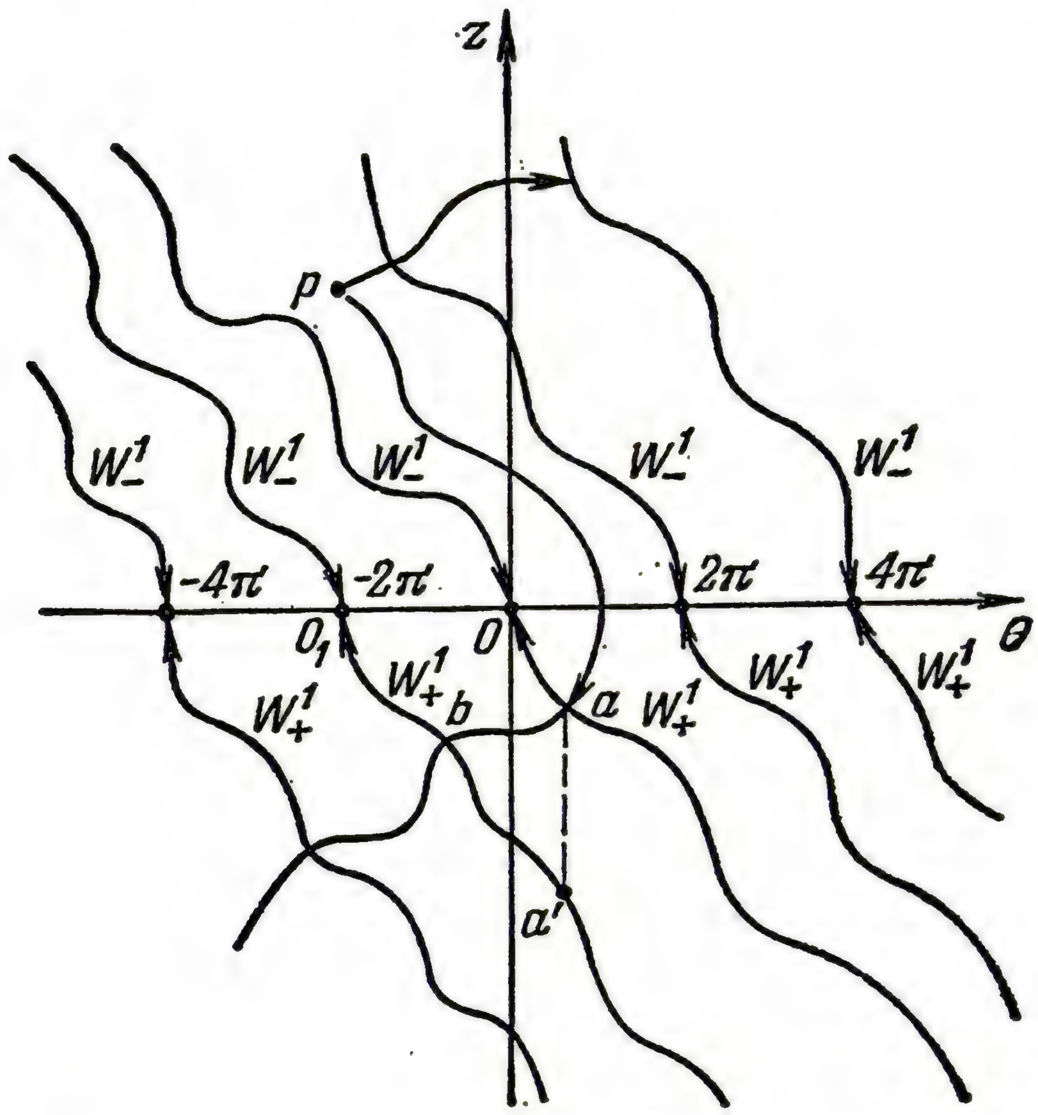

Рис. 7.10. Построение управления с обратной связью для маятника.

траектория не достигнет одной из точек a, b и т. д., т. е. пока траектория не пересечет один из кусков линии переключения. Очевидно, что переключение в точке a и последующее движение в начало координат предпочтительнее, чем переключение в точке b и движение из нее в начало координат. Это верно потому, что движение из точки a' в точку 0 вдоль пути, проходящего через точку a' при $\beta \equiv +B$, занимает меньше времени, чем движение по пути от точки a к точке b и затем к точке 0_1 и, таким образом, путь от точки a к 0 занимает меньше времени, чем путь от точки a к точке b и затем в точку 0_1. Аналогично, если β вначале выбрано равным $-B$, переключение происходит в точке пересечения с первой кривой переключения. Полное построение синтеза оптимального управления с обратной связью показано на рис. 7.11, где пунктирная кривая найдена с помощью только что проделанного рассуждения и определяет равные по времени пути перевода системы в точку с наименьшей угловой координатой.

Если $\alpha > 0$, то наклон кривых переключения будет круче, а способ построения аналогичен способу построения для случая $\alpha = 0$. В самом деле, легко показать, что если $\alpha > 2$, то линия

переключения не имеет кусков ветвей, смыкающихся на бесконечности. Мы должны лишь показать, что решения уравнения

$$\ddot{\eta}_2 + \alpha\dot{\eta}_2 + \eta_2(\cos\theta(t)) = 0$$

имеют не более одного нуля. Сделаем замену переменного $\eta_2 = e^{-(\alpha/2)t}v$. Получим уравнение относительно v:

$$\ddot{v} + v\left(-\frac{\alpha^2}{4} + \cos\theta(t)\right) = 0.$$

Решения этого уравнения при $\alpha > 2$ имеют не более одного

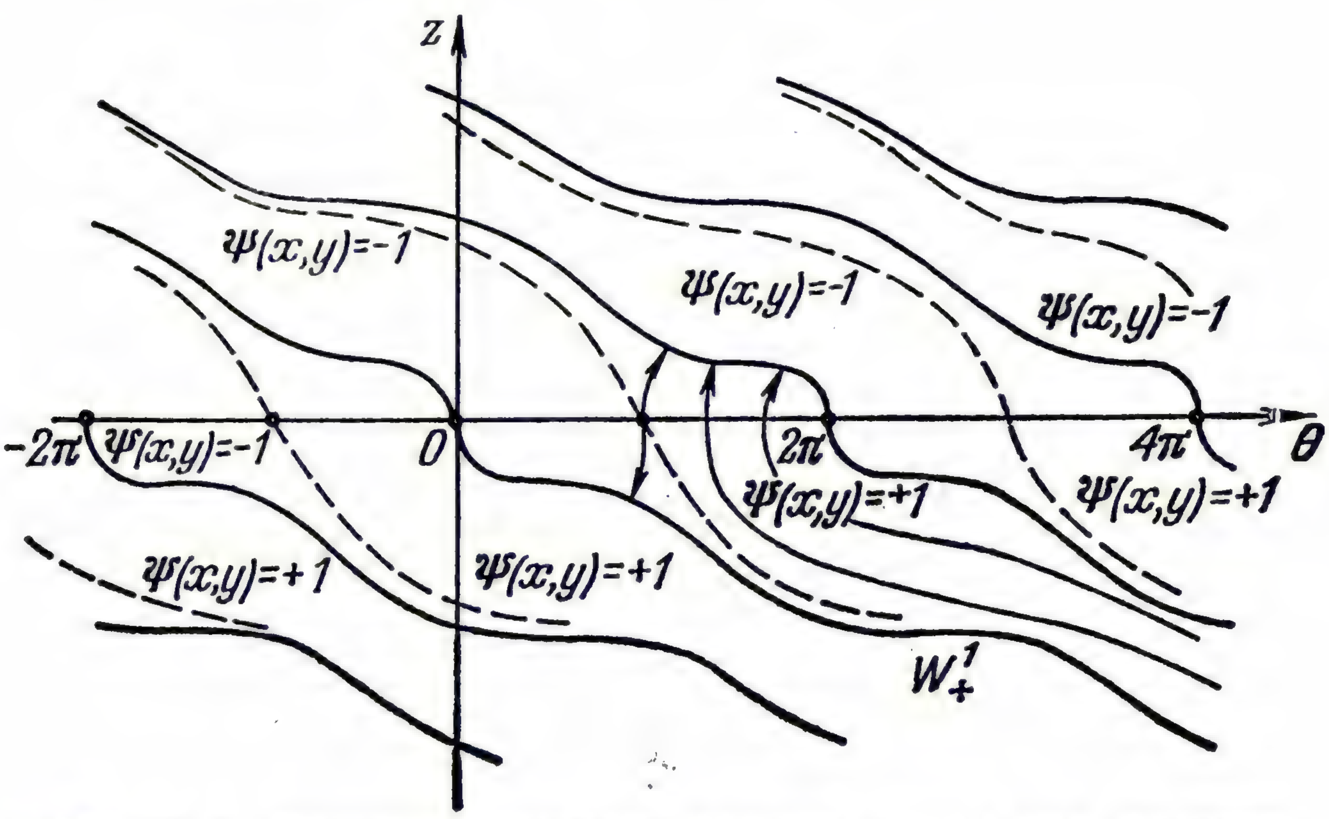

Рис. 7.11. Синтез управления с обратной связью для маятника.

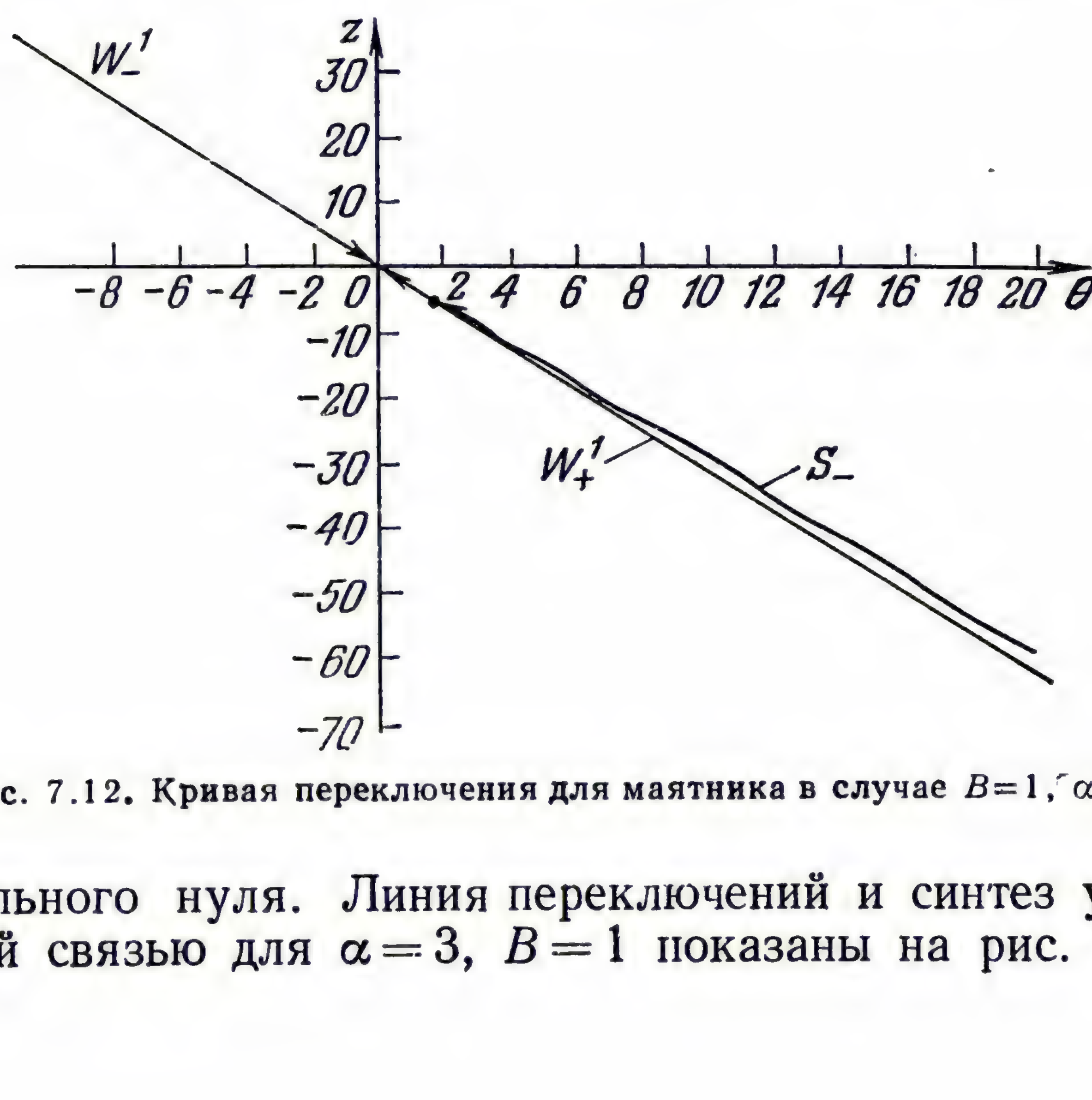

Рис. 7.12. Кривая переключения для маятника в случае $B=1$, $\alpha=3$.

действительного нуля. Линия переключений и синтез управления с обратной связью для $\alpha = 3$, $B = 1$ показаны на рис. 7.12.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $B \leqslant 2/\pi$, а $\alpha \geqslant 0$. При $B = 0{,}1$ и $\alpha = 0$ линия переключения для задачи перевода системы в начало координат строится как в предыдущем примере, и показана на рис 7.13. Эта же процедура годится и для нахождения линии переключения при $\alpha > 0$.

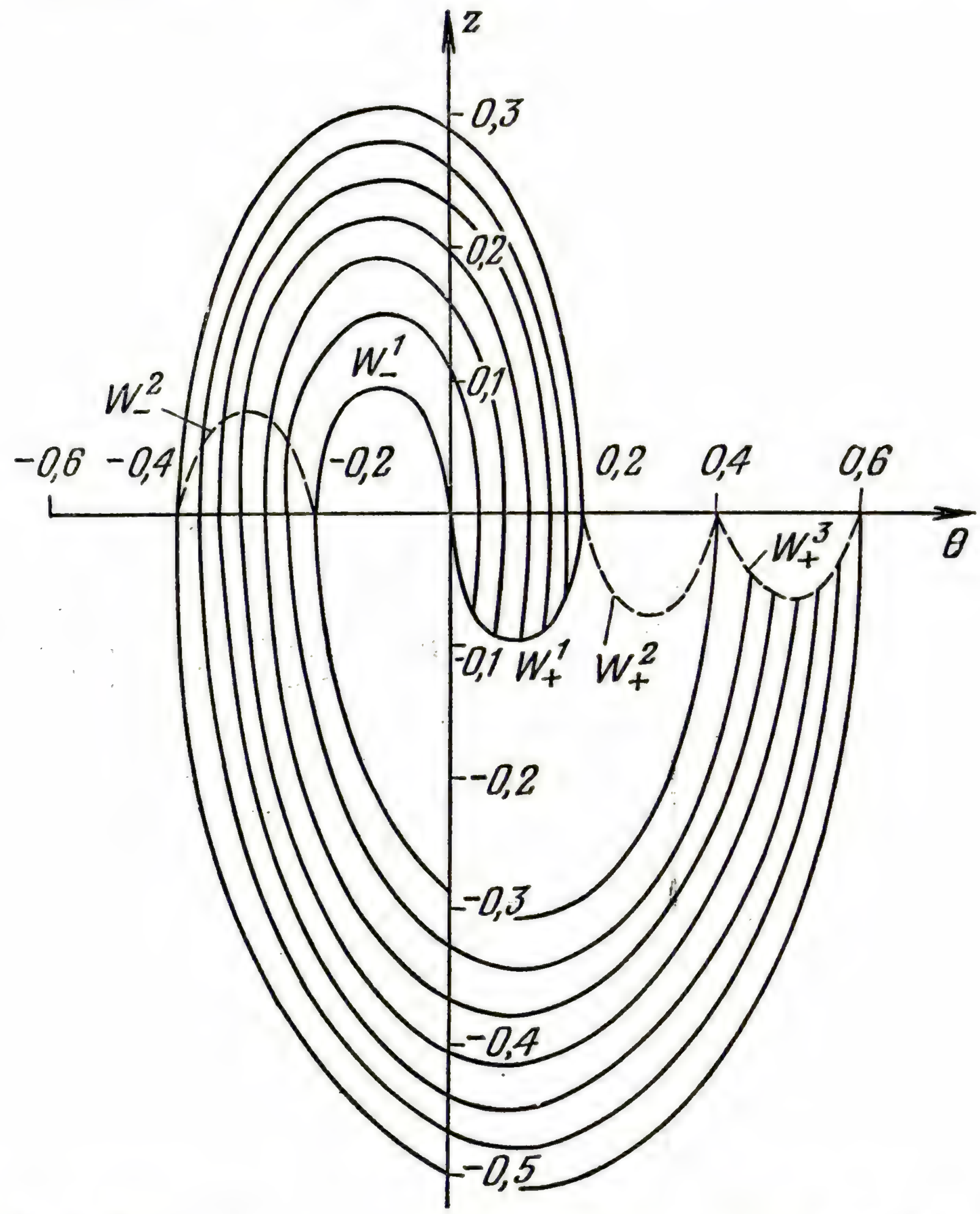

Рис. 7.13. Кривая переключения для маятника в случае $B = 0{,}1$, $a = 0$.

Вообще, интересно заметить, что фазовое пространство для маятника является цилиндром, если все точки устойчивого равновесия считать эквивалентными. Задача оптимального быстродействия, таким образом, должна решаться в фазовом пространстве, которое топологически отлично от плоскости, и это топологическое несоответствие является причиной чрезмерной сложности линии переключения.

Упражнения

1. Найти область нуль-управляемости для системы

$$\dot{x} = y^3,$$
$$\dot{y} = u, \quad |u| \leqslant 1.$$

2. На рисунке 7.5 мы обозначили расстояния между последовательными точками, в которых линия переключения пересекает ось x через α, β, γ, соответственно, в порядке возрастания абсцисс точек пересечения (см. рис. 7.5). Для уравнения Дуффинга (в примере 1 $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$) доказать, что расстояние между двумя последовательными точками пересечения вообще убывает с ростом их абсцисс (для этого примера) и что оно стремится к нулю при $x \longrightarrow \infty$.

3. Построить кривую переключения для уравнения Дуффинга с управлением и демпфированием:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3 - y + u, \quad |u| \leqslant 1$$

(см. пример 1 и рис. 7.5).

7.2. Оптимальное управление метеорологической ракетой

В 1919 г. Годдар рассмотрел задачу о подъеме летательного аппарата с реактивным двигателем на заданную высоту над землей при минимальном расходе топлива. Он установил, что эта задача не может быть решена обычными методами вариационного исчисления. Эта задача эквивалентна задаче максимизации высоты подъема аппарата с заранее заданными топливными ресурсами. Мы рассмотрим этот вариант задачи для случая, когда сила тяги двигателя ракеты ограничена по величине, и примем обычную математическую модель для описания силы лобового сопротивления. Случай, когда ограничения на силу тяги заранее не наложены, был исследован Эвингом (Ewing) и сведе́н к задаче с ограничением на силу тяги путем введения некоторого равномерного условия Липшица. Надо иметь в виду, что в практических задачах сила тяги всегда ограничена.

Мы исследуем систему уравнений

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \frac{dh}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{T - D(v, h)}{m} - c_1, \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c_2},$$

где h есть высота летательного аппарата над землей, v — его вертикальная скорость, m — его масса, а c_1 и c_2 — положительные константы. Управление T есть сила тяги ракеты, которая может изменяться в границах $0 \leqslant T \leqslant T_1$, а $D(v, h)$ — лобовое сопротивление, определенное для $h \geqslant 0$ и удовлетворяющее условиям:

1) $D(0, h) = 0$.
2) $|D(v, h_1)| > |D(v, h_2)|$, если $h_2 > h_1$.
3) $-D(-v, h) = D(v, h) \geqslant 0$, если $v \geqslant 0$.
4) $D(v, h) \longrightarrow 0$ при $h \longrightarrow \infty$ для всех v.
5) $D(v, h) \in C^1$.
6) $vD(v, h) \geqslant 0$.
7) $|D(v_1, h)| \geqslant |D(v_2, h)|$, если $|v_1| \geqslant |v_2|$.

Лобовое сопротивление как функция v и h задается приближенно формулой $D = v|v|e^{-\alpha h}$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Масса m в начальный момент равна m_0, а затем уменьшается до $m_1 > 0$ вследствие расхода топлива. Система с более точной формулой для лобового сопротивления может быть исследована примерно теми же

методами, которые Эвинг применил для случая, когда лобовое сопротивление задается формулой

$$D = v\,|\,v\,|\,e^{-\alpha h}.$$

В последнее время были исследованы некоторые новые аспекты этой задачи (см. [Лоуден]).

Предполагается, что имеется момент времени $\bar{t}$ $(0 < \bar{t} < \infty)$, до которого эксперимент должен быть закончен и поэтому мы рассмотрим только задачи максимизации высоты для моментов времени меньших или равных $\bar{t}$. Задача состоит в том, чтобы в классе допустимых управлений найти управляющую функцию $T(t)$ (определенную на интервале $[0, t_1]$ и удовлетворяющую ограничениям $0 \leqslant T \leqslant T_1$) так, чтобы первая координата $h(t)$ соответствующего решения $(h(t),\ v(t),\ m(t))$ системы с начальными условиями $(0, 0, m_0)$ в момент $t_1 \leqslant \bar{t}$ достигала бы максимального возможного значения $h(t_1)$, а само решение удовлетворяло фазовым ограничениям: $m_1 \leqslant m(t) \leqslant m_0$, $h(t) \geqslant 0$.

Мы займемся сначала вопросом о существовании оптимального управления, а потом воспользуемся необходимыми условиями оптимальности, найденными в главе 5. Затем мы выведем достаточные условия оптимальности управления, а также произведем синтез оптимального управления для рассматриваемой задачи при некоторых предположениях относительно характера изменения силы лобового сопротивления.

Существование. Для того чтобы установить существование оптимальной управляющей функции нам придется изучить структуру замыкания множества достижимости (см. главу 4). Доказательство существования получится более длинным, чем это необходимо, однако некоторые из промежуточных результатов понадобятся нам в дальнейшем при обсуждении характера оптимального управления (см. упражнение 3). В ходе доказательства мы воспользуемся монотонностью функции $m(t)$, а также учтем соответствующие ограничения. Ограничение на h будет учтено следующим образом. Сначала мы позволим величине h принимать и отрицательные значения и дадим доказательство существования оптимального управления для этого случая, а затем покажем, что оптимум всегда имеет место при $h \geqslant 0$.

Предполагается, что функция $D(v, h)$ определена по написанной выше формуле. Заменим систему $\mathcal{S}_0$ системой

$$(\mathcal{S}_1)\qquad \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= F(M)\,[T - D(v,\ h)] - c_1, \\ \frac{dM}{dt} &= -\frac{T}{c_2}, \end{aligned}$$

где

$$F(M)=\begin{cases}(M+m_1)^{-1}, & \text{если} \quad M\geqslant 0,\\ \dfrac{m_1-M}{m_1^2}, & \text{если} \quad M<0.\end{cases}$$

Эта система совпадает с системой $\mathscr{S}_0$ при $0\leqslant M\leqslant m_0-m_1$, т. е. при $m_1\leqslant m\leqslant m_0$ и на этом интервале

$$M(t)=m(t)-m_1.$$

К этой системе мы добавим еще координату x для того, чтобы учесть независимую переменную — время, и рассмотрим расширенную систему

$$(\hat{\mathscr{S}})\qquad \begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=1, \quad \frac{dh}{dt}=v,\\ &\frac{dv}{dt}=F(M)[T-D(v,h)]-c_1, \quad \frac{dM}{dt}=-\frac{T}{c_2}\end{aligned}$$

с начальными условиями $x(0)=v(0)=h(0)=0$, $M(0)=m_0-m_1$.

На этот раз, не принимая во внимание приведенные выше ограничения на h и M, рассмотрим множество достижимости (см. главу 4) $\hat{R}(\bar{t})$ для системы $\hat{\mathscr{S}}$ в пространстве переменных (x, h, v, M). Это множество является компактным в R^{3+1}, если каждое решение системы $\hat{\mathscr{S}}$ является ограниченным на интервале $[0, \bar{t}]$.

Каждой допустимой управляющей функции $T(t)$, т. е. измеримому управлению $T(t)$, изменяющемуся на интервале $[0, T_1]$, соответствует единственное ограниченное абсолютно непрерывное решение $(x(t), h(t), v(t), M(t))$ системы $\hat{\mathscr{S}}$, удовлетворяющее начальным условиям $(x(0), h(0), v(0), M(0))=(0, 0, 0, m_0-m_1)$ и определенное на интервале $[0, \bar{t}]$. Оно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $\hat{\mathscr{S}}$ почти всюду на интервале $[0, \bar{t}]$.

Ограниченность решения доказывается следующим образом. Функция $M(t)$, соответствующая каждой допустимой управляющей функции $T(t)$, определенной на интервале $[0, \bar{t}]$, является ограниченной, и поэтому таковой является и функция $F(M(t))$.

Рассмотрим выражение

$$\frac{d\,|v/2|^2}{dt}=v\frac{dv}{dt}=vF(M)[T(t)-D(v,h)]-vc_1,$$

из которого следует, что

$$\frac{d\,|v/2|^2}{dt}\leqslant |v|\,|F(M)T(t)-c_1|$$

или

$$\frac{d\,|v|}{dt}\leqslant |F(M)T-c_1|.$$

Поэтому функция $v(t)$ [а следовательно, и функция $h(t)$] ограничена на конечном интервале $[0, \bar{t}]$.

Тем самым ограничение на M наложено. Рассмотрим пересечение замкнутых множеств

$$H = \{x, h, v, M \mid 0 \leqslant x \leqslant \bar{t}, \ v \text{ и } h \text{ в } R^1, \ 0 \leqslant M \leqslant m_0 - m_1\}$$

и $\hat{R}(\bar{t})$, т. е. рассмотрим компактное множество

$$\hat{K}(\bar{t}) = H \cap \hat{R}(\bar{t}).$$

Так как $M(t)$ — невозрастающая функция на интервале $[0, \bar{t}]$, то очевидно, что $\hat{K}(\bar{t})$ есть множество достижимости при учете ограничений. Линейная функция $\mathscr{L}(x, h, v, M) \equiv h$ на компактном множестве $\hat{K}(\bar{t})$ достигает своего минимального и максимального значения. *Это доказывает существование оптимальной управляющей функции для случая, когда функция $h(t)$ может принимать и отрицательные значения.*

Теперь мы хотим показать, что вдоль оптимального решения скорость и высота положительны. Для этого сначала докажем лемму.

Лемма 1. *Рассмотрим систему $\mathscr{S}_1$, как и выше, с начальными условиями $(h_0, v_0 \geqslant 0, m_0 - m_1)$ в момент t_0. Пусть $T(t)$ — допустимая управляющая функция с соответствующим решением $(h(t), v(t), M(t))$ на интервале $[t_0, t_1]$, а $v(t) \geqslant 0$ на интервале $[t_0, t_1]$. Тогда для каждой начальной точки $(\bar{h}_0, \bar{v}_0, \bar{M}_0)$, такой, что $(\bar{h}_0 \geqslant h_0, \bar{v}_0 \geqslant v_0, \bar{M}_0 = m_0 - m_1)$, существует такая допустимая управляющая функция $\bar{T}(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$, что соответствующее ей решение $[\bar{h}(t), \bar{v}(t), \bar{M}(t)]$ проходит через начальную точку $(\bar{h}_0, \bar{v}_0, \bar{M}_0)$ в момент t_0 и удовлетворяет условиям $\bar{h}(t) \geqslant h(t)$, $\bar{v}(t) \geqslant v(t)$ — при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $\bar{M}(t_1) = M(t_1)$. Кроме того, если $\bar{h}_0 > h_0$, то можно добиться строгого неравенства $\bar{h}(t) > h(t)$. (Т. е. всегда есть возможность получить решение, превышающее в смысле высоты и скорости наперед заданное решение с положительной скоростью, если это превышение имело место в начальный момент времени.)*

Доказательство. Выберем $\bar{T}(t) = T(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда $\bar{M}(t) = M(t)$ и $F(\bar{M}(t)) = F(M(t))$ всюду на интервале $[t_0, t_1]$. Так как $D(v, h) \geqslant D(v, \bar{h})$ при $v \geqslant 0$, и $\bar{h} \geqslant h$, то $\bar{v}(t)$ не может стать меньше, чем $v(t)$. Но тогда и $\bar{h}(t)$ по крайней мере не меньше, чем $h(t)$. Так как $D(v, h) > D(v, \bar{h})$ при $\bar{h} > h$, то строгое неравенство также выполняется.

Из физических соображений следует, что

$$T_1 \geqslant m_0 c_1, \quad m_1 < m_0.$$

Это дает возможность показать, что даже если физическое ограничение на h не используется в задаче, максимальная высота $h^* > 0$, причем высоты h^* можно достичь вдоль решения, скорость которого все время положительна. Однако, если $T_1 < m_0 c_1$, то мы рассмотрим жесткое ограничение на h и сожжем столько топлива, сколько нужно для того, чтобы масса m уменьшалась до значения, при котором $T_1 = mc_1 = (M + m_1 c_1)$, если возможно, и до тех пор, пока это значение не достигнуто, каждое управление, которое использует топливо, оптимально. Когда это значение достигнуто, задача принимает указанный выше вид, и мы тогда снимаем фазовое ограничение. Поэтому достаточно рассмотреть только случай, когда $T_1 \geqslant m_0 c_1$ без ограничений на h. Лемма доказана.

Теорема 10. *Рассмотрим систему $\mathscr{S}_1$, как и выше, с начальным условием $h_0 = v_0 = 0$, $M_0 = m_0 - m_1$. Пусть $T^*(t)$ будет оптимальной управляющей функцией, которой соответствует на оптимальном интервале $[0, t^*]$ решение $(h^*(t), v^*(t), M^*(t))$. Тогда $h^*(t) \geqslant 0$, $v^*(t) \geqslant 0$ на $[0, t^*]$, а $T^*(t)$ есть оптимальное управление, удовлетворяющее всем ограничениям.*

Доказательство. Если $m_1 = m_0$, т. е. топлива нет, оптимальная высота $h^* = 0$. При этом также $t^* = 0$. Если $m_1 < m_0$, то $h^* > 0$, и ясно, что $t^* > 0$. Так как $h^*(t^*) > 0$, то $v(t^*) \geqslant 0$, где $v^*(t)$ — абсолютно непрерывное решение на интервале $[0, t^*]$.

Предположим, что $v^*(t) < 0$ на некотором подынтервале положительной длины из интервала $[0, t^*]$, и пусть t_2 и t_3 — концевые точки этого интервала, т. е. $v^*(t) < 0$ при $t \in (t_2, t_3)$; $v^*(t_2) = v^*(t_3) = 0$, а $v^*(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_3, t^*]$. Ясно, что $M^*(t_2) \geqslant M^*(t_3) \geqslant 0$.

Так как $v^*(t) < 0$ на интервале (t_2, t_3), то $h^*(t_3) < h^*(t_2)$. Пусть $M^*(t_2) - M^*(t_3) = \beta$. В точке $(h^*(t_2), v^*(t_2) = 0, M^*(t_2))$ выберем управляющую функцию $T(t) = T_1$ для интервала времени $[t_2, \bar{t}_3]$ такой длины, чтобы $(T_1/c_2)(\bar{t}_3 - t_2) = \beta$. Очевидно, что $\bar{t}_3 \leqslant t_3$, $v(\bar{t}_3) > 0$, $h(\bar{t}_3) \geqslant h^*(t_2) \geqslant h^*(t_3)$ и $M(\bar{t}_3) = M(t_3)$. На интервале $[\bar{t}_3, t^* - (t_3 - \bar{t}_3)]$ выберем управление $T(t)$ таким же, как и в доказательстве леммы, с соответствующим сдвигом во времени. Так как $v^*(t) \geqslant 0$ на интервале $[t_3, t^*]$, $v(t) \geqslant 0$ на интервале $[\bar{t}_3, t_1]$, $(t_1 = t^* - (t_3 - \bar{t}_3))$, то как и в лемме 1 находим, что $h(t_1) > h^*(t^*)$, $t_1 \leqslant t^*$, что противоречит оптимальности управления $T^*(t)$. Теорема доказана.

Необходимые и достаточные условия оптимальности управления

Теперь сформулируем задачу в стандартной форме с тем, чтобы мы могли воспользоваться результатами главы 5 относительно необходимых условий оптимальности. Различные свойства оптимального управления будут описаны ниже.

Рассмотрим систему

$$(\bar{\mathscr{S}})\quad \frac{dh}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=\frac{T-D_0(v)\,e^{-\alpha h}}{m}-c_1,\quad \frac{dm}{dt}=-\frac{T}{c_2},\qquad 0\leqslant T\leqslant T_1,$$

где предполагается, что лобовое сопротивление имеет вид $D_0(v)e^{-\alpha h}$ ($D_0(v)\in C^2$), и, кроме того, удовлетворяет условиям 1) и 7) предыдущего раздела. В дальнейшем мы предположим также, что:

8) $v\left[\frac{\partial^2 D_0}{\partial v^2}+\frac{1}{c_2}\frac{\partial D_0}{\partial v}\right]+\frac{D_0}{c_2}>0$ при $v>0$; α, c_1 и c_2 — положительные постоянные. Мы выбираем начальные условия $h(0)=v(0)=0$, $m(0)=m_0$ и накладываем ограничения $h\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, $0<m_1\leqslant m\leqslant m_0$. Предполагается, наконец, что $T_1>m_0c_1$ (см. рассуждения, предшествующие теореме 10).

Выпишем соответствующую функцию Гамильтона (см. главу 5)

$$H(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3,\ h,v,\ m,\ T)=\eta_1 v+\eta_2\left[\frac{T-D_0(v)\,e^{-\alpha h}}{m}-c_1\right]+\eta_3\left[-\frac{T}{c_2}\right].$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$(\bar{\mathscr{A}})\qquad \begin{aligned} \dot{\eta}_1&=-\eta_2\frac{\alpha}{m}D_0(v)\,e^{-\alpha h},\\ \dot{\eta}_2&=-\eta_1+\eta_2\frac{\partial D_0(v)}{\partial v}\frac{e^{-\alpha h}}{m},\\ \dot{\eta}_3&=\eta_2\frac{1}{m^2}\left[T-D_0(v)\,e^{-\alpha h}\right]. \end{aligned}$$

Пусть t_1 — время, за которое достигается максимальная высота. Тогда имеют место следующие граничные условия (см. главу 5):

$$\eta_1(t_1)\geqslant 0,\ \ \eta_2(t_1)=0,\ \ \eta_3(t_1)\geqslant 0,\ \ m(t_1)\geqslant m_1,\ \ v(t_1)\geqslant 0,\ \ h(t_1)\geqslant 0.$$

Определим функцию переключения по формуле

$$W=\left[\eta_2\frac{1}{m}-\eta_3\frac{1}{c_2}\right].$$

Из принципа максимума следует, что если $T(t)$ есть максимальная управляющая функция на интервале $[0,\ t_1]$, то для почти всех t из интервала $[0,\ t_1]$, $(t_1\leqslant\bar{t})$,

$$T(t)=T_1,\ \text{если}\ W(t)>0,\quad T(t)=0,\ \text{если}\ W(t)<0,$$
$$0\leqslant T(t)\leqslant T_1,\ \text{если}\ W(t)=0.$$

Подынтервал $[\xi_1,\ \xi_2]$ интервала $[0,\ t_1]$, на котором максимальное управление $T(t)$ равно нулю, мы будем называть *интервалом дрейфа*; если $W(t)>0$ на $[\xi_1,\ \xi_2]$, то мы назовем $[\xi_1,\ \xi_2]$ *интервалом полной тяги*; и, наконец, интервал, на котором $W\equiv 0$, будем называть *интервалом переменной тяги*. Отметим, что $W(t)$ есть сумма некоторого числа абсолютно непрерывных функций. Кроме того, $H\equiv 0$ вдоль максимального решения $(h(t),\ v(t),\ m(t))$,

$t \in [0, t_1]$, и не обращающееся в нуль решение сопряженной системы является абсолютно непрерывным на интервале $[0, t_1]$.

Обозначим для удобства

$$E = \left[v \frac{\partial D_0}{\partial v} + \frac{D_0 v}{c_2} - D_0\right] e^{-\alpha h} - mc_1 = \lambda(v) e^{-\alpha h} - mc_1,$$

где

$$\lambda(v) = \left[v \frac{\partial D_0}{\partial v} + \frac{D_0 v}{c_2} - D_0\right].$$

Отметим, что условие 8) для силы лобового сопротивления тогда принимает вид

$$\frac{d\lambda}{dv} > 0 \quad \text{при} \quad v > 0.$$

Далее, $\lambda(0) = 0$, так что $\lambda(v) > 0$ при $v > 0$.

Теорема 11. *Рассмотрим систему $\overline{\mathcal{S}}$, удовлетворяющую условиям* 1)—8) *предыдущего раздела с начальными условиями $h(0) = v(0) = 0$, $m(0) = m_0$. Пусть $T(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ есть оптимальная управляющая функция, которой соответствует решение $(h(t), v(t), m(t))$, удовлетворяющее ограничениям $h(t) \geqslant 0$, $v(t) \geqslant 0$, $m_0 \geqslant m(t) \geqslant m_1$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $W(t) > 0$ для $t \in (0, \varepsilon)$, т. е. интервал управления начинается с интервала полной тяги.*

Доказательство. Для того чтобы скорость и высота оставались положительными (при $T_1 > m_0 c_1$) для $t \in [0, t_1]$ необходимо, чтобы оптимальное управление было строго положительным $(T(t) > 0)$ на некотором компактном подмножестве T_{ε_1} положительной меры из интервала $[0, \varepsilon_1]$ для малого $\varepsilon_1 > 0$.

Допустим, что $W(t) \equiv 0$ на $[0, \varepsilon_2]$ для некоторого $\varepsilon_2 > 0$. Тогда $\frac{dW}{dt} \equiv 0$ на $[0, \varepsilon_2]$ (вычисляем производную на внутренней части интервала), т. е.

$$-\frac{1}{m}\eta_1 + \eta_2 \frac{1}{m^2}\left[\frac{\partial D_0}{\partial v} e^{-\alpha h} + \frac{D_0(v) e^{-\alpha h}}{c_2}\right] = 0$$

на интервале $[0, \varepsilon_2]$. Из условий, что $H \equiv 0$, $W(0) = 0$ и $\dot{W}(0) = 0$, получим, что $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \eta_3(0) = 0$. Это противоречит тому факту, что сопряженное решение в нуль не обращается. Следовательно, $\dot{W}(0) \neq 0$ при $W(0) = 0$. Очевидно, в этом случае из условия $\dot{W}(0) > 0$ следует положительность функций v, h. [$(\dot{W}(t))$ является также абсолютно непрерывной функцией на интервале $[0, t_1]$.] Таким образом, если $W(0) = 0$, то $\dot{W}(0) > 0$, и существование нужного нам $\varepsilon > 0$ гарантировано.

Случай, когда $W(0) < 0$, противоречит условиям положительности функций h и v, а случай, когда $W(0) > 0$, обеспечивает существование нужного отрезка времени $(0, \varepsilon)$. Теорема доказана.

Пусть момент времени $\hat{t}$ таков, что

$$\frac{T_1}{c_2}\hat{t} = m_0 - m_1.$$

Если $\bar{t} \leqslant \hat{t}$, то оптимальное управление, очевидно, надо выбрать таким: $T(t) \equiv T_1$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и оптимальное время $t_1 = \bar{t}$.

Мы теперь рассмотрим случай, когда $\bar{t} > \hat{t}$. Следующая лемма необходима для дальнейшего исследования свойств оптимального управления.

Лемма 2. *Рассмотрим решение* $(\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t))$ *сопряженной системы уравнений* $\overline{\mathscr{A}}$, *записанной выше, которое соответствует допустимому управлению* $T(t)$ *на интервале* $[0, t_1]$. *Пусть* $(h(t), v(t), m(t))$ *есть порожденное управлением* $T(t)$ *решение системы* $\overline{\mathscr{S}}$, где $h(t) \geqslant 0$, $v(t) \geqslant 0$ *при* $t \in [0, t_1]$. *Пусть, наконец, сопряженное решение удовлетворяет граничным условиям* $\eta_1(t_1) = k_1 > 0$, $\eta_2(t_1) = 0$, $\eta_3(t_1) \geqslant 0$. *Тогда* $\eta_2(t) > 0$ *при* $t \in [0, t_1]$.

Доказательство. Допустим, что $\eta_2(t_2) = 0$, $t_2 < t_1$. Рассмотрим сначала случай, когда $\eta_1(t_2) > 0$. Но тогда $\dot{\eta}_2(t_2) = -\eta_1(t_2) < 0$ и $\dot{\eta}_1(t_2) = 0$. Это означает, что функция $\eta_1(t)$ должна стать отрицательной на интервале $[t_2, t_1)$ и $\eta_2(t)$ отрицательно в той же самой точке. Таким образом, мы должны рассмотреть только случай, когда $\eta_1(t_2) < 0$ при $\eta_2(t_2) \leqslant 0$.

Когда $\eta_2(t) \geqslant 0$, $\dot{\eta}_1(t) \leqslant 0$. Так как $\eta_1(t_1) > 0$, то необходимо, чтобы функция $\eta_1(t)$ стала положительной раньше, чем $\eta_2(t)$. Но тогда $\dot{\eta}_2(t) < 0$ и функция $\eta_2(t)$ не сможет достигнуть конечного значения $\eta_2(t_1) = 0$.

Таким образом, если требуемое решение системы $\overline{\mathscr{A}}$ существует, то $\eta_2(t) > 0$ на интервале $[0, t_1)$. Лемма доказана.

Укажем теперь некоторые свойства оптимальной траектории, которые будут использованы для построения оптимального управления в рассматриваемом ниже примере.

Теорема 12. *Рассмотрим приведенную выше систему* $\overline{\mathscr{S}}$, *удовлетворяющую условиям* 1)—8), *с сопряженным решением, удовлетворяющим граничным условиям леммы* 2. *Пусть* $T(t)$ $(t \in [0, t_1])$ *есть оптимальная управляющая функция и* $(h(t), v(t), m(t))$ — *соответствующее решение, удовлетворяющее граничным условиям* $v(0) = h(0) = 0$, $m(0) = m_0$ *и фазовым ограничениям* $h(t) \geqslant 0$, $v(t) \geqslant 0$, $m(t) \geqslant m_1$ *при* $t \in [0, t_1]$. *Тогда переключение с интервала полной тяги на интервал дрейфа возможно только после того, как исчерпается топливо* $(m(t) = m_1)$, *т. е. если* $W(t) > 0$ *для* $t \in [\xi_1, t_2)$ *и* $W(t) < 0$ *для* $t \in (t_2, t_1)$, $\xi_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1$, *то* $m(t_2) = m_1$.

Доказательство. В точках переключения с интервала полной тяги на интервал дрейфа абсолютно непрерывная функция переключения $W(t)$ должна обращаться в нуль. Так как $\eta_2(t) > 0$

всюду, за исключением конечного момента времени, то из леммы 2 следует, что

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\eta_2 E}{m^2 v}\leqslant 0$$

в точках переключения, т. е. $E\leqslant 0$. В течение интервала дрейфа $\dot{m}=0$, $\dot{v}<0$ и

$$\frac{dE}{dt}=\dot{\lambda}(v)\,e^{-\alpha h}\dot{v}-\alpha\lambda(v)\,e^{-\alpha h}\dot{h}=[\dot{\lambda}(v)\,\dot{v}-\alpha\lambda(v)\,v]\,e^{-\alpha h}<0.$$

Таким образом, $dW/dt<0$ при t, не совпадающим с моментом переключения, так что величина $W(t)$ никогда не может стать положительной. Осталось воспользоваться принципом, который гласит, что во время оптимального движения все топливо используется. Теорема доказана.

Следствие. *Переключение с интервала переменной тяги на интервал дрейфа может иметь место, только если топливо израсходовано.*

Последний результат этого раздела устанавливает, что если максимальная сила тяги достаточно велика, то оптимальная программа управления допускает не более двух переключений.

Теорема 13. *Рассмотрим систему* $\overline{\mathcal{S}}$ *из теоремы* 12. *Если*

$$T_1\geqslant(\alpha c_2^2/c_1)\,\lambda\,(c_2\log(m_0/m_1))\log(m_0/m_1),$$

то интервал оптимального управления состоит из интервала полной тяги при $W>0$, *за которым следует интервал переменной тяги* $W\equiv 0$, *а затем интервал дрейфа; или из интервала полной тяги, за которым следует интервал дрейфа; или только из интервала полной тяги, когда* $\overline{t}\leqslant\hat{t}$ *(сила тяги может принимать максимальное значение лишь на интервале переменной тяги, как это отмечено ниже.)*

Доказательство. В соответствии с предшествующими результатами требуется только проверить невозможность переключения с интервала переменной тяги на интервал полной тяги. Сначала мы установим ограниченность достижимой скорости. Из неравенства

$$\dot{v}<-c_2\frac{\dot{m}}{m}$$

и граничных условий следует, что

$$v_{\max}<c_2\log\left(\frac{m_0}{m_1}\right)=\hat{v}.$$

При переключении в момент t_s с интервала переменной тяги на

интервал полной тяги $E(t_s)=0$. На интервале полной тяги $\dot{v}>0$ и

$$\frac{dE}{dt}=e^{-\alpha h}\left[\dot{\lambda}(v)\dot{v}-\alpha\lambda(v)v+e^{\alpha h}\frac{T_1}{c_2}c_1\right]>0,$$

если $T_1\geqslant\left(\frac{\alpha c_2}{c_1}\right)\lambda(\hat{v})\hat{v}$. Но тогда $dW/dt>0$ для $t\geqslant t_s$, и так как $W(t_s)=0$, то величина $W(t)$ не может уменьшиться до требуемой граничным условием

$$W(t_1)=\left[\frac{\eta_2(t_1)}{m(t_1)}-\eta_3(t_1)\right]\leqslant 0.$$

Таким образом, переключение с интервала переменной тяги на интервал полной тяги невозможно. Теорема доказана.

Замечания. Требования на T_1 в условиях теоремы 13 можно ослабить [см. Munick].

На интервале переменной тяги $W(t)\equiv 0$, так что оптимальное управление должно иметь такой вид, чтобы $E(t)\equiv 0$. Отсюда следует, что

$$T(t)=\frac{\dot{\lambda}(v)\left[D_0(v)e^{-\alpha h}+mc_1\right]+\alpha mv\lambda(v)}{\dot{\lambda}(v)+(c_1/c_2)me^{\alpha h}}.$$

Дальнейшие подробности и другие варианты этой задачи можно найти в работе Мьюник'а [Munick].

Численный пример для задачи Годдара

На рисунках 7.14 и 7.15 мы построили решения для четырех различных программ силы тяги, отмеченных цифрами *1*, *2*, *3* и *4*

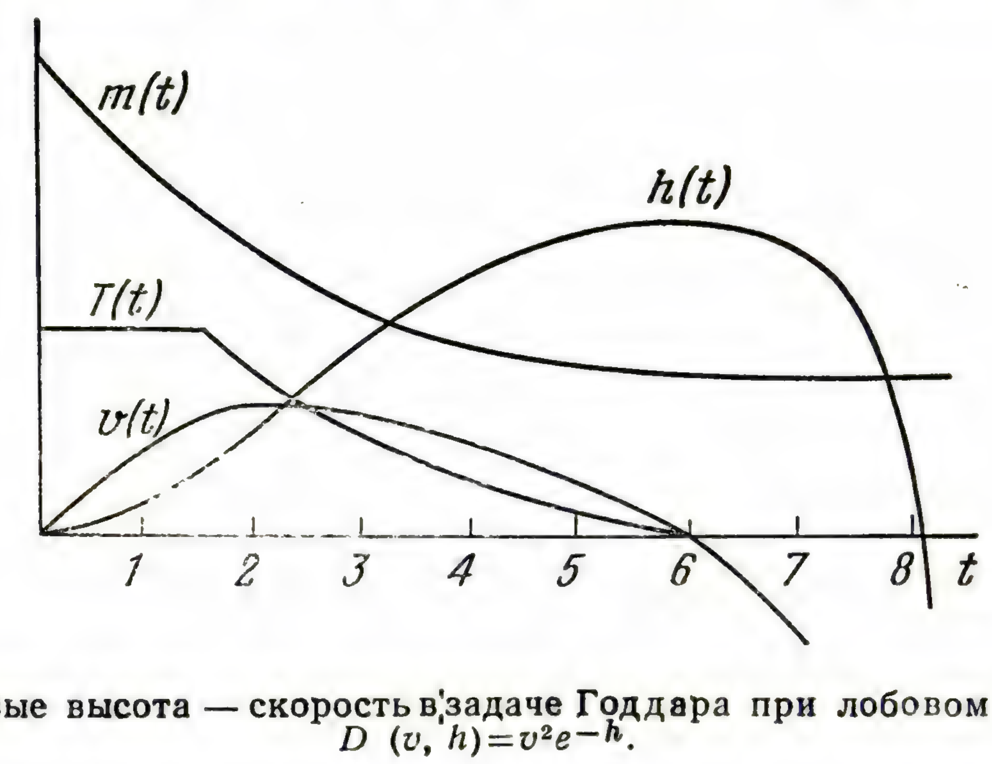

Рис. 7.14. Кривые высота — скорость в задаче Годдара при лобовом сопротивлении $D(v, h)=v^2e^{-h}$.

для силы лобового сопротивления $D_0(v)e^{-\alpha h}$, где $D_0(v)=v^2$ и $\alpha=1$. Обращаем внимание читателя на увеличение максимальной вы-

соты, достигнутое путем перехода от программы «полная сила тяги до момента сгорания всего топлива» к программе *4*, которая близка к оптимальной программе (см. упражнение 4).

Упражнения

1. Показать, что для атмосферы постоянной плотности $D(v, h) = D_1(v)$ вывод теоремы 13 имеет силу и без требований на T_1.

2. Вычислить оптимальную программу изменения силы тяги для типовой метеорологической ракеты для случая, когда сила лобового сопротивления резко возрастает с приближением скорости ракеты к скорости звука.

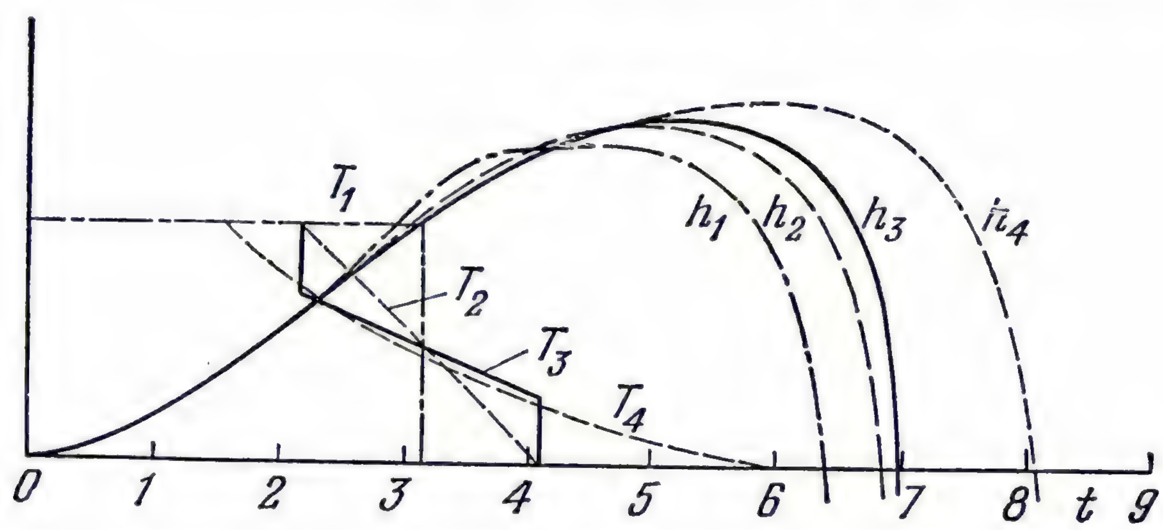

Рис. 7.15. **Сравнение высот в задаче Годдара для программ силы тяги** *1 — 4*.

3. Доказать существование оптимального управления для системы уравнений $\mathscr{S}_0$ при условии, что функция $D(v, h)$ кусочно-дифференцируема и $vD(v, h) \geqslant 0$ (см. теорему 4 главы 4).

4. Пополнить совокупность программ изменения силы тяги построением оптимального решения в численном примере для задачи Годдара, которая была рассмотрена выше в тексте.

7.3. Управление угловой скоростью твердого тела

Рассмотрим твердое тело в инерциальной системе отсчета, свободное от всех внешних неинерциальных сил. Пусть ω_x, ω_y, ω_z есть компоненты угловой скорости тела относительно жестко связанных с телом осей x, y, z прямоугольной системы координат, проходящей через центр тяжести, и пусть через I_x, I_y, I_z обозначены главные моменты инерции (положительные действительные числа). Предположим, что мы можем приложить к телу вращающие моменты при помощи управляемых газовых струй. Обозначим эти моменты через u_x, u_y и u_z в зависимости от осей, относительно которых они действуют. Уравнение движения Эйлера для этой задачи имеет такой вид:

$$(Q) \qquad \begin{aligned} I_x\dot{\omega}_x &= \omega_y\omega_z(I_y - I_z) + b_x u_x, \\ I_y\dot{\omega}_y &= \omega_z\omega_x(I_z - I_x) + b_y u_y, \\ I_z\dot{\omega}_z &= \omega_x\omega_y(I_x - I_y) + b_z u_z, \end{aligned}$$

где b_x, b_y, b_z — положительные константы. Естественно предположить, что сила, с которой управляющие газовые струи действуют на твердое тело, ограничена. Мы рассмотрим два случая.

1) Для каждой оси имеется пара управляемых струй, создающих независимые вращающие моменты для каждой оси, причем $|u_i| \leqslant 1$, $i = x, y, z$.

2) Имеется в распоряжении только одна пара управляемых струй, но газовые сопла могут быть установлены под любым углом относительно твердого тела. Наложенное на управление ограничение принимает вид $\|u\|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \leqslant 1$.

Задачей управления является остановка вращающегося объекта оптимальным способом, в частности, требуется дать синтез управления с обратной связью, который обеспечивал бы оптимальное управление для каждой начальной угловой скорости. Оптимальность будет выражена в терминах наименьшего затраченного времени, или минимального расхода топлива или энергии в течение заданного интервала времени. В следующем разделе мы рассмотрим задачу о существовании оптимальных управлений.

Существование оптимальных управлений

Рассмотрим упомянутую выше систему уравнений Q с начальной угловой скоростью $(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$ в момент $t = 0$. Мы сначала покажем, что в каждом случае, 1) или 2), существует допустимое управление, переводящее систему Q с начальными условиями $(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$ вдоль траектории $(\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$ в точку $(0, 0, 0)$ в течение конечного промежутка времени. Положим $J = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)$ и построим синтез управления с обратной связью:

$$u_x = -\frac{1}{2}\frac{\alpha I_x \omega_x}{b_x J^{1/2}}, \quad u_y = -\frac{1}{2}\frac{\alpha I_y \omega_y}{b_y J^{1/2}}, \quad u_z = -\frac{1}{2}\frac{\alpha I_z \omega_z}{b_z J^{1/2}},$$

где

$$\alpha = \min\left\{\frac{b_x}{I_x^{1/2}}, \quad \frac{b_y}{I_y^{1/2}}, \quad \frac{b_z}{J_z^{1/2}}\right\}.$$

Очевидно, что $(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \leqslant 1$ и $|u_x| \leqslant 1$, $|u_y| \leqslant 1$, $|u_z| \leqslant 1$. Вычислим dJ/dt вдоль решений системы Q при указанном выше управлении с обратной связью:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{-\frac{1}{2}\alpha}{J^{1/2}}[I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2] = -\alpha J^{1/2}.$$

Пусть $W = J^{1/2}$. Тогда $\dot{W} = -\frac{1}{2}\alpha$ (при $W \geqslant 0$). Таким образом, величина $W(t)$ для каждого заданного начального условия приво-

дится к нулю за конечное время и то же имеет место для $J = W^2$. Вследствие неотрицательности величины J соотношение $J = 0$ означает, что $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Теперь надо показать, что каждое решение системы Q при ограничениях 1) или 2) является равномерно ограниченным на каждом конечном отрезке времени $[0, \tau]$. Рассмотрим указанную выше функцию J. Для этой функции

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_x b_x u_x + \omega_y b_y u_y + \omega_z b_z u_z.$$

Очевидно, что

$$\left|\frac{dJ}{dt}\right| \leqslant \gamma J^{1/2}$$

при некотором постоянном $\gamma\,(0 \leqslant \gamma < \infty)$, если мы примем во внимание ограничение 1), которое содержит в себе ограничение 2) и, следовательно,

$$0 \leqslant J(t) \leqslant (\gamma t + c)^2$$

для некоторой константы $c\,(0 \leqslant c < \infty)$. Таким образом, каждое решение, начинающееся в точке $(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$, является равномерно ограниченным на каждом конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Ясно, что в рассматриваемом случае для задачи оптимального быстродействия выполняются условия выпуклости и непрерывности теоремы существования 4 главы 4. Только что мы как раз показали, что всегда имеется допустимое управление, переводящее каждое начальное состояние в начало координат за конечный отрезок времени и что все решения равномерно ограничены на каждом конечном интервале времени. Это имеет место даже в расширенном фазовом пространстве, когда добавляется координата времени — критерия качества. Таким образом, существование управления, оптимального по быстродействию, установлено при любом из ограничений 1) или 2).

Задача минимальной затраты энергии, которую мы теперь рассмотрим, есть задача приведения системы Q из начальной точки $(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$ в точку $(0, 0, 0)$ за время T, где T — фиксированное конечное число, при помощи управления, доставляющего минимум критерию качества

$$x_E^0(T) = \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t)\|^2\,dt.$$

Задача минимизации топлива[1]) аналогична этой задаче, за исключением того, что критерий качества здесь другой, а именно,

$$x_F^0(T) = \int_0^T \|u(t)\|\,dt.$$

---

[1]) Используемые здесь термины «топливо» и «энергия» могут не соответствовать обычным физическим понятиям топлива и энергии.

Если добавить координату качества x_E^0 (или x_F^0), соответствующую значению критерия качества, к основной системе, то предположение нашей основной теоремы существования 4 главы 4 о выпуклости нарушается. Однако обе координаты качества как в случае 1), так и в случае 2), удовлетворяют теореме существования из упражнения 2.2 главы 4. Мы уже установили существование равномерно ограниченного основного решения $(\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$ на каждом конечном интервале времени, и легко видеть, что координаты качества также являются ограниченными, если учитываются ограничения 1) или 2). Таким образом, оптимальные управления топливом и энергией существуют, если основной интервал времени $(0, T)$ является по крайней мере столь же большим, как и время, требуемое для перехода системы из состояния $(\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0})$ в состояние $(0, 0, 0)$ в задаче оптимального быстродействия.

Мы далее рассмотрим только задачу оптимального быстродействия для иллюстрации применения изложенной теории. Задачи минимизации расхода топлива и затраты энергии можно трактовать аналогичным образом, и мы предпочитаем их решение оставить читателю в качестве упражнений. При этом мы обращаем внимание читателя на теорему существования из упражнения 2.2 главы 4.

Синтез управления, оптимального по быстродействию

Рассмотрим приведенную выше систему уравнений Q при ограничении на управление $u_x^2+u_y^2+u_z^2 \leqslant 1$, и предположим, что $b_1 = b_2 = b_3$, т. е. что воздействие управляющего фактора на систему одинаково в каждом направлении. Мы теперь непосредственно покажем, что *решение задачи оптимального быстродействия при ограничении* 2) дается следующим выбором управления с обратной связью:

$$u_x^* = -\frac{I_x\omega_x}{M^{1/2}}, \quad u_y^* = -\frac{I_y\omega_y}{M^{1/2}}, \quad u_z^* = -\frac{I_z\omega_z}{M^{1/2}},$$

где

$$M = I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2.$$

Очевидно, что

$$u_x^{*2} + u_y^{*2} + u_z^{*2} \leqslant 1.$$

Легко показать, используя неравенство Шварца, что

$$-1 \leqslant \frac{dM^{1/2}}{dt} \leqslant 1$$

вдоль любого пути при упомянутом ограничении 2) на управление.

Более того, если используется управление u^*, то

$$\frac{dM^{*1/2}}{dt} = -1,$$

и u^* переводит систему в начало координат за конечное время, как показывает исследование, аналогичное проведенному в предыдущем разделе. Сравнивая упомянутые выше дифференциальные неравенства, можно вычислить время, соответствующее указанному управлению с обратной связью. Таким образом, максимальная амплитуда оптимального управления равна единице, а вектор оптимального управления прямо противоположен вектору кинетического момента $(I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$.

Более общие задачи, называемые задачами с инвариантной нормой, можно исследовать таким же образом, как упомянутую выше задачу оптимального быстродействия при ограничении 2) (см. упражнение 1).

Обратимся теперь к методу построения синтеза управления с обратной связью для задачи оптимального быстродействия при ограничении 1), т. е. когда $|u_x|\leqslant 1$, $|u_y|\leqslant 1$, $|u_z|\leqslant 1$. Для простоты предположим, что твердое тело обладает центральной симметрией, а именно, $I_x=I_y$. Для этого случая, когда первые два главных момента инерции равны, уравнения Эйлера принимают вид

$$(Q_s)\qquad \dot\omega_x=\alpha\omega_y\omega_z+\beta_x u_x,\quad \dot\omega_y=-\alpha\omega_x\omega_z+\beta_y u_y,\quad \dot\omega_z=\beta_z u_z,$$

где

$$\alpha=(I_y-I_z)\,I_x \text{ и } \beta_x=\frac{b_x}{I_x},\quad \beta_y=\frac{b_y}{I_y},\quad \beta_z=\frac{b_z}{I_z}.$$

Как и в главе 4, определим гамильтониан

$$H=\eta_1\left[\alpha\omega_y\omega_z+\beta_x u_x\right]+\eta_2\left[-\alpha\omega_x\omega_z+\beta_y u_y\right]+\eta_3\beta_z u_z,$$

где вектор-функция (η_1, η_2, η_3) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{A})\qquad \begin{aligned} \dot\eta_1&=-\frac{\partial H}{\partial\omega_x}=\alpha\omega_z\eta_2,\\ \dot\eta_2&=-\frac{\partial H}{\partial\omega_y}=-\alpha\omega_z\eta_1,\\ \dot\eta_3&=-\frac{\partial H}{\partial\omega_z}=-\alpha\omega_y\eta_1+\alpha\omega_z\eta_2.\end{aligned}$$

Первый интеграл этой системы имеет вид $\eta_1^2+\eta_2^2=c$, а так как функции η_1, η_2, η_3 входят в H линейно, то предположим, что $|\eta_1(0)|+|\eta_2(0)|+|\eta_3(0)|=1$. Это условие не меняет расположения нулей функций $\eta_i(t)$, $i=1,2,3$.

Принцип максимума устанавливает, что если управление $(u_x(t), u_y(t), u_z(t))$ оптимально, то оно должно максимизировать функцию H. Поэтому для известных $\omega_i(t)$, $\eta_i(t)$

$$u_i(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } \eta_i(t)>0,\\ -1, & \text{если } \eta_i(t)<0,\ i=x,\ y,\ z, \text{ или } 1,\ 2,\ 3.\end{cases}$$

Таким образом, управление $u(t)=(u_x(t),\ u_y(t),\ u_z(t))$ вполне определяется вектором $\eta(t)=(\eta_1(t),\ \eta_2(t),\ \eta_3(t))$ в любой момент времени, в который все координаты вектора $\eta(t)$ отличны от нуля. Таким образом, оказывается, что нули функций $\eta_1(t),\ \eta_2(t),\ \eta_3(t)$ играют специальную роль в определении максимальных управлений. Если общее время, в течение которого вектор $\eta(t)$ обращается в нуль, имеет меру нуль, то управления определены почти всюду.

Рассмотрим теперь систему уравнений $\mathcal{A}$. Предположим, что $\eta_1(0)=\eta_2(0)=0$; тогда из соотношений $\dot{\eta}_1=0,\ \dot{\eta}_2=0,\ \dot{\eta}_3=0$ следует, что $\eta_1(t)=0,\ \eta_2(t)=0,\ \eta_3(t)=1$ или -1. Эти соотношения определяют лишь управление $u_z(t)$, а этого недостаточно. Тем не менее, и в этом случае есть метод, который можно использовать для построения оптимальных траекторий, ведущих в начало координат. Заменим t на $-t$ в системах Q_s и $\mathcal{A}$ и выберем в качестве начальных условий точку $\omega_x(0)=\omega_y(0)=\omega_z(0)=0$. При этом вектор $(\eta_1(0),\ \eta_2(0),\ \eta_3(0))$ выберем так, чтобы $|\eta_1(0)|+|\eta_2(0)|+|\eta_3(0)|=1$. Рассмотрим далее решение уравнений Q_s и $\mathcal{A}$ на интервале $\tau\leqslant t\leqslant 0$ при максимальном управлении. При t, изменяющемся от 0 до τ, точка $(\omega_x(t),\ \omega_y(t),\ \omega_z(t))$ описывает специальное множество точек, называемое *максимальной траекторией*. При всевозможных значениях вектора $(\eta_1(0),\ \eta_2(0),\ \eta_3(0))$, подчиненных условию $|\eta_1(0)|+|\eta_2(0)|+|\eta_3(0)|=1$, получаются все максимальные траектории, проходящие через начало координат. Среди этих максимальных траекторий содержатся оптимальные траектории. Поэтому, если имеется лишь конечное число максимальных траекторий, соединяющих заданную точку с началом координат, из них можно выбрать оптимальную траекторию. Вдоль этой оптимальной траектории управление известно, и может быть выражено как функция переменных $(\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z)$; эта функция и является искомым управлением для всех точек, которые лежат на рассматриваемой траектории. Если найдено плотное множество непересекающихся оптимальных траекторий, то оптимальное управление известно почти всюду. Это и есть информация, требуемая для вычисления управляющей функции с обратной связью. Этот метод (метод *попятного движения*) использован при нахождении управления с обратной связью в разделе 7.1.

Вернемся теперь к определению максимальных управлений, в случае, когда $\eta_1(t)=0,\ \eta_2(t)=0,\ \eta_3(t)=1$ или -1. Для определенности рассмотрим случай, когда $\eta_3(t)=1$. Взяв в качестве начальной точки точку $\omega_x(0)=\omega_y(0)=\omega_z(0)=0$ и перебрав все управления $u=(u_x,\ u_y,\ u_z)$ вида $u_z(t)=1$ и $|u_x(t)|\leqslant 1$, $|u_y(t)|\leqslant 1$ определенные на интервале $t_1\leqslant t\leqslant 0$, получим некоторый конус K, состоящий целиком из соответствующих траекто-

рий. Легко показать, что этот конус непрерывно увеличивается при $t_1 \to \tau$. Очевидно, что первое значение t^* переменной времени t_1, для которого точка $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ находится в этом конусе, определит наименьший интервал времени для обратной задачи — задачи перевода начальной точки в начало координат. Так как $u_z(t)$ должно быть равно $+1$, то в качестве $u_x(t)$, $u_y(t)$ можно взять любые допустимые управления, удовлетворяющие ограничениям $|u_x(t)| \leqslant 1$, $|u_y(t)| \leqslant 1$ и переводящие точку (ω_x, ω_y) в точку $(0, 0)$ на интервале $(t^*, 0)$. Нетрудно показать, что точка $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ лежит внутри некоторого меньшего конуса, который получится, если на некотором интервале $[t_a, 0]$ использовать управления $u_x(t) = u_y(t) = 0$, а затем любые допустимые управления на интервале $[t^*, t_a]$.

Для плоского случая (ω_x, ω_y) можно показать, что если $u_x(t) = u_y(t) = 0$ на интервале $[t_a, 0]$, то при $t \in [t^*, t_a]$ в качестве $u_x(t)$ и $u_y(t)$ можно взять релейные управления, которые единственным образом определяются значением вектора $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, если

$$|\eta_1(t_a)| + |\eta_2(t_a)| > 0.$$

Неединственность выбора оптимального управления в общем случае объясняется, грубо говоря, тем, что в силу самого характера исследуемой трехмерной системы ω_z может оказаться настолько большим в сравнении с ω_y и ω_z, что для приведения ω_z к 0 требуется гораздо больше времени. В этом случае задача распадается на две, по существу, независимые: а) приведение ω_z к 0; б) приведение ω_x и ω_y к 0; результирующую задачу можно решить, решая задачи а) и б) последовательно; при этом некоторая неоптимальность полученного на первом этапе управления может быть скомпенсирована соответствующим выбором управления на втором этапе.

Посмотрим, при каких еще значениях координат η_i соответствующее управление определяется неединственным образом. Предположим, что функция $\eta_1(t)$ на некотором интервале обращается в нуль; следовательно $\dot{\eta}_1(t) \equiv 0 \equiv \alpha\omega_z\eta_2$. Тогда или $\eta_2(t) \equiv 0$, или $\omega_z \equiv 0$. Если $\omega_z \equiv 0$. то $\dot{\omega}_z \equiv 0 = \beta_z u_z$ и, следовательно, $\eta_3 \equiv 0$. Но тогда $\dot{\eta}_3 \equiv 0$, т. е. $\eta_1\omega_y = \omega_x\eta_2$ и $\eta_1\beta_x \operatorname{sgn}\eta_2 \equiv \eta_2\beta_y \operatorname{sgn}\eta_1$, что, как легко показать, невозможно. Если $\eta_2(t) \equiv 0$, то $\dot{\eta}_2(t) \equiv 0$ и, следовательно, $\dot{\eta}_3(t) \equiv 0$, и так как $|\eta_3| = 1$, то мы пришли к случаю, рассмотренному ранее. Предположим, наконец, что $\eta_3(t) \equiv 0$; тогда $\dot{\eta}_3(t) \equiv 0$ и $\eta_1\omega_y = \omega_x\eta_2$, что невозможно. Таким образом, вектор $[\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t)]$ определяет управление не единственным образом, лишь когда $\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$, т. е. в конусе, описанном ранее. Поэтому в качестве оптимального управления u_x и u_y может быть выбрано релейное управление, а выше

было показано, как оптимальное управление можно определить экспериментально.

Мы не будем далее продолжать этот анализ. Выше было указано, как можно найти оптимальные траектории, и если эта информация получена, она может храниться при помощи, например, логической схемы (см. [Смит], где описана соответствующая процедура). Остается еще вопрос, не проходят ли две максимальные (или оптимальные) траектории через одну и ту же точку. Ниже в упражнениях приводится пример системы, для которой имеются начальные точки, через которые проходят две оптимальные траектории.

Упражнения

1. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений (в векторном обозначении)

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t) + u(t) \text{ в } R^n,$$

с ограничивающим множеством $\Omega \subset R^m$

$$\Omega: \|u\| \leqslant k \text{ для некоторого } k > 0.$$

Здесь

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (u^i)^2.$$

Предположим, что указанная выше система $\mathscr{S}$ обладает тем свойством, что все решения однородного уравнения

$$\dot{x} = f(x, t)$$

лежат на сфере в R^n, т. е.

$$\|x(t)\| = \|x(0)\| \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0.$$

Требуется рассмотреть задачу наискорейшего попадания в начало координат и показать, что оптимальное по быстродействию управление с обратной связью имеет вид

$$u^*(t) = \frac{-kx(t)}{\|x(t)\|},$$

где $x(t)$ есть текущее состояние системы.

2. Рассмотрим систему Q уравнений движения Эйлера для твердого тела в свободном пространстве. Предположим, что $I_x \neq I_y \neq I_z$ и что угловая скорость $\omega_x(t)$ может быть измерена на интервале $[0, t_1]$, $(t_1 > 0)$ гироскопическим прибором.

(a) Показать, что если $u_i(t) \equiv 0$, $i = x, y, z$ на интервале $[0, t_1]$, то невозможно вычислить $\omega_y(0)$, $\omega_z(0)$, зная $\omega_x(t)$ на интервале $[0, t_1]$.

(b) Показать, что если на интервале $[0, t_1]$ $u_i = 0$, а на интервале $[t_1, t_2]$ $u_i(t) = k_i$, где $k_i \neq 0$, $(0 < t_1 < t_2,\ i = x, y, z)$, то можно определить оба числа $\omega_y(0)$ и $\omega_z(0)$, если известна система Q и $(u(t), \omega_x(t))$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_2$.

7.4. Оптимальная астронавигация

Мы рассмотрим задачу управления на расстоянии ракетным кораблем в межпланетном пространстве при минимальной затрате топлива. В типичной задаче такого типа требуется привести корабль из начального фазового состояния (положение, скорость) в Солнечной системе в некоторое предписанное фазовое состояние (цель). Это — общая задача встречи при (или без) предписанной продолжительности полета. Такая общая задача пока не решена сколько-нибудь эффективным способом, и мы упростим эту задачу так, что элементарное, но важное решение можно будет вычислить.

Мы будем искать управление, переводящее корабль с одной эллиптической *орбиты Кеплера* на другую при минимальном удельном импульсе. Никакого ограничения на место или время встречи не накладывается. Будем рассматривать лишь орбиты, расположенные в одной фиксированной плоскости, содержащей Солнце в начале координат (x, y). Мы рассмотрим эллипсы, один фокус которых фиксирован (совпадает с Солнцем), а другой фокус лежит на заданной линии — оси x. Таким образом, каждый такой эллипс полностью определяется двумя действительными параметрами f и l (движение по всем эллиптическим траекториям происходит так, что радиус-векторы движущейся точки вращаются в одну и ту же сторону), где f — абсцисса второго фокуса $(-\infty < f < \infty)$ l — длина большой оси $(l > 0)$. Обычные параметры эллипса

$$c = \frac{|f|}{2}, \quad a = \frac{l}{2}, \quad e = \frac{c}{a}.$$

Круговые орбиты соответствуют значению $f = 0$ (эксцентриситет $e = 0$) и имеют диаметры, равные l.

Мы будем считать допустимыми только импульсные силы тяги, которые направлены по касательной вдоль эллиптической орбиты точно в моменты прохождения через перигелий или афелий. Каждое такое импульсное управление изменяет эллиптическую орбиту заданного типа на новую эллиптическую орбиту рассмотренного типа. Таким образом, допустимое управление состоит из конечной последовательности импульсов силы тяги, касательных к орбите в чередующихся точках пересечения положительной и отрицательной полуосей x.

Критерием качества каждого допустимого управления будем считать сумму всех удельных импульсов, т. е. сумму модулей всех изменений скорости.

Представим каждую орбиту Кеплера с заданными параметрами в виде точки на верхней полуплоскости с декартовыми координатами f, $l > 0$. Тогда каждое управление можно представить в виде конечной последовательности точек в этой плоскости, или в виде ломаной, соединяющей начальную и конечную орбиты.

Если орбита имеет координаты $f>0$, $l>0$, то сила тяги (направленная назад или вперед) в афелии (в момент перехода при $x>0$) сохраняет афелиальное расстояние $(l+f)/2$. Аналогичная проверка всех возможных случаев приводит к заключению, что силы тяги при $x>0$ не меняют величины $(l+f)/2$, а силы тяги при $x<0$ не меняют величину $(l-f)/2$. Поэтому ломаная, изображающая любое допустимое управление, должна состоять из чередующихся сегментов с тангенсом угла наклона -1 и $+1$ в плоскости (f, l).

Перейдем теперь к вычислению критерия качества для каждой такой ломаной, характеризующей управление. Как следует из законов небесной механики, орбиты Кеплера описываются решениями *уравнений Ньютона*

$$\ddot{x}=\frac{-kx}{r^3},\quad \ddot{y}=\frac{-ky}{r^3},$$

где k есть гравитационная постоянная. Уравнение орбиты в полярных координатах (r, θ), как известно, имеет вид

$$r=\frac{h^2/k}{1+e\cos\theta},$$

где

$$h^2=ka(1-e^2),\quad \text{а}\quad r^2\dot{\theta}=h.$$

Скорость в перигелии (v_{per}) удовлетворяет уравнению $\frac{h^2/k}{1+e}v_{\text{per}}=h$, откуда

$$v_{\text{per}}=\sqrt{\frac{2k}{l}}\sqrt{\frac{l+|f|}{l-|f|}}.$$

Далее,

$$v_{\text{aph}}=\sqrt{\frac{2k}{l}}\sqrt{\frac{l-|f|}{l+|f|}},$$

где v_{aph} — *скорость в афелии*. Рассмотрим силу тяги при $x>0$. Если $f>0$, то это соответствует афелию и удельный импульс есть

$$\Delta v=\Delta\sqrt{\frac{2k}{l}}\sqrt{\frac{l-f}{l+f}}.$$

В перигелии ($f<0$) удельный импульс вычисляется по формуле

$$\Delta v=\Delta\sqrt{\frac{2k}{l}}\sqrt{\frac{l-f}{l+f}}.$$

Тем самым удельный импульс вычисляется в обоих случаях по одной и той же формуле. Поэтому сила тяги в точках, где $x>0$, соответствует отрезку ломаной с угловым коэффициентом -1 и критерию качества, равному модулю приращения величины

$\sqrt{2k/l}\sqrt{(l-f)/(l+f)}$ на этом отрезке. Аналогично силе тяги в точках, где $x<0$, соответствует отрезок ломаной с угловым коэффициентом $+1$ и критерий качества, равный модулю приращения величины $\sqrt{2k/l}\sqrt{(l+f)/(l-f)}$ на указанном отрезке.

В качестве примера применения нашей теории рассмотрим переход с одной из двух заданных эллиптических орбит $(f_0,\ l_0)$ на другую $(f_1,\ l_1)$ под действием двух импульсов. Это управление

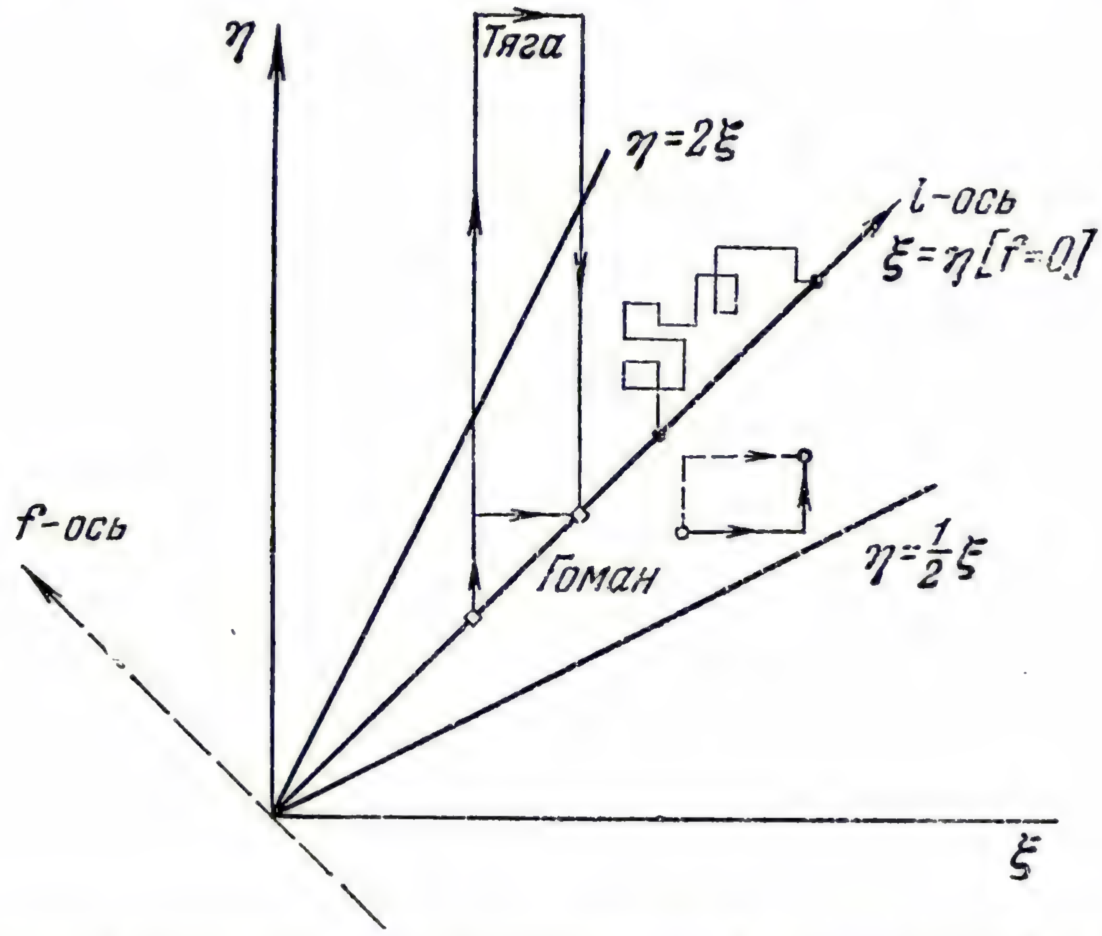

Рис. 7.16. Импульсное управление для перехода с одной эллиптической орбиты на другую.

изображается ломаной, состоящей из двух отрезков. Имеются два варианта такого управления (см. рис. 7.16, на котором $(f,\ l)$ координаты повернуты на 45°). В случае, когда $f_0=f_1=0$, т. е. когда начальная и конечные орбиты — круговые, обоим вариантам соответствует одно и то же значение критерия качества (в силу симметрии) и такое управление называется *преобразованием орбит Гомана* (Hohmann). Мы вычислим критерий качества для преобразования орбит Гомана между круговыми орбитами диаметров l_0 и $l_1>l_0$. Единственная промежуточная орбита Гомана есть эллипс с $f=(l_1-l_0)/2$ и $l=(l_1+l_0)/2$, который касается начальной и конечной окружностей.

Первому отрезку (для $x<0$) соответствует критерий качества

$$\Delta v=\sqrt{\frac{4k}{l_0+l_1}}\sqrt{\frac{l_1}{l_0}}-\sqrt{\frac{2k}{l_0}}\cdot 1,$$

а второму (для $x>0$) — критерий качества

$$\Delta v=\sqrt{\frac{2k}{l_1}}\cdot 1-\sqrt{\frac{4k}{l_0+l_1}}\sqrt{\frac{l_0}{l_1}}.$$

Если отношение диаметров $l_1/l_0 = \rho > 1$, а масштаб времени выбран так, чтобы начальная орбитальная скорость была единицей

$$v_0^2 = \frac{2k}{l_0} = 1,$$

то суммарное значение критерия качества равно

$$C(\rho) = \sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{\rho}} - \sqrt{\frac{2}{\rho(\rho+1)}}.$$

Конечно, $C(1) = 0$, и мы легко находим, что $C\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}18$, $C(2) = 0{,}29$. Орбитальное изменение $1 < \rho < 2$ имеет относительную важность в теории преобразования орбит Гомана, так как ниже мы покажем, что если $1 < \rho < 2$, то преобразование орбит Гомана является оптимальным управлением перехода между двумя круговыми орбитами. Заметим для дальнейшего, что производная критерия качества равна

$$\frac{dC}{d\rho} = \sqrt{\frac{1}{2\rho}}\,\frac{1}{(1+\rho)^{3/2}} - \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho}} + \frac{(2\rho+1)}{\sqrt{2}\,[\rho(\rho+1)]^{3/2}},$$

и при $1 < \rho < 2$ величина суммы первого и последнего членов превышает величину второго члена, так что $\frac{dC}{d\rho} > 0$.

Для $\rho = 12$ имеем $C(12) = 0{,}534$. Сравним это значение со значением критерия качества для управления, составленного из трех импульсов силы тяги: сначала очень большой силой тяги при $x < 0$, затем малой тягой при $x > 0$ и, наконец, большой тягой при $x < 0$. Вначале это управление переводит ракетный корабль с первой круговой орбиты на очень вытянутый эллипс, затем на эллипс, незначительно измененный по сравнению с предыдущим и касающийся последней круговой орбиты. На третьем этапе корабль замедляется и переходит на последнюю круговую орбиту. Маневр этого типа можно выбрать, чтобы дать сколь угодно хорошую аппроксимацию параболическому выходу с первой окружности, оценить поведение критерия качества на бесконечности и аппроксимировать параболическое возвращение на желаемую круговую орбиту. Учитывая, что скорость параболического перехода всегда в $\sqrt{2}$ раз больше круговой орбитальной скорости, мы можем вычислить значение критерия качества для этого управления, состоящего из трех импульсов силы тяги:

$$C_\infty(12) = [\sqrt{2} - 1] + 0 + \left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{12}} - \sqrt{\frac{1}{12}}\right] = 0{,}533.$$

Для произвольного значения $\rho > 1$ этот переход, состоящий из трех импульсов силы тяги, дает вблизи бесконечности следующее значение для критерия качества: $C_\infty(\rho) = 0{,}414\,[1 + \sqrt{\rho}/\rho]$. Поэтому

мы заключаем, что при $\rho \geqslant 12$ преобразование Гомана уже не является оптимальным управлением в классе допустимых импульсных управлений. Итак наша теория показывает, что круговой орбитальный переход из окрестности Земли в окрестность Венеры или Марса можно осуществить наиболее эффективно с помощью преобразования Гомана. Однако для перехода из окрестности Земли в окрестность Урана переход Гомана не оптимален.

Мы теперь должны показать, что для малых отношений $\rho > 1$ переход Гомана является оптимальным. Нам будет удобно чертить графики в координатах (ξ, η), где

$$\xi = l - f, \quad \eta = l + f.$$

В координатах (ξ, η) линия $f = 0$ переходит в прямую $\eta = \xi$. Допустимые управления изображаются ломаными с горизонтальными и вертикальными звеньями и с критериями качества, вычисляемыми в соответствии с изменением функций

$$\sqrt{\frac{4k\xi}{(\xi+\eta)\,\eta}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{4k\eta}{(\xi+\eta)\,\xi}}.$$

Таким образом, мы можем найти критерий качества, вычисляя криволинейный интеграл

$$\int \sqrt{\frac{k\eta}{(\xi+\eta)^3\,\xi}}\,d\xi + \sqrt{\frac{k\xi}{(\xi+\eta)^3\,\eta}}\,d\eta.$$

Рассмотрим совокупность всех допустимых траекторий, соединяющих точки $\xi_0 = \eta_0 = l_0$ и $\xi_1 = \eta_1 = l_1 = \rho l_0$, каждая из которых лежит в секторе

$$0 < \frac{1}{2}\xi \leqslant \eta \leqslant 2\xi.$$

Любую такую траекторию можно заменить ломаной $\xi \leqslant \eta \leqslant 2\xi$ без изменения критерия качества. Это следует из симметрии функционала, с помощью которого определен критерий качества, относительно линии $\eta = \xi$. Далее, любую ломаную можно «улучшить» (уменьшить критерий качества), избавляясь от перемещений вниз при переходе из точки (ξ_0, η_0) в точку (ξ_1, η_1). Это следует из монотонности критерия качества

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{\eta}{(\xi+\eta)^3\,\xi}} = \left[\frac{\eta}{(\xi+\eta)^3\,\xi}\right]^{-1/2} \frac{\xi - 2\eta}{2\xi\,(\xi+\eta)^4} < 0.$$

Любой подъем ломаной над уровнем n_1 может быть устранен. Это следует из непосредственного вычисления, показывающего, что основанию любого прямоугольника соответствует значение критерия качества меньшее, чем сумме остальных трех сторон. Аналогично,

можно избавиться от горизонтального движения влево, подкорректировав управляющую ломаную. Тем самым, каждую ломаную можно улучшить, заменив ее ступенчатой ломаной, всегда поднимающейся вправо. Покажем, наконец, что каждую ступень ломаной можно выбрать так, чтобы соответствующее значение критерия качества было наименьшим. Мы вычислим значение критерия качества вдоль пути, составленного из левой вертикальной стороны и верхней стороны прямоугольника, и покажем, что оно меньше соответствующего значения вдоль пути, состоящего из нижней стороны и правой вертикальной его стороны. Чтобы это сделать, мы проверим, что

$$\oint \sqrt{\frac{k\eta}{(\xi+\eta)^3\,\xi}}\,d\xi+\sqrt{\frac{k\xi}{(\xi+\eta)^3\,\eta}}\,d\eta>0,$$

где интеграл взят вдоль контура, обходимого против часовой стрелки и лежащего внутри некоторого углового сектора. По теореме Грина, этот криволинейный интеграл равен двойному интегралу по прямугольнику

$$\iint\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\sqrt{\frac{k\xi}{(\xi+\eta)^3\,\eta}}-\frac{\partial}{\partial\eta}\sqrt{\frac{k\eta}{(\xi+\eta)^3\,\xi}}\right]d\xi\,d\eta.$$

Подынтегральное выражение имеет тот же самый знак, что и многочлен

$$q(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1),$$

где $\lambda=\eta\,|\,\xi$ лежит в интервале $1<\lambda<2$. Элементарное исследование показывает, что $q(\lambda)>0$ и, следовательно, каждую ступень нашего управления можно выбрать так, чтобы ей соответствовало вогнутое звено ломаной с наименьшим значением критерия качества. Поэтому оптимальное управление внутри сектора $\frac{1}{2}\xi\leqslant\eta\leqslant 2\xi$ совпадает с преобразованием Гомана, которому соответствует ломаная из двух звеньев: вертикального звена, соединяющего точку (ξ_0, η_0) с точкой (ξ_0, η_1), и горизонтального звена, соединяющего точку (ξ_0, η_1) с точкой (ξ_1, η_1). Ясно, что при $1\leqslant\rho\leqslant 2$ преобразованию Гомана соответствует ломаная, лежащая в заданном секторе.

В заключение мы хотим показать, что на управлениях, которым соответствуют ломаные, лежащие вне этого сектора, критерий качества всегда принимает большее значение, чем на преобразовании Гомана, если $\rho>1$ соответствующим образом ограничено. Рассмотрим любую ломаную, соответствующую допустимому управлению, ведущему из $\xi_0=\eta_0=l_0$ к границе сектора. Пользуясь описанными выше приемами уменьшения значения критерия качества, можно показать, что оптимальный путь является либо горизонтальным отрезком, либо вертикальным отрезком, либо

ломаной, состоящей из вертикального отрезка, за которым следует горизонтальный отрезок. Мы покажем, что для произвольной точки $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ сектора $\xi \leqslant \eta \leqslant 2\xi$ пути, ведущему из $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ вдоль вертикальной прямой до пересечения с линией $\eta = 2\xi$, соответствует не большее значение критерия качества, чем аналогичному пути вдоль горизонтального отрезка. Это наблюдение, вместе с замечаниями, сделанными раньше, позволяет показать, что оптимальным путем от точки $\xi_0 = \eta_0 = l_0$ до линии $\eta = 2\xi$ является вертикальный отрезок. Для этого надо доказать неравенство

$$\left| \sqrt{\frac{4k}{\bar{\xi}+\bar{\eta}}} \sqrt{\frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}}} - \sqrt{\frac{4k}{\bar{\xi}+2\bar{\xi}}} \sqrt{2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sqrt{\frac{4k}{\bar{\xi}+\bar{\eta}}} \sqrt{\frac{\bar{\xi}}{\bar{\eta}}} - \sqrt{\frac{4k}{3\bar{\eta}/2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right|$$

при $\bar{\xi} \leqslant \bar{\eta} \leqslant 2\bar{\xi}$. Подстановкой $\lambda = \bar{\eta}/\bar{\xi}$ это неравенство приводится к виду

$$\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\lambda(1+\lambda)}} - \sqrt{\frac{1}{3\lambda}}.$$

Умножая на $\sqrt{\lambda}$, получаем эквивалентное неравенство

$$\frac{\sqrt{2\lambda}+1}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{1+\lambda}{\sqrt{1+\lambda}} = \sqrt{1+\lambda}.$$

Возводя в квадрат и упрощая, получаем

$$2\sqrt{2\lambda} \leqslant 2+\lambda$$

или

$$(\sqrt{\lambda}-\sqrt{2})^2 \geqslant 0.$$

Поэтому значение критерия качества для вертикального отрезка, ведущего к прямой $\eta = 2\xi$, не больше соответствующего значения для горизонтального отрезка, ведущего к той же прямой.

Теперь легко вычислить минимальное значение критерия качества для управления, которое выводит точку $\xi_0 = \eta_0 = l_0$ на границу основного сектора, и затем переводит ее в точку $\xi_1 = \eta_1 = l_1 = \rho l_0$. Это суммарное значение должно превосходить (если положить $2k/l_0 = 1$) величину

$$C_B(\rho) = \left(\sqrt{\frac{1}{\rho}} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right).$$

Заметим, что $C_B(2) \geqslant 0{,}26$ и $C_B(\rho)$ есть убывающая функция от ρ. Мы показали, что

$$C(\rho) < C_B(\rho) \text{ при } 1 \leqslant \rho \leqslant 1{,}8.$$

Это неравенство есть наш главный результат. Оно означает, что преобразование Гомана является оптимальным управлением в классе импульсных управлений между двумя круговыми орбитами

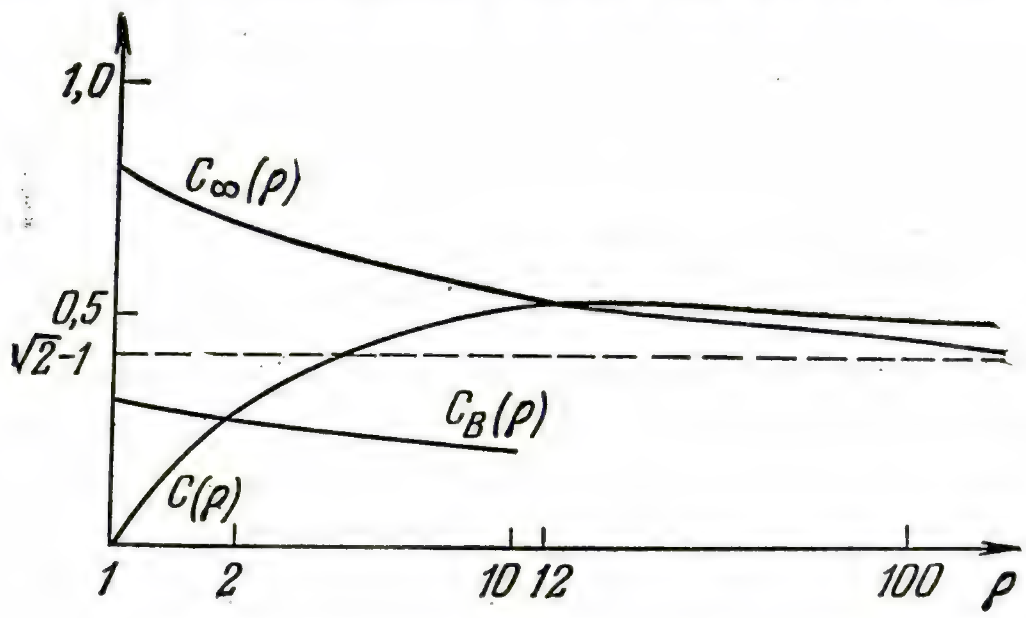

Рис. 7.17. Сравнение критериев качества.
$C_\infty(\rho)=(\sqrt{2}-1)\,(1+\rho^{-1/2})$.

с отношением диаметров, меньшим, чем $\rho = 1{,}8$, даже по сравнению с управлениями, которые значительно изменяются по величине. Весьма вероятно, что переход Гомана оптимален для $\rho = 2$ и даже для некоторых значений $\rho > 2$. Однако, как мы показали, преобразование Гомана уже не оптимально, если $\rho \geqslant 12$.

Поведение критерия качества в зависимости от ρ иллюстрируется диаграммой 7.17.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА И ДРУГИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Во многих задачах оптимального управления, рассмотренных в предыдущих главах, удавалось получить необходимые и достаточные условия оптимальности. Как правило, в этих случаях мы показывали, что основное необходимое условие — принцип максимума — является также и достаточным. Для целого ряда задач удалось также разрешить вопросы существования и единственности оптимальных решений. Однако даже в этих случаях задачу не всегда удавалось довести до конца, т. е. выразить оптимальное управление как функцию измеряемых величин начальных и конечных условий. В таких случаях остается нерешенной двухточечная краевая задача — задача нахождения решения системы $2n$ дифференциальных уравнений, с m начальными условиями и $2n-m$ конечными условиями.

Такую двухточечную краевую задачу удается иногда решить методом наискорейшего спуска, как в случае, когда для нахождения оптимального управления используется принцип максимума, так и в случае, когда строится последовательность управляющих функций, имеющих пределом оптимальное управление. Этот последний подход, именуемый прямым методом, может быть иногда использован для описания необходимых условий оптимальности по известным свойствам предельного управления; кроме того, если предельное управление существует, то бывает возможно доказать существование оптимального управления. Ниже мы рассмотрим примеры, иллюстрирующие такой конструктивный подход. Основной довод в пользу применения метода наискорейшего спуска или других конструктивных методов состоит в том, что эти методы позволяют использовать для построения последовательности приближенных управляющих функций, или получения параметров, определяющих оптимальные управляющие функции, вычислительные машины. Тем самым, после конечного числа итераций может быть получена достаточно близкая к оптимальной управляющая функция (см. дискуссию об управлениях с обратной связью в начале главы 7).

В настоящем приложении мы рассмотрим метод наискорейшего спуска для общей задачи оптимизации, и покажем, как он применяется для выбора оптимальных управлений. В первом разделе дается определение и описание метода для наиболее общей задачи оптимизации. Второй раздел содержит примеры применения метода наискорейшего спуска к задачам оптимального управления. В заключительном разделе рассматривается литература по итерационным (численным) методам и соответствующая библиография.

А1. Метод наискорейшего спуска

Мы рассмотрим сначала метод наискорейшего спуска в конечномерном евклидовом пространстве E^m. Полученные результаты будут справедливы и для любого другого пространства конечной размерности, со скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle$, полного в метрике $|\cdot|=\langle\cdot, \cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$. Метод наискорейшего спуска может быть применен и в бесконечномерном пространстве, удовлетворяющем тем же условиям, например, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Норма в пространстве E^m с элементами $u=(u_1, \ldots, u_m)$ обозначается через

$$\| u \| = \left(\sum (u_i)^2\right)^{1/2},$$

а скалярное произведение элементов u и v в E^m как

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{m} u_i v_i.$$

Пусть $C(u)$ — действительная функция, непрерывно дифференцируемая на некотором открытом подмножестве $\mathcal{D}$ в E^m. Для простоты рассмотрим случай $m=2$. Пусть функция $C=C(u_1, u_2)$ имеет вид, изображенный на рис. А.1, а точка $u^0=(u_1^0, u_2^0)$ из $\mathcal{D}$ такова, что градиент $\frac{\partial C_0}{\partial u} \equiv \frac{\partial C}{\partial u}(u^0) = \left[\frac{\partial C}{\partial u_1}(u^0), \frac{\partial C}{\partial u_2}(u^0)\right]'$ не равен нулю. Здесь, как и раньше, штрих означает транспонирование вектора или матрицы. *Направлением наискорейшего спуска* в точке u^0 из E^m называется направление, соответствующее вектору в R^m с началом в u^0, вдоль которого скорость изменения функции C по отношению к длине дуги является минимальной. Пусть S — множество всех гладких кривых в E^2, проходящих через точку u^0. Пусть γ: $u_1=u_1(s)$, $u_2=u_2(s)$ есть кривая из S, заданная в параметрической форме, где s — длина дуги, измеренная от точки u^0. Поскольку γ — гладкая кривая, то

$$\left(\frac{du_1(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{du_2(s)}{ds}\right)^2 = 1$$

для всех s. Обозначим направляющие косинусы кривой γ в точке u^0 через $\frac{du_1}{ds}$, $\frac{du_2}{ds}$.

Для непрерывно дифференцируемой функции $C(u)$ скорость изменения C по отношению к длине дуги равна

$$\frac{dC}{ds}=\frac{\partial C_0}{\partial u_1}\frac{du_1}{ds}+\frac{\partial C_0}{\partial u_2}\frac{du_2}{ds}$$

для любой $\gamma \in S$. Таким образом, направление наискорейшего спуска из u^0 мы получим, найдя направляющие косинусы du_1/ds, du_2/ds, минимизирующие величину dC/ds при ограничении

$$\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2=1.$$

Минимизирующие значения в точке u^0 равны

$$\frac{du}{ds}=-\frac{1}{\left\|\frac{\partial C}{\partial u}(u^0)\right\|}\frac{\partial C}{\partial u}(u^0).$$

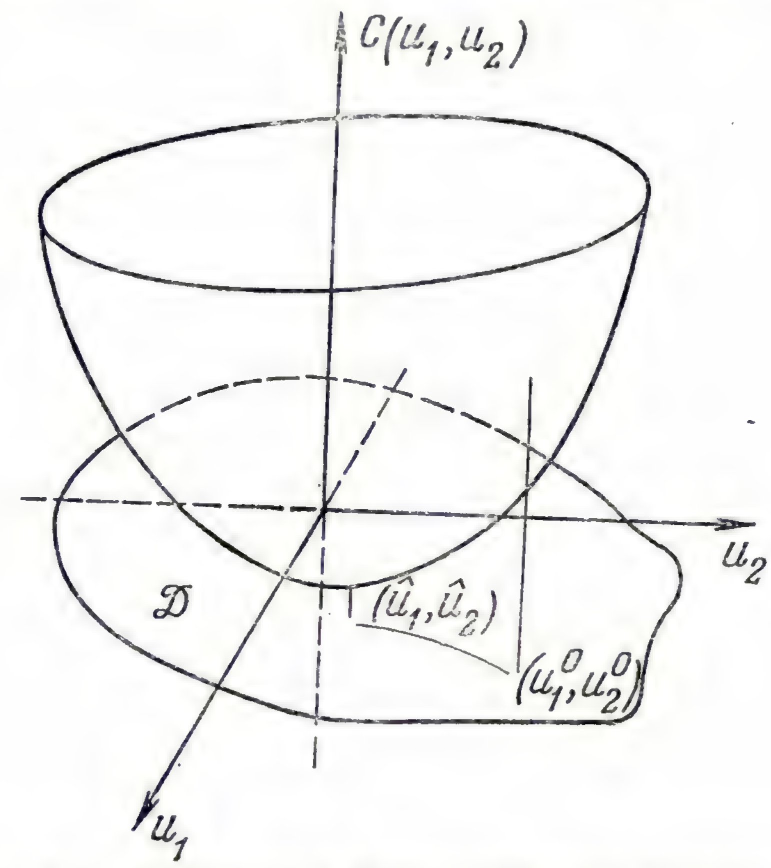

Рис. А1. Траектории наискорейшего спуска в E^2.

Таким образом, направление наискорейшего спуска противоположно направлению градиента функции C в точке u_0. Для того чтобы найти траекторию наискорейшего спуска, рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{d\sigma}=-\frac{\partial C}{\partial u}(u), \quad u(0)=(u_1^0,\ u_2^0), \quad \sigma \geqslant 0,$$

обладающее решением для достаточно малых σ. Если решение предполагается единственным, то полученная пространственная кривая $(u_1(\sigma),\ u_2(\sigma))$ определяет гладкую траекторию, касательная к которой в каждой точке $(u_1,\ u_2)$ совпадает с направлением наискорейшего спуска для C. Длина дуги вдоль этой кривой дается выражением

$$s=\int_0^\sigma \left\|\frac{\partial C}{\partial u}(u(\tau))\right\| d\tau \quad \text{и} \quad \frac{ds}{d\sigma}=\left\|\frac{\partial C}{\partial u}(u(\sigma))\right\|>0$$

($ds/d\sigma$ можно рассматривать, как скорость вдоль этой траектории). Вдоль этой кривой имеем

$$\frac{dC}{d\sigma}=\frac{dC}{ds}\frac{ds}{d\sigma}=-\left\|\frac{\partial C}{\partial u}(u(\sigma))\right\|<0, \quad \text{если} \quad \frac{dC}{du}\neq 0.$$

Поэтому функция C убывает при движении по траектории наискорейшего спуска, и при $\sigma \to +\infty$ мы приближаемся к той точке

области $\mathscr{D}$, в которой функция C достигает минимума. В дальнейшем будет доказана теорема, дающая достаточные условия существования единственного локального минимума, и показывающая, что решение дифференциального уравнения, с начальной точкой, достаточно близкой точке, в которой достигается этот минимум, стремится к этой точке при $\sigma \longrightarrow \infty$, если только выполняются некоторые локальные условия. Рассмотрим теперь задачу наискорейшего спуска при дополнительных ограничениях. поскольку такие ограничения часто встречаются в задачах оптимального управления.

Пусть функции $C(u)$ и $g_i(u)$, $i=1, 2, \ldots, r<m$ принадлежат классу C^1 в $\mathscr{D}\subset E^m$, и предположим, что векторы $\partial g_i/\partial u$ образуют линейно независимую систему в каждой точке множества $\mathscr{D}$. Пусть u—точка из $\mathscr{D}$, в которой $\operatorname{grad} C$ не равен нулю, но $g_i=0$, $i=1, 2, \ldots, r$. Направление наискорейшего спуска из точки u^0 определяется вектором

$$-\frac{\partial C}{\partial u}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial u},$$

где постоянные λ_k определяются из системы линейных уравнений

$$G\lambda=y.$$

Здесь

$$y=\left[\left\langle\frac{\partial C}{\partial u}, \frac{\partial g_1}{\partial u}\right\rangle, \ldots, \left\langle\frac{\partial C}{\partial u}, \frac{\partial g_m}{\partial u}\right\rangle\right]',$$

а G есть *матрица Грама*

$$\left\langle\frac{\partial g_i}{\partial u}, \frac{\partial g_j}{\partial u}\right\rangle, \qquad i, j=1, 2, \ldots, m,$$

которая при принятых выше допущениях является положительно определенной. Таким образом, траектории наискорейшего спуска являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{du}{d\sigma}=-\frac{\partial C}{\partial u}+(G^{-1}y)'\frac{\partial g}{\partial u}, \quad u^0=u(0), \quad \sigma\geqslant 0.$$

Если имеются дополнительные ограничения вида $g_j(u)\leqslant 0$, $j=r+1, \ldots, r+l<m$, что часто случается в задачах оптимального управления,— то методом, принадлежащим Вэйлентайну (Valentine), эту задачу можно свести к задаче с ограничениями в виде равенств. Это достигается введением функций

$$\hat{g}_j(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+l})=$$
$$=g_j(u_1, \ldots, u_m)+(u_{m+j-r})^2=0 \text{ для } j=r+1, \ldots, r+l$$

и, кроме того, заменой исходной функции C функцией $\hat{C}$ по формуле $\hat{C}(u_1, \ldots, u_m, u_{m+l})=C(u_1, \ldots, u_m)$. Тем самым, исходная

задача сводится к задаче минимизации функции $\hat{C}$ в E^{m+l} при ограничениях

$$g_i(u_1, \ldots, u_m) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$
$$\hat{g}_j(u_1, \ldots, u_{m+l}) = 0, \qquad j = r+1, \ldots, r+l.$$

Далее мы будем рассматривать задачу наискорейшего спуска в функциональном пространстве; полученные при этом результаты относительно сходимости будут верны также и для пространств конечной размерности. Прежде чем применить метод наискорейшего спуска к функционалам, определенным на некотором функциональном пространстве, необходимо уточнить понятие градиента (см. также упражнения раздела 6.1). Для этого нам придется развить некоторые методы функционального анализа. Все нижеследующие результаты имеются в главе 6 книги Люстерника и Соболева. Прежде всего введем понятие длины в банаховом пространстве.

Пусть U — действительное банахово пространство с нормой $|\cdot|$; рассмотрим функцию $u(t)$, заданную на конечном интервале $a \leqslant t \leqslant b$, и принимающую значения из U. Функция $u(t)$ называется непрерывной на $[a, b]$, если она непрерывно отображает отрезок $[a, b]$ в пространство U с топологией, индуцированной на нем его нормой. Функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, если имеется элемент $u'(t) \in U$, такой, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - u'(t) \right| = 0$$

для любого $t \in [a, b]$. На концах интервала рассматриваются односторонние производные. (Более общие определения можно найти в книге Хилле и Филлипса, глава 3.)

Рассмотрим некоторое разбиение интервала $[a, b]$, $\pi_m : a \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_m = b$ и положим

$$S(u, \pi_m) = \sum_{i=1}^{m} |u(t_i) - u(t_{i-1})|.$$

Непрерывная кривая в U, определяемая функцией $u(t)$, называется *спрямляемой*, если для нее величина $L = \sup S(u, \pi_m)$, конечна. Здесь супремум берется по всем конечным разбиениям интервала $[a, b]$. Если, кроме того, $u'(t)$ непрерывна и $|u'(t)| \neq 0$ для $t \in [a, b]$, то $u(t)$ называется гладкой кривой. Если $u(t)$ — гладкая кривая, то можно показать, что длина дуги ее вычисляется, как и в пространстве E^m, по формуле

$$s = \int_0^t |u'(\sigma)|\, d\sigma.$$

Отсюда видно, что если параметром в параметрическом представлении кривой является длина дуги, то $|u'(t)| = 1$. Справедливо и обратное утверждение.

Например, если $U = L_2[0, 1]$, где $L_2[0, 1]$ есть пространство функций, интегрируемых с квадратом, то для гладкой кривой $u(s, \sigma)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ выполняется соотношение

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial s}(s, \sigma)\right)^2 ds = 1, \quad \text{где} \quad \frac{\partial u}{\partial s}(s, \sigma) = u'(s).$$

Этот факт весьма важен для применения метода наискорейшего спуска к задаче минимизации функционала.

Важным понятием в методе наискорейшего спуска является также понятие *производной Фреше*. Мы дадим здесь определение этого понятия в форме, достаточно общей для наших целей. Обозначим через $\mathscr{H}$ действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$; пространство действительных чисел обозначим символом R. Пусть C есть некоторая функция $C: \mathscr{H} \to R$, и пусть $u_0, h \in \mathscr{H}$. Говорят, что функция C имеет *дифференциал Фреше* (или сильный дифференциал) $C'(u_0)h$, если существует такой непрерывный линейный функционал $C'(u_0)$ на $\mathscr{H}$, что

$$|C(u_0 + h) - C(u_0) - C'(u_0)h| = o(\|h\|),$$

при $\|h\| \to 0$, где $\|h\| = (\langle h, h \rangle)^{1/2}$. Функция $g(h)$ обозначается символом $o(\|h\|)$, если $\frac{|g(h)|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Линейный функционал $C'(u_0)$ называется *производной Фреше* функции C в точке u_0. Выражение

$$DC(u_0, h) = \frac{\partial C}{\partial \lambda}(u_0 + \lambda h)\Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{C(u_0 + \lambda h) - C(u)}{\lambda},$$

если оно существует, называется *производной по направлению*, или *слабым дифференциалом* функции C в точке u_0. Если слабый дифференциал обладает некоторыми определенными свойствами, то $DC(u_0, h) = C'(u_0)h$, что дает возможность вычислить производную Фреше. Эти свойства выражаются следующей теоремой:

Теорема 1. *Если производная по направлению $DC(u, h)$ существует при $\|u - u_0\| \leqslant \alpha$, $\alpha > 0$, и если она равномерно непрерывна по u и непрерывна по h, то тогда существует дифференциал Фреше, и $C'(u)h = DC(u, h)$. (Доказательство см. в главе 6 книги Люстерника и Соболева.)*

Аналогично определяются производные Фреше высших порядков. Обозначим через $\mathscr{H}^*$ банахово пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{H}$ с нормой $|\cdot|_1$. Говорят, что функция C, имеющая производную Фреше, имеет второй дифференциал Фреше $C''(u_0)h$, если

$$|C'(u_0 + h) - C'(u_0) - C''(u_0)h|_1 = o(\|h\|)$$

при $\|h\| \to 0$. $C''(u_0)$ есть непрерывный линейный оператор, переводящий $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}^*$. Применив теорему 1, можно показать, что если вторая производная по направлению

$$\frac{\partial^2 C}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2}(u_0+\lambda_1 h+\lambda_2 h_1)\Big|_{\substack{\lambda_1=0\\ \lambda_2=0}}, \ u_0, \ \lambda, \ h_1 \in \mathcal{H}$$

удовлетворяет всем условиям непрерывности, то

$$(C''(u_0)\,h_1)\,h = \frac{\partial^2 C}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2}(u_0+\lambda_1 h+\lambda_2 h_1)\Big|_{\substack{\lambda_1=0\\ \lambda_2=0}}.$$

Оператор $C''(u)$ называется *второй производной Фреше.*

Пусть функция C удовлетворяет тем же условиям, что и раньше, и предположим, что она обладает непрерывными первой и второй производной Фреше в $\mathcal{H}$. Первая производная Фреше есть линейный функционал на $\mathcal{H}$, и по теореме Рисса имеет представление

$$C'(u)\,h = \left\langle \frac{\partial C}{\partial u}(u), \ h \right\rangle, \quad h \in \mathcal{H},$$

где $(\partial C/\partial u)(u)$ — однозначно определенный элемент $\mathcal{H}$. Элемент $(\partial C/\partial u)(u)$ называется *градиентом функции C в точке u*. Это определение совпадает с определением градиента в пространстве конечной размерности E^n. Поскольку $C''(u)\,h$ есть также непрерывный линейный функционал на $\mathcal{H}$, то по теореме Рисса

$$(C''(u)\,h)\,h = \langle H_C(u)\ h, \ h\rangle,$$

где $H_C(u)$ есть непрерывный линейный оператор на $\mathcal{H}$. $H_C(u)$ называется *гессианом* функции C в точке u. Для пространств конечной размерности $H_C(u)$ сводится к симметрической матрице вторых частных производных функции C.

Основным пространством в наших рассуждениях до сих пор было гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Это требование можно несколько ослабить. Пусть U — линейное топологическое пространство с определенным на нем скалярным произведением $\langle\cdot, \cdot\rangle$; обозначим через $\overline{U}$ его пополнение в метрике $d(u, y) = \|u-y\| = \langle u-y, \ u-y\rangle^{1/2}$. Пусть C — действительная функция на U, имеющая производную Фреше $C'(u)$. По теореме Рисса о представлении существует единственный элемент $C_u \in \overline{U}$, такой, что $C'(u)\,h = \langle C_u, \ h\rangle$, $h \in \overline{U}$. Если $C_u \in U$, то C_u называется градиентом функции C и $(\partial C/\partial u)(u) = C_u$. Функция C может не обладать градиентом для каждого $u \in \overline{U}$. Поэтому в пространстве U часто приходится заменять имеющуюся там норму более слабой и рассматривать пополнение пространства U по этой норме. При этом новая норма выбирается так, чтобы функция C имела градиент в любой точке u из пополнения. Так, например, вместо банахова пространства действительных

непрерывных функций на интервале I удобнее рассматривать его пополнение по норме

$$\left(\int_I u^2 d\mu\right)^{1/2},$$

т. е. гильбертово пространство интегрируемых с квадратом по Лебегу функций со скалярным произведением $\int_I uy\, d\mu$.

Будем теперь рассматривать метод наискорейшего спуска для функций, определенных на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть C—действительнозначная функция, определенная на $\mathscr{H}$, и имеющая непрерывную первую производную Фреше. Пусть $u_1 \in \mathscr{H}$, и пусть γ—гладкая кривая в $\mathscr{H}$, проходящая через u_1. Если за параметр принять длину дуги кривой, то $\| u'(s) \|^2 = 1$ и

$$\frac{dC}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{C(u(s+\Delta s)) - C(u(s))}{\Delta s} = \left\langle \frac{\partial C}{\partial u}(u(s)),\ u'(s) \right\rangle.$$

Направление наискорейшего спуска есть направление, минимизирующее функционал

$$\left\langle \frac{\partial C}{\partial u}(u_1),\ u'(0) \right\rangle$$

при ограничении

$$\| u'(0) \|^2 = 1.$$

Здесь мы умышленно сохранили обозначения, использованные нами в конечномерном случае, так как все сформулированные выше результаты для E^n переносятся и на бесконечномерный случай, конечно, в соответствующей интерпретации. Траектория наискорейшего спуска находится как решение дифференциального уравнения

$$\frac{du}{d\sigma} = -\frac{\partial C}{\partial u}(u), \quad u(0) = u_1 \in \mathscr{H},\ \sigma \geqslant 0.$$

Решение является функцией со значениями в $\mathscr{H}$, и вдоль этой траектории функция $C(u(\sigma))$ убывает, так как

$$\frac{dC}{d\sigma} = \left\langle \frac{\partial C}{\partial u},\ \frac{du}{d\sigma} \right\rangle = -\left\| \frac{\partial C}{\partial u}(u(\sigma)) \right\|^2 < 0$$

при $\partial C/\partial u \neq 0$. Это вытекает из следующих теорем, принадлежащих Розенблюму. В этих теоремах C есть действительнозначная функция, определенная на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Теорема 2. *Пусть функция C имеет две непрерывные производные Фреше в некоторой выпуклой области D пространства $\mathscr{H}$, и пусть сфера $S(u) = \{u \mid u \in \mathscr{H},\ \| u - u_0 \| \leqslant a \mid A\}$, где $a = \left\| \frac{\partial C}{\partial u}(u_0) \right\|$, а константа A определяется ниже, содержится в D. Далее, предположим, что*

$$\langle H_C(u) v,\ v \rangle \geqslant A \| v \|^2,$$

при $u \in D$, $v \in \mathscr{H}$ *и фиксированном* $A > 0$, *и что функция* $u(\sigma)$ *удовлетворяет уравнению*

$$(*) \qquad \frac{du}{d\sigma}(\sigma) = -\frac{\partial C}{\partial u}(u(\sigma))$$

(*для* $\sigma \geqslant 0$, $u(0) = u_0 \in D$). $H_C(u)$ *есть гессиан функции* C *в точке* u. *Тогда*:

a) *в* $\mathscr{H}$ *существуют пределы*: $\lim\limits_{\sigma \to \infty} u(\sigma) = u_\infty$;

b) $\lim\limits_{\sigma \to \infty} C(u(\sigma)) = c$;

и, кроме того,

c) $\| u(\sigma) - u_\infty \| \leqslant (a/A) \exp(-A\sigma)$,

$$0 \leqslant C(u(\sigma)) - c \leqslant \frac{a^2}{2A} \exp(-2A\sigma),$$

и для всех $u \in D$

$$C(u) \geqslant c + \frac{A}{2} \| u - u_\infty \|^2.$$

Таким образом, если выполнены все предположения теоремы 2 то метод наискорейшего спуска гарантирует экспоненциальную сходимость соответствующей последовательности значений функции C к минимальному значению. Из пункта a) следует, что минимизирующий элемент определен однозначно. Заметим также, что решение уравнения (*) должно существовать при всех неотрицательных σ, что в некоторых случаях довольно сложно проверить. В статье Розенблюма получено несколько достаточных условий существования решения для всех σ. Одно из наиболее простых условий состоит в том, чтобы производная $\partial C/\partial u$ удовлетворяла условию Липшица внутри шара $S(u)$, откуда следует, что

$$\lim_{\sigma \to \infty} \left\| \frac{\partial C}{\partial u}(u(\sigma)) \right\| = 0.$$

Метод наискорейшего спуска может быть использован для решения некоторых изопериметрических задач. Для простоты рассмотрим задачу нахождения минимума функции C на $\mathscr{H}$, при дополнительном условии $g = 0$. Траектория наискорейшего спуска определяется из уравнений

$$(**) \qquad \frac{du}{d\sigma} = -\frac{\partial C}{\partial u} + \lambda(u) \frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \lambda(u) = \frac{\left\langle \frac{\partial C}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\|^2}$$

при условии, что $\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\| \neq 0$. При таком выборе траектории

$$\frac{dC}{d\sigma} = -\left\{ \frac{\left\| \frac{\partial C}{\partial u} \right\| \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\| - \left\langle \frac{\partial C}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\|^2} \right\} < 0, \qquad \frac{dg(u)}{d\sigma} = 0.$$

Следующая теорема, также принадлежащая Розенблюму, дает достаточные условия для того, чтобы метод наискорейшего спуска определял единственное решение этой задачи.

Теорема 3. *Пусть функции C и g имеют по две непрерывные производные Фреше в некоторой выпуклой области D пространства $\mathscr{H}$, и пусть $\mathscr{M}$ есть многообразие, определенное равенством $g(u)=0$, $u \in D$. Предположим, что $\partial g/\partial u \neq 0$ на $\mathscr{M}$ и что*

$$\langle (H_C(u) - \lambda(u) H_g(u)) v, v \rangle \leqslant A \| v \|^2, \quad A > 0$$

при $u \in \mathscr{M}$, $v \in \mathscr{H}$, $\langle \partial g(u)/\partial u, v \rangle = 0$. Пусть $k(u)$ — расстояние от точки u до границы многообразия $\mathscr{M}$, и пусть E — множество точек $u_0 \in \mathscr{M}$ таких, что

$$a(u_0) = \left\| \frac{\partial C(u)}{\partial u} - \lambda(u_0) \frac{\partial g(u_0)}{\partial u} \right\| < Ak(u_0),$$

и таких, что решение системы (**) при $u(0)=u_0$ существует при всех $\sigma \geqslant 0$. Тогда для всех $u_0 \in E$ решение $u(\sigma)$ обладает всеми свойствами, сформулированными в теореме 2. Более того, если точки u_0 и $\tilde{u}_0$ из E можно соединить дугой класса C^1 в E, то $u_\infty = \tilde{u}_\infty$, и, наконец, если $c = \lim\limits_{\sigma \to \infty} C(u(\sigma))$ при $u(0)=u_0 \in E$, то

$$C(u_0) \geqslant c + \frac{4A^2\delta^3}{27a}\left(1 + \frac{A\delta}{3a}\right), \quad \delta = \| u_0 - u_\infty \|, \quad a = a(u_0).$$

Теорема верна и при наличии нескольких дополнительных условий.

До сих пор мы занимались вопросом о том, как построить траекторию наискорейшего спуска, базируясь на локальной градиентной информации относительно функции (или функционала) $C(u)$. Пользуясь такой информацией, можно получить решение дифференциального уравнения, дающее траекторию наискорейшего спуска, в конечномерном случае с помощью аналоговой вычислительной машины. Однако чаще применение метода наискорейшего спуска осуществляется с помощью цифровых вычислительных устройств. При этом итерация производится по формуле

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k \nabla C(u_k), \quad \rho_k > 0,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, машина вычисляет изменение u на $k+1$-м шаге, в зависимости от первоначального значения u и от значения градиента ∇C на k-м шаге. Результаты применения этого метода можно найти в работах Голдстайна (Goldstein).

На этом мы закончим введение в метод наискорейшего спуска и приступим к приложениям этого метода в задачах оптимального управления.

А2. Применение метода наискорейшего спуска к задачам оптимального управления и формулировка вычислительных алгоритмов

В этом разделе мы займемся применением метода наскорейшего спуска к задачам оптимального управления. Вначале, в примерах 1—3, будет показано, что метод наискорейшего спуска можно считать конструктивным подходом к задачам оптимального управления, удовлетворяющим, например, необходимым условиям, типа тех, которые выводятся из принципа максимума. Затем в примерах 4—7 мы покажем, как можно получить вычислительные алгоритмы для отыскания оптимальных управлений. Один из подходов — прямой, в другом используется принцип максимума, с помощью которого определяется вид оптимального управления как функции от параметров, а затем система параметров корректируется методом наискорейшего спуска. Примеры 4—7 доводятся лишь до той стадии, когда становится ясным соответствующий алгоритм вычислений на машине, и поэтому не могут считаться завершенными.

Пример 1. Рассмотрим линейную управляемую систему первого порядка,

$$\dot{x} = ax + u(t),$$

со скалярным управлением $u(t)$ и фундаментальной матрицей $\Phi^{-1}(t) = e^{at}$ на интервале $[0, T]$ с $x(0) = 0$, $\Phi(0) = 1$ и фиксированным $T > 0$. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы перевести систему из точки $x(0) = x_0 = 0$ в точку $x = \Phi^{-1}(T)c$ для некоторого постоянного c, за время T, с минимальным значением критерия качества

$$C(u) = \int_0^T (u(t))^2 \, dt.$$

Как и в аналогичных задачах главы 3, потребуем, чтобы $u \in L_2[0, T]$, где $L_2[0, T]$ обозначает гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на интервале $[0, T]$. Таким образом, задача состоит в минимизации выражения

$$\int_0^T u^2(t) \, dt$$

при ограничении

$$\int_0^T \Phi(t) u(t) \, dt = c,$$

где u — скалярная функция из $L_2[0, T]$, $\Phi(t) \in L_2[0, T]$, а c — заданная константа. Если $c=0$, то $u=0$ есть оптимальное решение. Заметим, что $\|\Phi\| \neq 0$. В обозначениях теорем 2 и 3 имеем

$$C(u)=\int_0^T u^2(t)\,dt; \quad g(u)=\int_0^T \Phi(t)\,u(t)\,dt-c.$$

Вычислим теперь градиенты функций C и g. Рассмотрим их производные по направлению

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda}(u+\lambda z)\bigg|_{\lambda=0}=\int_0^T 2u(t)\,z(t)\,dt,$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(u+\lambda z)\bigg|_{\lambda=0}=\int_0^T \Phi(t)\,z(t)\,dt, \qquad z \in L_2[0, T].$$

В силу того, что ограниченные линейные функционалы на $L_2[0, T]$ обладают представлением $\int_0^T \psi(t)\,z(t)\,dt$ для некоторого фиксированного $\psi \in L_2[0, T]$, то мы видим, что

$$\frac{\partial C}{\partial u}=2u \quad \text{и} \quad \frac{\partial g}{\partial u}=\Phi.$$

Для того чтобы вычислить гессианы функций C и g, рассмотрим их вторые производные по направлению

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \lambda^2}(u+\lambda z)\bigg|_{\lambda=0}=\int_0^T 2z^2(t)\,dt,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}(u+\lambda z)\bigg|_{\lambda=0}=0.$$

Гессиан функции C является непрерывным линейным оператором

$$H_C(u)\,z=2z, \quad z \in L_2[0, T],$$

а гессиан функции g есть нулевой оператор

$$H_g(u)\,z=0, \quad z \in L_2[0, T].$$

Покажем теперь, что выполнены условия теоремы 3. Поскольку

$$\langle (H_C(u)-\lambda(u)\,H_g(u))\,v,\ v\rangle=\langle H_C(u)\ v,\ v\rangle=2\|v\|^2,$$

то $A=2$. Если точки u_0 и $\tilde{u}_0$ принадлежат E, т. е., если

$$\int_0^T \Phi(t)\,u_0(t)\,ds=c, \quad \int_0^T \Phi(t)\,\tilde{u}_0(t)\,dt=c,$$

то функция $\hat{u}=\mu u_0+(1-\mu)\tilde{u}_0$, $0\leqslant\mu\leqslant 1$, представляет собой кривую класса C^1 в E, соединяющую точки u_0 и $\tilde{u}_0$. Следовательно, если решение существует, то оно единственно.

Множество $B=\left\{u \mid u\in L_2[0,\ T],\ \int\limits_0^T \Phi(t)\,u(t)\,dt=c\right\}$ представляет собой гиперплоскость, и значит, условие

$$a(u_0)<Ak(u_0)$$

теоремы 3 выполняется для любого элемента из многообразия $\mathscr{M}$ (см. теорему 3). Функция u_0, удовлетворяющая уравнению $g(u_0)=0$, может быть найдена из определенного выше уравнения, если использовать ступенчатые функции.

Дифференциальное уравнение, определяющее функцию $u(\sigma)$ из теоремы 3, имеет вид

$$\frac{du}{d\sigma}=-2u+\lambda(u)\,\Phi,\quad u(0)=u_0,\quad \sigma\geqslant 0.$$

Но поскольку

$$\lambda(u)=\frac{\left\langle \dfrac{\partial C}{\partial u},\ \dfrac{\partial g}{\partial u}\right\rangle}{\|\Phi\|^2}=\frac{2\int\limits_0^T \Phi(t)\,u(t)\,dt}{\|\Phi\|^2}=\frac{2c}{\|\Phi\|^2},$$

то

$$\frac{du}{d\sigma}(t,\ \sigma)=-2u(t,\ \sigma)+\frac{2c}{\|\Phi\|^2}\Phi(t),$$
$$0\leqslant t\leqslant T,\quad 0\leqslant\sigma,\quad u(t,\ 0)=u_0(t).$$

Решение этого линейного уравнения дается выражением

$$u(t,\ \sigma)=e^{-2\sigma}u_0(t)+\frac{c\Phi(t)}{\|\Phi\|^2}(1-e^{-2\sigma}).$$

Таким образом, по теореме 3, единственным минимизирующим элементом является

$$u_\infty(t)=\frac{c}{\|\Phi\|^2}\Phi(t),$$

а $C(u_\infty)=c^2$. Этот же результат можно получить, используя необходимые условия, вытекающие из принципа максимума так же, как в главе 3.

Пример 2. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x}^1=ax^1+u(t),\quad \dot{x}^2=bx^2+u(t)$$

со скалярным управлением $u(t)$ и $a\neq b$. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы перевести систему с выходом $x^1(t)$ из точки $x^1(0)=0$ в точку $x^1=\Phi_1^{-1}(T)\,c$, для некоторого

постоянного c, при минимальном значении критерия качества

$$C(u)=\left(\int_0^T \Phi_2(t)\,u(t)\,dt\right)^2+\int_0^T (u(t))^2\,dt,$$

где T —-фиксированное положительное число, а фундаментальная матрица

$$\psi(t)=\begin{bmatrix}\Phi_1^{-1}(t) & 0,\\ 0 & \Phi_2^{-1}(t)\end{bmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$\psi(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы рассматриваем здесь задачу минимизации функционала

$$\left(\int_0^T \Phi_2(t)\;u(t)\,dt\right)^2+\int_0^T u^2(t)\,dt$$

при дополнительном ограничении

$$\int_0^T \Phi_1(t)\,u(t)\,dt=c.$$

Функции $\Phi_2(t)$ и $\Phi_1(t)$ принадлежат пространству $L_2[0,\ T]$, $\Phi_1\neq\Phi_2$ и $\|\Phi_1\|\neq 0$. Здесь $C(u)=\left(\int_0^T \Phi_2(t)\,u(t)\,dt\right)^2+\int_0^T u^2(t)\,dt$; обозначая $g(u)=\int_0^T \Phi_1(t)\,u(t)\,dt-c$, вычислим производные функций C и g по направлению:

$$\frac{\partial C}{\partial u}=2\int_0^T \Phi_2(\tau)\,u(\tau)\,d\tau\,\Phi_2(t)+2u(t)$$

и

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\Phi_1(t).$$

Аналогичное вычисление показывает, что

$$H_C(u)\,z=2\int_0^T \Phi_2(\tau)\,z(\tau)\,d\tau\,\Phi_2(t)+2z(t),$$

$$H_g(u)\,z=0,\quad z\in L_2[0,\ T].$$

Поскольку

$$\langle (H_C(u) - \lambda(u) H_g(u)) v, v\rangle = \\ = 2\left(\int_0^T \Phi_2(\tau) v(\tau)\, d\tau\right)^2 + 2\langle v, v\rangle \geqslant 2\langle v, v\rangle,$$

то, пользуясь теоремой 3, заключаем, что единственное оптимальное решение может быть найдено из дифференциального уравнения

$$\frac{du}{d\sigma} = -\frac{\partial C}{\partial u} + \lambda(u)\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \text{где} \quad u(0) = u_0, \quad \sigma \geqslant 0,$$

$$\lambda(u) = \frac{2c + 2\langle \Phi_2, \Phi_1\rangle \int_0^T \Phi_2(\tau)\, u(\tau, \sigma)\, d\tau}{\|\Phi_1\|^2},$$

которое может быть приведено к виду

$$\frac{du}{d\sigma}(t, \sigma) = -2u(t, \sigma) - 2\int_0^T \Phi_2(\tau)\, u(\tau, \sigma)\, d\tau\, \Phi_2(t) + \\ + \left\{2\langle \Phi_2, \Phi_1\rangle \int_0^T \Phi_2(\tau)\, u(\tau, \sigma)\, d\tau + 2c\right\} \frac{\Phi_1(t)}{\|\Phi_1\|^2},$$

$$u(t, 0) = u_0(t), \quad \sigma \geqslant 0.$$

Это дифференциальное уравнение имеет единственное решение при всех $\sigma \geqslant 0$, поскольку оно удовлетворяет условию Липшица в $L_2[0, T]$. Пользуясь теоремой 3, находим единственное оптимальное решение $\hat{u}(t)$ нашей задачи. Пользуясь неравенством Шварца и учитывая замечание, сделанное после теоремы 2, получаем

$$\hat{u}(t) = \left\{\frac{\langle \Phi_2, \Phi_1\rangle}{\langle \Phi_1, \Phi_2\rangle}\Phi_1(t) - \Phi_2(t)\right\} \int_0^T \Phi_2(\tau)\, \hat{u}(\tau)\, d\tau + \frac{c\Phi_1(t)}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}.$$

Остается вычислить интеграл $\int_0^T \Phi_2(t)\, \hat{u}(t)\, dt$. Функция

$$u(t, \beta) = \left\{\frac{\langle \Phi_2, \Phi_1\rangle}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}\Phi_1(t) - \Phi_2(t)\right\}\beta + \frac{c\Phi_1(t)}{\langle \Phi_1, \Phi_1\rangle}$$

определяет аналитическое семейство кривых в $L_2[0, T]$, удовлетворяющее условию $g(u(t, \beta)) = c$ при всех действительных β. Существует значение β, которое мы обозначим через β_0, такое, что $\beta_0 = \langle \Phi_2, \hat{u}\rangle$. Это значение β_0 получается минимизацией

выражения $C(u(t, \beta))$ как функции от β. Полагая

$$u(t, \beta) = (\zeta\Phi_1(t) - \Phi_2(t))\beta + \hat{c}\Phi_1(t),$$

где

$$\zeta = \frac{\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle}{\langle\Phi_1, \Phi_1\rangle}, \quad \hat{c} = \frac{c}{\langle\Phi_1, \Phi_1\rangle},$$

получаем, что

$$\beta_0 = \frac{-\hat{c}\langle\Phi_2, \Phi_1\rangle}{\zeta\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle - \langle\Phi_2, \Phi_2\rangle} = \frac{c}{\|\Phi_2\|^2\|\Phi_1\|^2 - \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle^2}.$$

Знаменатель этого выражения не равен нулю, поскольку функции Φ_2 и Φ_1 не совпадают. Оптимальное решение дается формулой

$$\hat{u}(t) = \frac{-c}{G}\Phi_2(t) + \left\{\frac{\langle\Phi_2, \Phi_1\rangle + G}{G}\right\}\frac{c}{\|\Phi_1\|^2}\Phi_1(t),$$

где

$$\|\Phi_2\|^2\|\Phi_1\|^2 - \langle\Phi_2, \Phi_1\rangle^2 = G.$$

Пример 3. *Обобщение примеров* 1 и 2. Мы будем рассматривать линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

где $B(t)$ и $A(t)$ — непрерывные $n\times m$ и $n\times n$-матрицы соответственно, определенные на некотором конечном интервале $[t_0, T]$. Не теряя общности, можно считать, что $t_0 = 0$. Вектор состояния системы $x(t)$ — n-мерный вектор с начальным значением $x(0) = x_0$, а u — ограниченный и измеримый m-мерный вектор, который представляет управляющее воздействие в системе. Критерий качества имеет вид

$$C(u) = g(x(T)) + \int_0^T u'(s)U(s)u(s)\,ds,$$

где $g(x(T))$ — действительная выпуклая функция, определенная на R^n, а $U(t)$ — непрерывная на отрезке $[0, T]$, симметричная и положительно определенная матрица. Надо минимизировать функционал $C(u)$, где $u \in L_2[0, T]$, а функция $x(t)$ удовлетворяет записанному выше дифференциальному уравнению. В некоторых задачах с фиксированными концами задаются еще дополнительные ограничения. Этот тип задач управления подробно рассматривался в главе 3. Сейчас мы рассмотрим несколько случаев, чтобы показать возможность использования метода наискорейшего спуска для решения такого рода задач.

Случай 1. Требуется минимизировать функционал

$$C(u) = \int_0^T u'(s)U(s)u(s)\,ds, \quad u \in L_2[0, T],$$

при условии на конце

$$x(T) = \hat{x}.$$

Можно считать, что $U(t) \equiv I$, ибо общий случай всегда можно свести к этому заменой управляющих переменных, для чего достаточно ввести новое скалярное произведение $\int u' U(t) v$. К сожалению, нельзя утверждать, что данная задача обладает хотя бы одним решением. Поэтому мы введем дополнительное предположение об управляемости системы, т. е. будем считать, что система может быть переведена в любое наперед заданное конечное состояние из R^n за время T с помощью ограниченного измеримого управления u. Система $\mathscr{L}$ обладает свойством управляемости на интервале $[0, T]$ тогда и только тогда, когда матрица

$$M(T) = \int_0^T \Phi^{-1}(t) B(t) B'(t) (\Phi^{-1}(t))' \, dt$$

имеет ранг n. Здесь $\Phi(t)$ есть фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t) x$ с начальным условием $\Phi(0) = I$. Доказательство имеется в главе 3. Решение, соответствующее любому ограниченному измеримому u, полученное с помощью формулы вариации произвольных постоянных имеет вид

$$x(t) = \Phi(t) x_0 + \int_0^t \Phi(t, s) B(s) u(s) \, ds,$$

где $\Phi(t, s) = \Phi(t) \Phi^{-1}(s)$, и таким образом, граничное условие можно записать в виде

$$\int_0^T \Phi(T, s) B(s) u(s) \, ds = \hat{x} - \Phi(T) x_0.$$

Для решения этой задачи методом наискорейшего спуска обозначим через $\mathscr{H}$ прямую сумму гильбертовых пространств $L^2[0, T] \oplus \oplus L^2[0, T] \oplus \ldots \oplus L^2[0, T]$. Элементами пространства $\mathscr{H}$ являются векторы $u = (u_1, \ldots, u_m)'$, а скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ определяется формулой

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_1^m \langle u_i, v_i \rangle = \int_0^T u' v \, dt.$$

Пусть $\psi_k(s)$ есть k-я строка матрицы $\Phi(T, s) B(s)$, а α_k — k-я компонента вектора $\hat{x} - \Phi(T) x_0$. Тогда задача сводится к минимизации функционала

$$C(u) = \int_0^T u' u \, dt$$

при ограничениях

$$g_k(u)=0, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $g_k(u)=\int\limits_0^T \psi_k(t)\,u(t)\,dt-\alpha_k$. Легко показать, что

$$\frac{\partial C}{\partial u}=2u, \quad \frac{\partial g_k}{\partial u}=\psi_k', \qquad k=1,\ \ldots,\ n,$$

$$H_C(u)\,z=2z, \quad z\in\mathscr{H}, \quad H_g(u)=0$$

и, следовательно, задача решается применением теорем 2 и 3 для случая нескольких дополнительных ограничений, при условии, что матрица Грама $G=(\langle\psi_j,\ \varphi_k\rangle_1)$ не вырождена. Можно показать, что

$$G=\Phi(T)\,M(T)\,\Phi'(T),$$

где матрица $M(T)$ определена выше, и значит, матрица G невырождена. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{d\sigma}=-2u+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\psi_k', \quad u(0)=u_0, \quad \sigma\geqslant 0,$$

где $G\lambda=c$,

$$c=\begin{bmatrix}\left\langle\frac{\partial C}{\partial u},\ \frac{\partial g_1}{\partial u}\right\rangle_1\\ \vdots\\ \left\langle\frac{\partial C}{\partial u},\ \frac{\partial g_n}{\partial u}\right\rangle_1\end{bmatrix}=2\alpha.$$

Переписывая это уравнение, получим

$$\frac{du}{d\sigma}(t,\ \sigma)=-2u(t,\ \sigma)+2B'(t)\,\Phi'(T,\ t)\,G^{-1}\alpha.$$

Решив это дифференциальное уравнение и устремив $\sigma\to\infty$, получим оптимальное управление в виде

$$u_\infty(t)=B'(t)\,\Phi'(T,\ t)\,G^{-1}\alpha=B'(t)\,\Phi'(T,\ t)\,G^{-1}(\hat{x}-\Phi(T)\,x_0).$$

Этот результат вполне совпадает с результатом, полученным в главе 3 с помощью принципа максимума.

Случай 2. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$C(u)=x_u'(T)\,Gx_u(T)+\int\limits_0^T u'u\,ds, \quad u\in\mathscr{H},$$

где

$$x_u(T)=\Phi(T)\,x_0+\int\limits_0^T \Phi(T,\ s)\,B(s)\,u(s)\,ds$$

и $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, такое же, как в примере 1. G — симметричная постоянная положительно определенная матрица размера $n \times n$. Градиент функции C равен

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 2B'(t)\,\Phi'(T,\ t)\,Gx_u(T) + 2u,$$

а гессиан имеет вид

$$H_C(u)\,z = 2z(s) + \left(\int_0^T \Phi(T,\ \tau)\,B(\tau)\,z(\tau)\,d\tau\right)' G\Phi(T,\,s)\,B(s),$$
$$z \in \mathscr{H}.$$

Более того, $\langle H_C(u)\,z,\ z\rangle_1 \geqslant 2\langle z,\ z\rangle_1$; следовательно, по теореме 2, требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{d\sigma}(t,\ \sigma) = -2u(t,\ \sigma) -$$
$$-2B'(t)\,\Phi'(T,\ t)\,G\left(\Phi(T)\,x_0 + \int_0^T \Phi(T,\ s)\,B(s)\,u(s,\ \sigma)\,ds\right),$$
$$u(t,\ 0) = 0.$$

Поскольку правая часть удовлетворяет условию Липшица, то решение должно существовать при всех $\sigma \geqslant 0$. Единственное оптимальное решение $\hat{u}$ дается формулой (см. теорему 2)

$$\hat{u}(t) = -B'(t)\,\Phi'(T,\ t)\,Gx_{\hat{u}}(T).$$

Произведя подстановку и некоторые вычисления, получим

$$\left(I + \int_0^T \Phi(T,\ s)\,B(s)\,B'(s)\,\Phi'(T,\ s)\,ds\,G\right) x_{\hat{u}}(T) = \Phi(T)\,x_0.$$

Поскольку матрица $I + \int_0^T \Phi(T,\,s)\,B(s)\,B'(s)\,\Phi'(T,\,s)\,ds\,G$ невырождена, можно найти $x_{\hat{u}}(T)$; тогда получим, что

$$\hat{u}(t) = -B'(t)\,\Phi'(T,\ t)\,G\,(I + \Phi(T)\,M(T)\,\Phi'(T)\,G)^{-1}\,\Phi(T)\,x_0.$$

Управление $\hat{u}(t)$ есть управление в виде разомкнутой цепи. Для данной задачи можно найти также и управление с обратной связью, или в виде замкнутой цепи с переменными коэффициентами усиления. Попытаемся найти матрицу $E(t)$, такую, чтобы $\hat{u}(t) = E(t)\,x(t)$, где $x(t)$ есть состояние системы в момент t. Запишем решение в виде

$$x(t) = \Phi(t)\,x_0 + \int_0^t \Phi(t,\ s)\,B(s)\,\hat{u}(s)\,ds =$$
$$= \Phi(t)\,x_0 - \int_0^t \Phi(t,\ s)\,B(s)\,B'(s)\,\Phi'(T,\ s)\,ds\,Gx_{\hat{u}}(T).$$

Имеем, далее,

$$x(t)=\Phi(t,\ T)\left(I+\int\limits_t^T \Phi(T,\ s)\,B(s)\,B'(s)\,\Phi'(T,\ s)\,ds\,G\right)x_{\hat{u}}(T).$$

Отсюда следует, что

$$u(t)=$$
$$=-B'(t)\,\Phi'(T,t)\left(I+\int\limits_t^T \Phi(T,\ s)\,B(s)\,B'(s)\Phi'(T,s)ds\,G\right)^{-1}\Phi(T,t)x(t).$$

Тем самым, матрица обратной связи $E(t)$ имеет вид

$$E(t)=$$
$$=-B'(t)\,\Phi'(T,t)\left(I+\int\limits_t^T \Phi(T,s)\,B(s)\,B'(s)\,\Phi'(T,\ s)\,ds\,G\right)^{-1}\Phi(T,\ t)$$

и решение, определенное с помощью $E(t)$, не зависит от начального условия x_0. Решение этой задачи было дано также в главе 3.

Пример 4. Рассмотрим автономную линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L})\qquad \dot{x}=Ax+bu(t),$$

где n-мерный вектор x описывает состояние системы, u — скалярная управляющая функция, удовлетворяющая ограничению $|u(t)|\leqslant 1$ на интервале $[0,\ T]$, а A и b — действительные постоянные матрицы размеров $n\times n$ и $n\times 1$ соответственно. Следующие ниже результаты легко распространяются на случай линейных уравнений с переменными коэффициентами, и с несколькими управляющими переменными.

Рассмотрим критерий качества $C(u)=g(x(T))=x'(T)\,\tilde{H}\,x(T)$, где $\tilde{H}=\tilde{H}'>0$. В главе 3 было показано, что многие задачи управления можно путем введения дополнительной координаты свести к задачам управления конечным состоянием.

Итак, нам надо найти управление $u^*(t)$, $t\in[0,\ T]$ так, чтобы конец соответствующей ему траектории $x_{u^*}(T)$ вышеуказанной системы $\mathscr{L}$ являлся бы точкой множества достижимости $K(T)$, ближайшей к началу координат, где расстояние определяется скалярным произведением $x'\tilde{H}x$. Здесь под множеством $K(T)$ понимается совокупность всех концов траекторий $x_u(t)$, исходящих из точки $x_0=x(0)$ и соответствующих всевозможным измеримым управлениям $u(t)$ на интервале $[0,\ T]$, удовлетворяющим ограничению $|u(t)|\leqslant 1$. Мы воспользуемся свойствами множества $K(T)$, установленными в главе 2.

Решение этой задачи может быть использовано и для некоторых других задач. Например, мы можем увеличивать T, начиная с $T=0$, пока функция ошибки $\mathscr{E}(x)=x'\tilde{H}x$ не обратится в нуль

в некоторой точке $x_u(T)$ множества достижимости $K(T)$. Определив этот момент, мы найдем решение задачи приведения системы в начало координат за минимальное время. Если же задача состоит в приведении системы в точку, как можно более близкую к некоторому выпуклому целевому множеству G за фиксированное время T, если множество G может быть задано приближенно с помощью квадратичной формы, т. е. G: $x'\tilde{H}x \leqslant c$, где $\tilde{H}=\tilde{H}'>0$, а c—константа, то для решения этой задачи нужно найти точку множества $K(T)$, для которой $x'\tilde{H}x$ минимально, где $x'\tilde{H}x$ есть функция расстояния. Задача оптимального по быстродействию приведения системы в заданную выпуклую цель G решается так же, как и задача оптимального по быстродействию приведения системы в начало координат: для этого надо представить приближенно множество G в виде G: $x'\tilde{H}x \leqslant c$ и затем увеличивать T, начиная с нуля до тех пор, пока функция ошибки $\mathscr{E}(x)=x'\tilde{H}x-c$ не обратится в нуль в некоторой точке множества достижимости $K(T)$.

Мы займемся сейчас нахождением точки $x_u^*(T)$ множества $K(T)$, ближайшей к началу координат в смысле расстояния $x'\tilde{H}x$, а также управления $u^*(t)$, порождающего соответствующую траекторию. Из главы 2 известно, что $K(T)$ есть компактное выпуклое подмножество пространства R^n для любой системы $\mathscr{L}$ указанного выше вида, причем множество $K(T)$ обладает внутренностью в R^n тогда и только тогда, когда $\det[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b] \neq 0$. Таким образом, если $K(T)$ не содержит начала координат, то в $K(T)$ имеется единственная точка x^*, в которой функция $g(x)=x'\tilde{H}x$ достигает минимального значения. Мы используем метод наискорейшего спуска для построения алгоритма нахождения оптимального управления $u^*(t)$, приводящего систему в точку $x_{u^*}(T)$. Итак, мы ищем семейство управлений $u_\sigma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, зависящее от некоторого параметра σ, такое, чтобы с ростом σ управление $u_\sigma(t)$ приближалось к искомому оптимальному управлению. Мы будем обозначать эту зависимость просто $u(t, \sigma)$ и отождествлять σ с временем счета на вычислительной машине.

Если отбросить ограничения на u, то траектории наискорейшего спуска в пространстве $\mathscr{H}$ с нормой $|\cdot|=\langle\cdot, \cdot\rangle^{1/2}$ найдутся из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma}(t, \sigma)=-k\frac{\partial g}{\partial x}(x(T, \sigma))'\,h(t), \quad \text{где} \quad h(t)=e^{A(T-t)}b,$$

а положительная константа k введена для того, чтобы учесть возможные изменения времени счета σ. Введем теперь ограничение $|u(t, \sigma)| \leqslant 1$, выбирая зависимость u от σ так, что при $\sigma \geqslant 0$

$$(***)\ \frac{\partial u}{\partial\sigma}(t, \sigma)=-k\frac{\partial g}{\partial x}(x(T, \sigma))'\,h(t), \quad \text{если} \quad |u(t, \sigma)|<1$$

или, если

$$u(t,\ \sigma)\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ \sigma))'\,h(t) > 0,$$

а в остальных случаях

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(t,\ \sigma) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предполагается, что начальное значение $u(t,\ 0)$ удовлетворяет ограничению $|u(t,\ 0)| \leqslant 1$.

При таком выборе зависимости u от σ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = -k\int\limits_{\mathcal{J}}\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ \sigma))'\,h(t)\right]^2 dt,$$

где

$$\mathcal{J} = \left\{t\ \middle|\ \frac{\partial u}{\partial \sigma}(t,\ \sigma) \neq 0,\ t \in [0,\ T]\right\}.$$

Заметим, что $\partial g/\partial\sigma \leqslant 0$. Предполагая, что множество $K(T)$ обладает внутренностью в R^n, покажем, что

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} < 0 \quad \text{всюду, кроме точки} \quad x(T,\ \sigma) = x^*$$

при указанном выборе зависимости u от σ. Предположим также, что $x = 0 \notin K(T)$. Пусть $\partial g/\partial\sigma = 0$ в точке $x(T,\ \sigma)$, лежащей внутри $K(T)$. Это может быть лишь в том случае, если

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ \sigma))'\,h(t) = 0$$

или

$$u(t,\ \sigma) = -\operatorname{sgn}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ \sigma))'\,h(t)\right\}$$

почти для всех $t \in \mathring{[0,\ T]}$ при $x = 0 \notin K(T)$. Как показано в главе 2, решение соответствующее максимизирующему управлению

$$u(t) = \operatorname{sgn}\{\eta(t)\,b\}$$

(где $\eta(t) = ce^{-At}$ — вектор-строка с n компонентами), является точкой из $\partial K(T)$ для любого $c \neq 0$. Но управление

$$u(t,\ \sigma) = -\operatorname{sgn}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ \sigma))'\,h(t)\right\} =$$

$$= -\operatorname{sgn}\{2x(T,\ \sigma)'\,\tilde{H}e^{AT}e^{-At}b\}$$

будет максимизирующим при $c = -2x(T,\ \sigma)'\,He^{AT}$. Таким образом, не существует точки внутри $K(T)$, в которой бы $\partial g/\partial\sigma = 0$, если $x = 0 \notin K(T)$.

Рассмотрим те точки границы $\partial K(T)$, где $\partial g/\partial\sigma=0$. Вновь видим, что это возможно лишь при

$$u(t,\ \sigma)=-\operatorname{sgn}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ \sigma))'\,h(t)\right\}$$

или

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ \sigma))'\,h(t)=0$$

для почти всех $t\in[0,\ T]$. А это есть максимизирующее управление, соответствующий которому конец траектории принадлежит множеству $\partial K(T)$, причем $\eta'(T)=e^{-A'T}c'$ есть внешняя нормаль к $K(T)$ в этой точке, как было показано в главе 2.

Таким образом, в точке $x(T,\ \sigma)$ из $\partial K(T)$ имеем

$$\eta'(T)=e^{-A'T}c'=e^{-A'T}(-2x(T,\ \sigma)'\,\tilde{H}e^{AT})'=-2\tilde{H}x(T,\ \sigma),$$

где $\eta'(T)$ — внешняя нормаль к $K(T)$. Но это может быть лишь в точке $x(T,\ \sigma)=x^*$, в которой вектор $\tilde{H}x$ нормален к поверхности $x'\,\tilde{H}x=x^{*\prime}\tilde{H}x^*=k^*$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что и в случае $x=0\in K(T)$ точка x^* есть единственная точка $K(T)$, в которой $\partial g/\partial\sigma=0$. Таким образом, оптимальное (предельное) управление по виду совпадает с тем, которое было получено в главе 2.

Займемся теперь вопросом приближенного решения уравнения (***) с помощью вычислительной машины. Один из путей состоит в замене дифференциального уравнения (***) с непрерывным параметром σ следующим рекуррентным уравнением (итерационным уравнением):

$$u(t,\ i+1)=u(t,\ i)-\bar{k}_i\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ i))'\,h(t),\quad \text{если}\quad |u(t,\ i)|<1$$

или если

$$u(t,\ i)\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\ i))'\,h(t)>0,$$

а в остальных случаях

$$u(t,\ i+1)=u(t,\ i),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

(здесь $\bar{k}_i>0$ выбирается так, чтобы $|u(t,\ i+1)|\leqslant 1$). Тогда зависимость от σ заменяется зависимостью от дискретного параметра $i=1,\ 2,\ \ldots$ Таким путем мы найдем последовательность управлений $u(t,\ i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots$, причем есть надежда, что $g(x(T,\ i))\to g(x^*)$ при возрастании i. Эти вычисления легко осуществить на аналого-цифровой вычислительной машине, причем имеется достаточно удачный опыт их осуществления (Хо; Гилберт).

Другой метод приближенных вычислений состоит в том, что оптимальное управление аппроксимируется ступенчатыми функциями, т. е. интервал от t_0 до T разбивается на конечное число

подынтервалов, на каждом из которых управление полагается постоянным. Затем указанным выше способом определяется наилучший набор таких постоянных. Для простоты предположим, что интервал $[t_0, T]$ разбит на ν одинаковых подынтервалов длины $(T-t_0)/\nu$. Пусть $u(0)$, $u(1)$, $\ldots$, $u(\nu-1)$ есть то множество постоянных, которое надо определить, где $u(j)$ — значение аппроксимирующей управляющей функции на интервале

$$t_0+j\frac{T-t_0}{\nu}\leqslant t\leqslant(j+1)\frac{T-t_0}{\nu}+t_0, \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu-1.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение относительно $u(t, \sigma)$ как функции σ в полосе $0=t_0\leqslant t\leqslant T$, заменяется конечной системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma}(j,\sigma)=-k\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\sigma))'\,\hat{h}(j), \quad \text{если} \quad |u(j,\sigma)|<1$$

или если

$$u(j,\sigma)\frac{\partial g}{\partial x}(x(T,\sigma))'\,\hat{h}(j)>0$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma}(j,\ \sigma)=0$$

в противном случае — для $j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu-1$. Здесь

$$x(T,\ \sigma)=e^{AT}x_0+e^{AT}\int\limits_0^T e^{-AT}bu(t,\sigma)\,dt=$$

$$=e^{AT}x_0+\sum_{i=0}^{\nu-1}\left[\int\limits_{iT/\nu}^{(i+1)\,T/\nu} e^{A(T-t)}b\,dt\right]u(i,\sigma)=$$

$$=e^{AT}x_0+\sum_{i\ 0}^{\nu-1}\hat{h}(i)\,u(i,\sigma)$$

Из этого последнего уравнения определяется $\hat{h}(i)$, представляющая собой весовую функцию для управлений на различных интервалах (мы выбрали $t_0=0$).

В том случае, когда управления принадлежат к классу ограниченных ступенчатых функций, определенных на ν подынтервалах интервала $[t_0, T]$, мы можем так же точно, как и для случая непрерывного времени, показать, что $\partial g/\partial\sigma\neq 0$ всюду, кроме точки $x^*\in K_\nu(T)$, где $K_\nu(T)$ — множество достижимости, а x^* — оптимальная точка этого множества.

Описанные выше вычисления легко осуществляются на аналоговой вычислительной машине. [Лю (Luh).]

Пример 5. Рассмотрим автономную управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x}=f(x,u), \quad x(0)=x_0,$$

где $f \in C^1$ в $R^n \times R^1$, а $u(t)$ — скалярные управления, удовлетворяющие ограничению $|u(t)| \leqslant 1$. Критерий качества имеет вид

$$C(u) = g(x(T)),$$

где $T > 0$ фиксировано и $g \in C^1$ в R^n.

Обозначим решение системы $\mathscr{S}$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, соответствующее управлению $u(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$ через $x_u(t)$. Мы можем также вычислить $C(u) = g(x_u(T))$, ибо известно, что точка $x_u(T)$ должна являться точкой множества достижимости $K(T)$, как схематично показано на рис. А2 для случая двух переменных. Вычисляя оптимальное управление, мы ищем траекторию, исходящую из заранее вычисленной начальной точки $x_u(T) \in K(T)$ и ведущую к таким точкам $x \in K(T)$, в которых $g(x)$ были бы меньше, чем $g(x_u) T))$. На самом деле мы стремимся найти путь к точке x^*, в которой функция g принимала бы наименьшее значение на $K(T)$. Ясно, однако, что минимальное значение может и не существовать, например, в том случае, если множество $K(T)$ не замкнуто. Тогда можно все же попытаться искать наилучшие управления, но при этом необходимо придумать условие, при выполнении которого процесс вычислений должен быть прекращен. Случай замкнутого множества $K(T)$ рассматривался в главах 4—6.

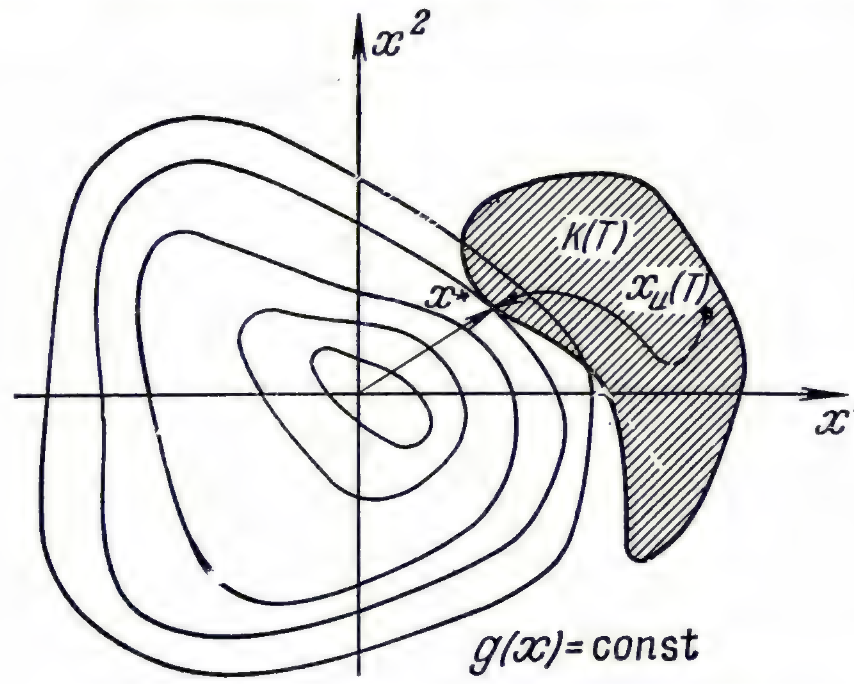

Рис. А2. Наискорейший спуск для нелинейных управляемых процессов.

Если u принимает значения из гильбертова пространства $\mathscr{H}$ с нормой $|\cdot| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ и на u не наложено никаких ограничений, то можно показать, что градиентное направление наискорейшего спуска в точке $u_0 \in \mathscr{H}$ определяется траекторией, начинающейся в точке u_0 и удовлетворяющей уравнению

$$\frac{du}{d\sigma} = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_u(T))' h(t),$$

где $h(t) = \Phi_u(T) \Phi_u^{-1}(T) B_u(t)$, а Φ_u есть решение линейного уравнения в вариациях

$$\dot{\Phi}_u(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_u(t), u(t)) \Phi_u(t)$$

с $\Phi_u(t_0) = I$ и $B_u(t) = (\partial f / \partial u)(x_u(t), u(t))$ на $[t_0, T]$.

Чтобы учесть ограничение $|u| \leqslant 1$, положим

$$(\dagger) \qquad \frac{\partial u}{\partial \sigma}(t, \sigma) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_u(T))' h(t), \quad \text{если} \quad |u(t, \sigma)| < 1$$

или если

$$u(t, \sigma)\frac{\partial g}{\partial x}(x_u(T))' h(t) > 0$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(t, \sigma) = 0,$$

в противном случае ($t_0 \leqslant t \leqslant T$, $\sigma \geqslant 0$); предполагается, что $|u(t, 0)| \leqslant 1$. Далее видим, что

$$\frac{dC}{d\sigma} = \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_u(T))' \frac{dx_u}{d\sigma} = -\int\limits_{\mathcal{J}} \left[\frac{\partial g'}{\partial x}(x_u(T))\, h(t)\right]^2 dt \leqslant 0,$$

где $\mathcal{J} = \{t \mid \partial u/\partial\sigma \neq 0,\ t \in [t_0, T]\}$. Поэтому есть надежда, что последовательность приближений, получаемых при решении уравнения ($\dagger$) на вычислительной машине, сходится. В работах Келли (Kelly) и Брайсона (Bryson) содержатся оценки эффективности этого алгоритма.

Пример 6. В этом примере, так же как и в следующем, мы будем применять результаты, полученные в главах 2, 3, 4 и 5, к различным задачам управления. При этом наши сведения об оптимальном управлении будут исчерпывающими лишь в том случае, когда известно начальное значение сопряженного решения. Для того чтобы получить решение, соответствующее этим условиям, мы будем строить функции таким образом, чтобы они достигали своих экстремальных значений при правильных начальных значениях сопряженных решений. Тем самым, задача сведется к рассмотренной в разделе А.1 задаче, где минимум (или максимум) функции, зависящей от конечного числа переменных, отыскивался с помощью метода наискорейшего спуска. Сейчас мы рассмотрим задачу об управлении, оптимальном по быстродействию. Однако результаты можно будет распространить и на задачи с другим критерием качества, а также на нелинейные задачи. (Нейштадт (Neustadt).)

Рассмотрим автономную линейную управляемую систему

$$(\mathscr{L}) \qquad \dot{x} = Ax + bu(t)$$

со скалярными управлениями $u(t)$, удовлетворяющими ограничению $|u(t)| \leqslant 1$. Ниже мы будем рассматривать и более общие линейные системы. Пусть задача состоит в приведении системы в начало координат за минимальное время, т. е. совпадает с задачей, рассмотренной в главе 2. В главе 2 для этой системы было найдено оптимальное управление, соответствующее любому начальному условию $\eta(t_0) = c$, где c — постоянная из некоторого

множества. В этом примере мы займемся отысканием этих постоянных. В задаче оптимального по быстродействию управления, приводящего систему в начало координат, требуется найти наименьшее $t > 0$, для которого уравнение

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-At'}bu(t')\,dt' = 0$$

удовлетворяется при некотором управлении $u(t')$ $(0 \leqslant t' \leqslant t)$, удовлетворяющем ограничению $|u(t')| \leqslant 1$ в каждой точке интервала $[0, t]$. Это требование можно записать так:

$$-x_0 = \int_0^t e^{-At'}bu(t')\,dt'$$

для некоторого допустимого $u(t')$, $0 \leqslant t' \leqslant t$. Пусть

$$C(t) = \left\{x \mid x = \int_0^t e^{-At'}bu(t')\,dt';\ u(t') \text{ — допустимое управление}\right\}$$

есть множество начальных состояний, исходя из которых система может достичь начала координат за время, меньшее, чем t. $C(t)$ есть просто особый вид множества достижимости, упоминавшийся в главе 2. На самом деле $C(t) = K(-t)$, с начальной точкой $x_0 = 0$. Поэтому $C(t)$ является замкнутым, выпуклым множеством в R^n, с границей

$$\partial C(t) = \left\{x \mid x = \int_0^t e^{-At'}b\,\mathrm{sgn}\,\{ce^{-At'}b\}\,dt',\ \ \|c\| = 1\right\}.$$

Более того, если $\zeta \in \partial C(t)$, а c' есть внешняя нормаль к $C(t)$ в точке ζ, и если система $\mathscr{L}$ нормальна, то множество $\partial C(t)$ не содержит никакого отрезка прямой. Заметим, что $C(t_2) \supset C(t_1)$, если $t_2 \geqslant t_1$ и $C(t)$ непрерывно возрастает с ростом t.

Предположим, что существует некоторое управление, переводящее систему из точки x_0 в точку 0 за конечное время; тогда существует и оптимальное по быстродействию управление вида

$$\mathrm{sgn}\,\{\eta(t)\,b\} = \mathrm{sgn}\,\{ce^{-At}b\},$$

переводящее систему из точки x_0 в 0, где c' есть внешняя нормаль к множеству $C(t^*)$ в точке $-x_0$. Обозначим через Z множество всех таких векторов c, где $\|c\| = 1$, исходящих из точки $-x_0 \in \partial C(t)$. Тогда, если $c \in Z$, то управление

$$u(t) = \mathrm{sgn}\,\{ce^{-At}b\}$$

переводит систему из состояния x_0 в начало координат и является оптимальным.

Пусть

$$z(t,\ c) = \int_0^t e^{-At'} b \operatorname{sgn}\{ce^{-At'}b\}\,dt'.$$

Тогда $z(t,\ c) \in \partial C(t)$, и следовательно, для нормальной системы имеем

$$cz(t,\ c) > c\zeta, \quad \zeta \in C(t), \quad \zeta \neq z(t,\ c).$$

Заметим, что

$$cz(t,\ c) = \int_0^t ce^{-At'} b \operatorname{sgn}\{ce^{-At'}b\}\,dt' = \int_0^t |ce^{-At'}b|\,dt' > 0 \text{ для } t > 0$$

и, значит, для нормальной системы $cz(t,\ c)$ есть монотонно возрастающая функция от t, непрерывная по c.

Рассмотрим (как это делает Нейштадт), функцию

$$\bar{f}(t,\ c,\ x_0) = c[z(t,\ c) + x_0],$$

непрерывную по t и c. При фиксированных $(x_0,\ c)$ она будет строго возрастающей по t, так как

$$\bar{f}(t,\ c,\ x_0) = \int_0^t |ce^{-At'}b|\,dt' + cx_0$$

строго возрастает по t. Рассмотрим теперь лишь те c, для которых $cx_0 = \bar{f}(0,\ c,\ x_0) < 0$. Если c не принадлежит множеству Z, то из условия, что $cz(t,\ c) > c\zeta$, для всех ζ из $C(t)$ следует, что $cz(t^*c) > -cx_0$ или $\bar{f}(t^*,\ C,\ x_0) > 0$, где t^* — оптимальное время. Следовательно, для некоторого единственного t из интервала $0 < t < t^*$ имеем

$$\bar{f}(t,\ c,\ x_0) = 0.$$

Обозначим это t через $T(c,\ x_0)$, так что для каждого c такого, что $cx_0 < 0$, будем иметь $\bar{f}(T(c,\ x_0),\ c,\ x_0) = 0$.

Поскольку функция $\bar{f}$ непрерывна по всем аргументам, то и функция T непрерывна по c. Следовательно, если $c \in Z$, то функция $T(c,\ x_0)$ принимает свое максимальное значение. Это и есть функция, которую нам придется максимизировать для получения требуемого c.

Для того чтобы найти вектор c, максимизирующий функцию $T(c,\ x_0)$, рассмотрим векторную функцию $c(\sigma)$, непрерывно зависящую от некоторого параметра σ и удовлетворяющую следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dc}{d\sigma} = k\frac{\partial T}{\partial c}, \quad \text{где } k > 0,$$

а $\partial T/\partial c$ есть соответствующий вектор градиента. Для решения этого уравнения применим метод наискорейшего подъема. Для дальнейшего нам необходимо вычислить вектор

$$\frac{\partial T}{\partial c} = -\frac{\partial \bar{f}/\partial c}{\partial \bar{f}/\partial T}.$$

Из определения $\bar{f}(T, c, x_0)$ следует, что

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial T} = |ce^{-AT}b|$$

и

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial c_i} = x_0^i + \int_0^T \operatorname{sgn}\{ce^{-At'}b\}\,[e^{-At'}b]^i\,dt,$$

где $[e^{-At}b]^i$ есть i-я компонента вектора $e^{-At}b$ (для нормальной системы).

Таким образом,

$$\frac{\partial T}{\partial c} = -\frac{[x_0 + z(T, c)]'}{|ce^{-At}b|}.$$

Выбрав $k = |[ce^{-At}b]|$, вычислим новое значение c из уравнения

$$(\dagger\dagger) \qquad \frac{dc'}{d\sigma} = -[x_0 + z(T(c, x_0), c)].$$

Поскольку правая часть этого уравнения непрерывна по c, то оно имеет решение. Если $|ce^{-AT(c, x_0)}b| > 0$, то

$$\frac{dT}{d\sigma} = \frac{\partial T}{\partial c}\frac{dc'}{d\sigma} = |ce^{-AT(c, x_0)}b|\frac{\partial T}{\partial c}\frac{\partial T'}{\partial c} \geqslant 0.$$

В этом случае, если $c \notin Z$, то $\partial T/\partial c > 0$. Если $|ce^{-AT(c, x_0)}b| = 0$, то $\partial T/\partial \sigma$ не определено, но $\partial \bar{f}/\partial c = [x_0 + z(T(c, x_0), c)]'$ определено для фиксированного T и $(\partial \bar{f}/\partial \sigma)(T, c, x_0) = \partial \bar{f}/\partial c\, \partial c'/\partial \sigma = -\partial c/\partial \sigma\, \partial c'/\partial \sigma < 0$ при $c \notin Z$. Итак, функция $\bar{f}$ монотонно убывает по σ при фиксированном T; но, как мы показали ранее, функция $\bar{f}$ возрастает с ростом T; отсюда следует, что если величину T выразить явно из соотношения $\bar{f}(T, \sigma, x_0) = 0$ как функцию от σ, то получим возрастающую функцию.

Заметим, что значение $T(c, x_0)$ определено тогда и только тогда, когда $cx_0 \leqslant 0$, и если система нормальна, то из соотношения $cx_0 = 0$ следует, что $T(c, x_0) = 0$. Пусть D — область определения функции $T(c, x_0)$. Если вектор c первоначально находился в D, то решение $c(\sigma)$ уравнения $(\dagger\dagger)$ остается в D. Для того чтобы вектор $c(\sigma)$ вышел за пределы области D, необходимо, чтобы $c(\sigma_0)x_0 = 0$ при некотором σ_0, но тогда $T(c(\sigma_0), x_0) = 0$. Но это невозможно, так как $T(c(0), x_0) > 0$, и T возрастает с ростом σ.

Итак, ясно, что функция $T(c, x_0)$ обращается в нуль на границе ∂D области D, достигает положительного максимума на выпуклом множестве $Z \subset D$, и не имеет в D других локальных максимумов или минимумов. Поэтому, если $c(\sigma)$ стремится к пределу при $\sigma \to \infty$, этот предел принадлежит множеству Z. Заметим, что $\|c(\sigma)\| = \mathrm{const}$, поскольку

$$\frac{d(cc')}{d\sigma} = 2c\,\frac{dc'}{d\sigma} = -2c\,[x_0 + z(T, c)] = 0.$$

Для нахождения решения уравнения (††), дающего новое значение c, необходимо применить приближенный метод. Дело в том, что вычисление нулей функции $\bar{f}(T, c, x_0)$, необходимых для определения $T(c, x_0)$, требует больших затрат машинного времени. Итак, рассмотрим дискретный вариант уравнения (††); пусть

$$c^{(j+1)} = c^j + k\,\frac{\partial T}{\partial c}(c^{(j)}, x_0) \quad \text{при} \quad k > 0,$$

$j = 1, 2, 3, \ldots$, где функция $T(c^{(j)}, x_0)$ определяется следующим образом: уве ичиваем t до тех пор, пока выражение $\bar{f}(t, c^{(j)}, x_0) = c^{(j)}[x_0 + z(t, c^{(j)})]$ не обратится в нуль, и берем в качестве $T(c^{(j)}, x_0)$ соответствующее значение t. Для этого приходится прибегать лишь к интегрированию, которое вычислительная машина производит довольно быстро [см. Паевонский (Paiewonsky)]. После того как найдено $T(c^{(j)}, x_0)$, $c^{(j+1)}$ вычисляется из указанного рекуррентного соотношения. Затем вся процедура повторяется для вычисления $T(c^{j+1}, x_0)$, и так далее. Скорость сходимости этого процесса определяется выбором постоянной $k > 0$.

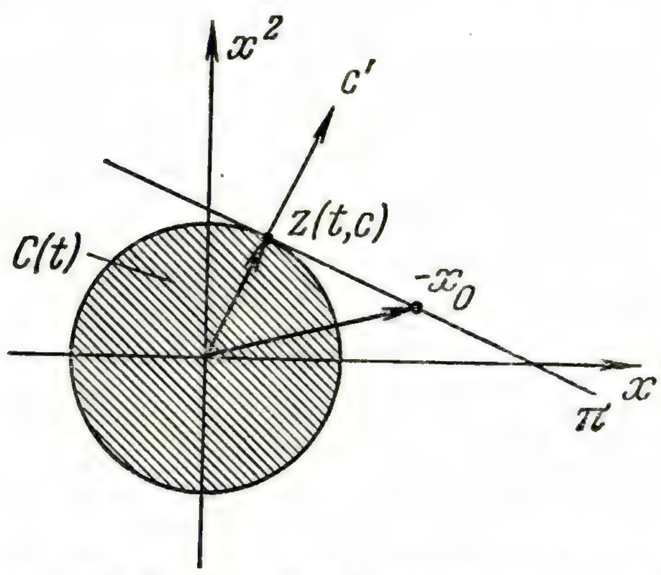

Рис. А3. Построение наискорейшего спуска для управлений, оптимальных по быстродействию.

Этот метод имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть (рис. А3) $-x_0$ — произвольная точка, а c — любой нулевой вектор, такой, что $cx_0 < 0$. Увеличению t до тех пор, пока не наступит равенство $\bar{f}(t, c, x_0) = c[x_0 + z(t, c)] = 0$, соответствует параллельное перемещение гиперплоскости π: $c[-x + z(t, c)] = 0$ до тех пор, пока она не пройдет через точку $-x_0$. При этом вектор c меняется так, чтобы вектор $-x_0 - z(t, c) = v$ стал ортогональным вектору c'. Далее проводится итерация, как показано выше.

Обобщим теперь наши результаты для случая системы с переменными коэффициентами и m управляющими переменными. Рассмотрим систему

$$(\mathscr{L}) \quad \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u(t) + v(t), \quad |u^j(t)| \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $A(t)$, $B(t)$ — как обычно, матрицы, непрерывные по t, размеров $n\times n$ и $n\times m$ соответственно, а $v(t)$ — заданная непрерывная вектор-функция, определенная на рассматриваемом интервале.

Решение этого линейного уравнения, соответствующее некоторому измеримому управлению $u(t)$, имеет вид

$$x(t)=\Phi(t)\,x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t')\,[B(t')\,u(t')+v(t')]\,dt',$$

где

$$\dot{\Phi}(t)=A(t)\,\Phi(t) \quad \text{и} \quad \Phi(t_0)=I.$$

Переписывая указанное выше уравнение, получим

$$-x_0-\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t')\,v(t')\,dt'+\Phi^{-1}(t)\,x(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t')\,B(t')\,u(t')\,dt'.$$

Предположим, что задача состоит в определении такого допустимого управления, которое обеспечивало бы достижение равенства $x(t)=\xi(t)$ за минимальное время, где $\xi(t)$ — параметрическое представление некоторой непрерывной кривой в R^n.

Пусть

$$\omega(t)=-\left[x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t')\,v(t')\,dt'-\Phi^{-1}(t)\,\xi(t)\right].$$

Тогда для осуществления оптимального по быстродействию управления системой необходимо найти такое допустимое управление $u(t)$ и время t, для которых

$$\omega(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t')\,B(t')\,u(t')\,dt'$$

с минимальным t_1 Поскольку $\omega(t)$ есть точка пространства R^n для каждого t, то можно рассмотреть такое же множество $C(t)$, как и раньше, и задача сводится к нахождению наименьшего t, для которого $\omega(t)\in C(t)$. Рассмотрим снова максимизирующие управления

$$u^j(t)=\operatorname{sgn}\{c\Phi^{-1}(t)\,B(t)\}_j, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

и предположим, что ни одна из компонент вектора $\{c\Phi^{-1}(t)\,B(t)\}_j$ не обращается в нуль на некотором интервале при $\|c\|=1$, т. е., что система нормальна.

Пусть, как обычно

$$z(t,\ c)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t')\,B(t')\operatorname{sgn}\{c\Phi^{-1}(t')\,B(t')\}\,dt',$$

где $z(t, c)$ принимает значения из множества $\partial C(t)$, а c' — внешняя нормаль к множеству $C(t)$ в точке $z(t, c)$. Рассмотрим соотношение $\overline{f}(t, c, \omega(t)) = c[z(t, c) - \omega(t)]$. Геометрическая интерпретация этой задачи приведена на рис. А4, (для дискретных значений c). В качестве первого приближения выберем любой вектор $c^{(1)}$, удовлетворяющий условиям $c^{(1)}\omega(t_0) > 0$, $\|c^{(1)}\| = 1$. Далее будем увеличивать t до тех пор, пока функция $\overline{f}(t, c^{(1)}, \omega(t))$ не станет равной 0, что соответствует параллельному движению гиперплоскости π до тех пор, пока она не пересечет кривой $\omega(t)$. Пусть это произойдет в момент $t = t^{(1)}$. Если $\omega(t^{(1)}) \neq z(t^{(1)}, c^{(1)})$, то нужно сделать следующий шаг. Для этого выберем вектор $c^{(2)} = c^{(1)} + kv^{(1)}$, где $v^{(1)}$ — вектор, соединяющий конец вектора $z(t^1, c^1)$ с точкой $\omega(t^{(1)})$. Таким образом, получим

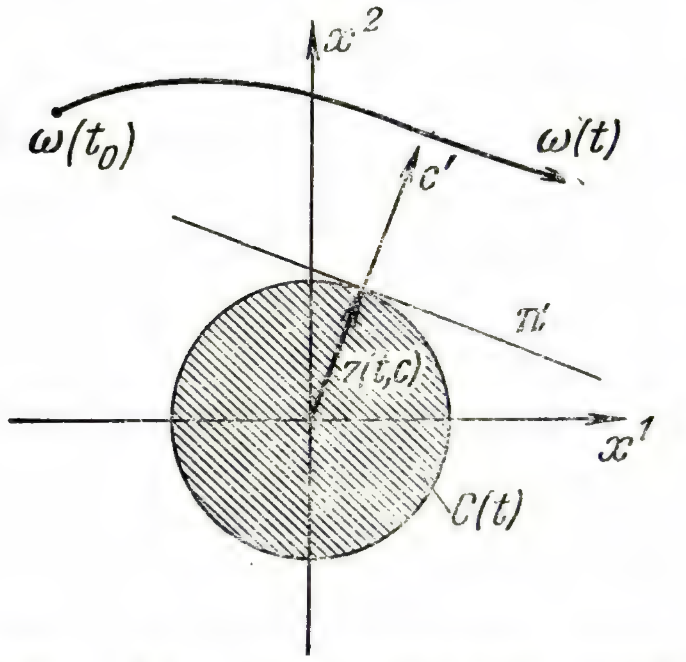

Рис. А4. Наискорейший спуск в случае зависящего от времени целевого множества.

$$c^{(2)} = c^{(1)} + k[\omega(t^{(1)}) - z(t^{(1)}, c^{(1)})],$$

где $k > 0$. Опять легко показать, что v есть направление градиента к T, где T $(T > t_0)$ есть наименьший корень уравнения $\overline{f}(t, c, \omega(t)) = 0$.

Если оптимальное управление существует, и если k выбрано правильно, то итеративный процесс приведет к некоторому вектору $c \in Z$, который мы обозначим через c^*. Тогда оптимальное управление, переводящее систему в точку кривой $\omega(t)$, будет равно

$$u(t) = \operatorname{sgn}[c^*\Phi^{-1}(t)B(t)].$$

Реализация этого алгоритма на аналоговой и цифровой вычислительных машинах имеется в работе Паевонского (Paiewonsky). Он также применил некоторые методы, разработанные Н. Н. Красовским и непосредственно связанные с рассмотренными выше построениями.

Пример 7. Рассмотрим управляемую систему

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in \Omega$$

с критерием качества

$$C(u) = g(x(T)),$$

где T — фиксированное время окончания процесса управления. Предполагается, что $f \in C^1$ в $R^n \times \Omega$ и $g \in C^1$ в R^n. С помощью принципа максимума (см. главы 1 и 5) часто бывает возможно

получить управление u как функцию состояния x и сопряженной переменной η, максимизируя выражение $H = \eta\dot{x} = \eta f(x, u)$ по u, явно входящему в H для $u \in \Omega$. Мы будем рассматривать лишь те задачи, в которых такое единственное управление u существует. В этом случае задача сводится к нахождению такого начального вектора $\eta(t_0)$, чтобы экстремальная кривая удовлетворяла заданным граничным условиям и минимизировала бы функционал

$$C(u) = g(x(T)).$$

Будем рассматривать только максимальные кривые, т. е. решение дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{S}_E) \qquad \dot{x} = \frac{\partial H(x, \eta, U)}{\partial \eta} = f(x, U(x, \eta)) = \tilde{f}(x, \eta),$$

$$\dot{\eta}' = -\frac{\partial H(x, \eta, U)}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, U(x, \eta))\,\eta' = \tilde{g}'(x, \eta),$$

где $U = U(x, \eta)$ определяется из условия

$$H(x, \eta, U) = \max_{u \in \Omega}\{H(x, \eta, u)\} \quad \text{для всех } x, \eta \in R^n.$$

Здесь $x(t_0) = x_0$ и $\eta(t_0)$ требуется определить так, чтобы удовлетворялись заданные граничные условия (см. ниже), и чтобы достигался минимум $g(x(T))$.

Итак, наша задача сведена к исследованию семейства кривых, зависящих от n параметров $\eta(t_0)$. Цель наших вычислений — определить вектор $\eta(t_0)$ так, чтобы соответствующее решение системы $\mathcal{S}_E$ минимизировало бы функцию g.

Для каждого $\eta(t_0) = c$ решение системы $\mathcal{S}_E$ запишем в виде

$$\begin{bmatrix} x(t, c) \\ \eta'(t, c) \end{bmatrix},$$

причем предполагается, что по заданному $u = U(x, \eta)$ всегда можно вычислить такое решение. В этом случае нетрудно определить и $g(x(T, c))$. Мы ищем такую функцию $c(\sigma)$, чтобы функционал $g(x(T, c(\sigma)))$, рассматриваемый как функция от σ, убывал с возрастанием σ.

Пусть зависимость c от σ определена из уравнения наискорейшего спуска

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad \frac{dc}{d\sigma} = -k\frac{\partial g}{\partial c},$$

где $[\partial g/\partial c]'$ — вектор градиента, а $k = \text{const} > 0$. Тогда

$$\frac{dg}{d\sigma} = \frac{\partial g}{\partial c}\frac{\partial c'}{\partial \sigma} = -k\left[\frac{\partial g}{\partial c}\right]^2 \leqslant 0,$$

где под $[\partial g/\partial c]^2$ понимается скалярное произведение. Если $\partial g/\partial c \neq 0$, то функция $g(\sigma) = g(x(T, c(\sigma)))$ убывает с возрастанием σ, а значит, точка, где $\partial g/\partial c = 0$, достигается при $\sigma \to \infty$.

Чтобы вычислить $c(\sigma)$ из указанного выше уравнения (†††), необходимо знать, как меняется g в зависимости от c. Поэтому рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial g}{\partial c}=\frac{\partial g'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c},$$

где $x=x(T, c)$, и

$$\frac{\partial x}{\partial c'}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial c_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial x^n}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial c_n}\end{bmatrix}.$$

Для того чтобы вычислить эту матрицу, требуется выяснить, как сильно меняются решения при малом изменении c. Поскольку

$$\dot{x}=\tilde{f}(x, \eta), \quad \dot{\eta}=\tilde{g}(x, \eta),$$

то максимальное решение $(x(t, c), \eta(t, c))$ должно удовлетворять системе уравнений

$$\dot{x}(t, c)=\tilde{f}(x(t, c), \eta(t, c)), \quad \dot{\eta}(t, c)=\tilde{g}(x(t, c), \eta(t, c))$$

при $t_0\leqslant t\leqslant T$. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial\dot{x}(t,c)}{\partial c_i}=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x(t, c), \eta(t, c))\frac{\partial x}{\partial c_i}(t, c)+\frac{\partial\tilde{f}'}{\partial\eta}(x(t, c), \eta(t, c))\frac{\partial\eta'}{\partial c}(t, c),$$

$$\frac{\partial\dot{\eta}'(t,c)}{\partial c_i}=\frac{\partial\tilde{g}'}{\partial x}(x(t, c), \eta(t, c))\frac{\partial x}{\partial c_i}(t, c)+\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\eta}(x(T, c), \eta(t, c))\frac{\partial\eta'}{\partial c_i}(t, c).$$

В предположении, что изменение порядка дифференцирования в данном случае допустимо, получаем

$$(\overline{\mathscr{S}})\qquad \begin{aligned}\frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial c_i}\right)}{dt}&=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_i}+\frac{\partial\tilde{f}'}{\partial\eta}\frac{\partial\eta'}{\partial c_i},\\ \frac{d\left(\frac{\partial\eta'}{\partial c_i}\right)}{dt}&=\frac{\partial\tilde{g}'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c_i}+\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\eta}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial c_i},\end{aligned}$$

где производные $\partial\tilde{f}/\partial x$, $\partial\tilde{f}/\partial\eta$, $\partial\tilde{g}/\partial x$, $\partial\tilde{g}/\partial\eta$ вычисляются вдоль экстремальной кривой $x(t, c)$, $\eta(t, c)$ $(t_0\leqslant t\leqslant T)$. Пусть

$$\psi(t)=\begin{bmatrix}\psi_1^1(t) & \psi_2^1(t)\\ \psi_1^2(t) & \psi_2^2(t)\end{bmatrix}$$

— фундаментальная матрица решений системы линейных уравнений $\overline{\mathscr{S}}$, удовлетворяющая начальному условию $\psi(t_0)=I$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial c}=\frac{\partial g'}{\partial x}\psi_2^1(T),$$

где функция $\psi_2^1(T)$ зависит, конечно, от максимальной кривой $x(t, c)$, $\eta(t, c)$, так что с возрастанием σ величина $\psi_2^1(T)$ непрерывно меняется. Таким образом, локальная чувствительность решений может быть оценена с помощью вариационного подхода.

Другой метод, часто употребляемый при машинных вычислениях, состоит в приближенном вычислении $\partial g/\partial c$ с помощью метода возмущений [см., например, Шармак (Scharmack)].

Существуют различные применения вычислительного алгоритма, основанного на методе наискорейшего спуска, к задачам пространственной навигации (Шармак) и к некоторым другим задачам [Келли—Брайсон (Kelley—Bryson)].

А.3. Работы по методу наискорейшего спуска и вычислительным методам оптимального управления

В двух предыдущих разделах метод наискорейшего спуска был предложен в качестве конструктивного метода построения оптимальных управлений. Многие из алгоритмов для вычисления оптимальных управлений основаны на методе наискорейшего спуска; точнее говоря, почти все из них, даже методы, рассмотренные в примерах 5 и 6, основаны на некоторых модификациях метода наискорейшего спуска. В примере 5, например, модификация состоит в изменении отсчета времени с помощью постоянной k. В дальнейших модификациях меняется уже геометрия функционального пространства [в методе Ньютона—Рафсона (Newton—Raphson) для систем второго порядка вводится локально-линейное преобразование]. При рассмотрении различных специальных классов задач применяются и другие модификации, позволяющие увеличить эффективность алгоритма; кроме того, существуют и такие методы вычисления оптимальных управлений, как метод динамического программирования [Беллман (Bellman)] и другие, которые не имеют никакого отношения к методу наискорейшего спуска. Общая теория метода наискорейшего спуска излагается в статьях Голдстейна (Goldstein), Канторовича и Розенблюма (Rosenbloom).

В литературе встречается множество прекрасных примеров применения метода наискорейшего спуска к задачам оптимального управления. В частности, несколько примеров есть в статьях Брайсона и Келли. Поскольку авторы настоящей книги сами достаточно серьезно не занимались применением метода наискорейшего спуска, то мы не будем здесь высказывать своего мнения о преимуществах одного вычислительного метода перед другим. Мы завершаем этот раздел подробной библиографией по методу наискорейшего спуска и другим численным методам. Мы, однако, расположили работы по разделам, указывая, как нам кажется, сферу применения результатов каждой из работ.

БИБЛИОГРАФИЯ К ПРИЛОЖЕНИЮ А

Метод наискорейшего спуска и оптимизация управлений

Balakrishnan A. V., An Operator Theoretic Formulation of a Class of Control Problems and a Steepest Descent Method of Solution, J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control, 1, No. 2, 109—127 (1963).

Curry H. B., The Method of Steepest Descent for Nonlinear Minimization Problems. Quart. Appl. Math., 2, № 4 (Oct. 1944).

Denham W. F., Steepest—Ascent Solution of Optimal Programming Problems. Ph. D. Thesis, Div. Engr. and Applied Physics, Harvard University (1963).

Goldstein A. A., Minimizing Functionals on Hilbert space, In A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt (eds.). Computing methods in Optimization Problems, Academic Press Inc., New York, 1964, pp. 159—165. [См. также J. Soc. Ind. Appl. Math. Ser. A, Control 4, 81—89 (1966).]

Gollwitzer H. E., Application of the Method of Steepest Descent to Optimal Control Problems. Thesis, University of Minnesota, 1965.

Hillsley R. H., Robins H. M., Steepest Ascent Trajectory Optimization Method Which Reduces Memory Requirements. В книге: A. V. Balakrishnan, L. W. Neustadt (eds.), Computing Methods in Optimization Problems, Academic Press Inc,, New York, 1964, pp. 107—133.

Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Rosenbloom P. C., The Method of Steepest Descent. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 6, pp. 127—176, The American Mathematical Society, 1956.

Tompkins C. B., Method of Steepest Descent. В книге: F. F. Beckenbach (ed.) Modern Mathematics for the Engineer. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956, Chapter 18.

Vachino R. F., Steepest Descent with Inequality Constraints on the Control Variables, J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 4, № 1, 245—261 (1966).

Вайнберг М. М., О сходимости метода наискорейшего спуска для нелинейных уравнений. ДАН СССР, т. 130, № 1, 1960.

Метод наискорейшего спуска в применении к проблемам оптимизации управлений

Bryson A. E. Denham W. F., A Steepest Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems. J. Appl. Mech. 29, 247—257 (1962).

Bryson A. E., Denham W. F., Caroll E. J., Mikamic K., Determination of the Lift or Drag Program that Minimizes Re-entry Heating with Acceleration or Range Constraints Using a Steepest Descent Computation Procedure. J. of Aerospace Sci., 29, № 4, 420—430 (1962).

Denham W. F., Bryson A. E., Optimal programming with inequality constraints, II: Solution by steepest ascent. AIAAJ 2, 25—34 (1964).

Neustadt L. W., Minimum Effort Control Systems. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A., Control 1, № 1, 16—31 (1962).

Neustadt L. W., Synthesizing Time Optimal Control Systems. J. Math. Anal. Appl., 1, № 4, 484—493 (1960).

Численные методы в задачах оптимизации управлений

Aoki M., On a Successive Approximation Technique in Solving Some Control Problems. Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Eng. 85, 177—180 (1963).

Balakrishnan A. V., Hsieh H. C., Function Space Methods in Control System Optimization. Proc. Optimum System Synthesis Conference, Dayton, Ohio, September 1962, pp. 10—40.

Bohn E. V., A Numerical Trajectory Optimization Method Suitable for a Computer of Limited Memory. Proc. JACC Seattle, Washington, 1966, 177—186.

Breakwell J. V., Speyer J. L., Bryson A. E., Optimization and Control of Nonlinear Systems Using Second Variation. J. Soc. Ind. appl. Math., Ser. A, Control, 1, № 2, 193—223 (1963).

Canon M. D., Eaton J. H., A New Algorithm for a Class of Quadratic Programming Problems with Applications to Control. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control, 4, № 1, 34—45 (1966).

Eaton J. H., An Interative Solution to Time-Optimal Control. J. Math. Anal. Appl., 5, 324—344 (1962).

Eaton J. H., An On Line Solution to Sampled—Data Time Optimal Control. J. Electron. Control, 15, № 4, 333—341 (1963).

Eaton J. H., Improper Solutions under Existence Assumptions: an Example. Tech. Note on NASA Grant NsG—354, Ser. 5, Issue 16, University of California (1964).

Fadden E. J., Gilbert E. G., Computational Aspects of the Time-Optimal Control Problem. В книге: A. V. Balakrishnan, L. W. Neustadt (ред.), Computing Methods in Optimization Problems. Academic Press Inc., New York, 1964, pp. 167—193.

Fancher P. S., Iterative Computation Procedures for an Optimum Control Problem. IEEE Trans. Auto., Control AC—10, 346—348 (1965).

Fletcher R., Powell M. J. D., A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization. Computer Journal, 6, № 2, 163—168 (1963).

Fletcher R., Reeves C. M., Function Minimization by Conjugate Gradients. Computer Journal, 7, № 2, 149—154 (1964).

Forsythe G. E., Acceleration of the Optimum Gradient Method, Abstract. Bull. Amer. Math. Soc., 57, 304—305 (1951).

Forsythe G. E., Motzkin T. S., Asymptotic Properties of the Optimum Gradient Method (Abstract), Bull. Amer. Math. Soc. 57, 183 (1951).

Frank M., Wolfe P., An Algorithm for Quadratic Programming, Naval Res. Logist, Quart., 3, 95—110 (1956).

Gilbert E. G., An Iterative Procedure for Computing the Minimum of a Quadratic Form on a Convex Set. J. Soc. Ind. Appl. Math. Ser. A, Control, 4, № 1, 61—80 (1966).

Gottilieb R. G., Rapid Convergence to Optimum Solutions using Min-H Strategy. Proc. JACC, Seattle, Washington, 1966, pp. 167—174.

Goldstein A. A., Convex Programming and Optimal Control, J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control, 3, № 1, Ser. A., 147—151 (1965).

Halkin H., Method of convex ascent. В книге: A. V. Balakrishnan, L. W. Neustadt (eds.), Computing Methods in Optimization Problems, Academic Press Inc., New York, 1964, pp. 211—239.

Ho Y. C., A Successive Approximation Technique for Optimal Control Systems Subject to Input Saturation. Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Eng., 84, № 1, 33—40 (1962).

Ho Y. C., Computational Procedure for Optimal Control Problem with State Variable Constraints, J. Math. Anal. Appl. 5, 216—224 (1962).

Ho Y. C., Brentani P. B., On Computing Optimal Control with Inequality Constraints, J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control, 319—348 (1963).

Ho Y. C., Kashyap R. L., A Class of Iterative Procedures for Linear Inequalities, J. Soc. Ind. Appl. Math. Ser. A, Control 4, № 1, 112—115 (1966).

Isaacs D., Leondes C. T., Nieman R. A., On a Sequential Optimization Approach in Nonlinear Control. Proc. JACC, Seattle, Washington, 158—166, 1966.

Jurovics A. S., McIntyre J. E., The Adjoint Method and its Application to Trajectory Optimization, ARS J., 32, 135s (1962).

Kazda L., Control System Optimization Using Computers as Control System Elements, Proc. of Computer in Control Systems Conference, New York, 1958.

Kelley H. J., Methods of Gradients. В книге: G. Leitman (ed.) Optimization Tecdniques, Academic Press Inc., New York, 1962, Chapter 6.

Knapp C. H., Frost P. A., Determination of Optimal Control and Trajectories Using the Maximum Principle in Association with a Gradient Technique. Proc. JACC, Stanford, California, 1964, p. 222.

Knudsen H. K., An Iterative Procedure for Computing Time—Optimal Controls, IEEE Trans. Auto. Control, 9, 23—30 (1964).

Kopp R. E., McGill R., Several Trajectory Optimization Techniques. В книге: A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt. (ed.) Computing Methods in Optimization Problems. Academic Press Inc., New York, 1964, pp—65—89.

Kulikowski R., Synthesis of a Class of Optimum Control Systems. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci., Tech. 7, 663—671 (1959).

Luh J. Y. S., On a Computational Scheme for Time Optimal of Linear Discrete Systems, IEEE Trans. Auto. Control, ACll, № 1, 145 (1966).

McGill R., Optimal Control, Inequality State Constraints, and the Generalized Newton—Raphson Algorithm. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 3, № 2, 291—298 (1965).

McReynolds S. R., A Successive Sweep Method for Solving Optimal Programming Problems, Ph. D. Dissertation, Div. of Engineering and Appl. Physics, Harvard University (1966).

Мееров М. В., Фридман В. Г., Линейное программирование в гильбертовом пространстве и оптимизация одного класса многосвязных систем. Труды III Конгресса ИФАК, Лондон, 1966.

Merriam C. W., An Algorithm for the Iterative Solution of a Class of Two Point Boundary Value Problems, SIAM J., Control, 2, 1—10 (1964).

Mikami T., An Iterative Computing Method for Solving Time—Optimal Problems. Proc. Third IFAC Congress, London (1966).

Mitter S. K., Successive Approximation Methods for the Solution of Optimal Control Problems. Automatica 3, 135—149, Pergamon Press (1966).

Moyer H. G., Purham G., Several trajectory optimization techniques, Part II. В книге: A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt (ed.), Computing Methods in Optimization Problems. Academic Press Inc., New York (1964), pp. 91—105.

Neustadt L. W., A Synthesis Method for Optimal Controls. Proc. of Optimum System Synthesis Conference, Dayton, Ohio (September 1962), pp. 273—382.

Noton A. R., Numerical computation of automatic control, Proc. JACC, Seattle, Washington (1966), pp. 193—204.

Paiewonsky B., Woodrow P., Brunner W., Halbert P., Synthesis of Optimal Controllers Using Hybrid Analog-digital Computers. В книге: A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt (eds.), Computing Methods in Optimization Problems. Academic Press Inc., New York (1964). pp. 285—304.

Plant J. B., Athans M., An iterative Technique for the Computation of Time Optimal Controls. Proc. Third IFAC Congress, London (1966).

Rosen J. B., Iterative Solution of Nonlinear Optimal Control Problems. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control, 4, № 1, 223—244 (1966).

Rosen J. B., Optimal Control and Convex Programming. В книге: J. Abadie (ed.), Nonlinear Programming, A Course, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1966).

Scharmack D. K., The Equivalent Minimization Problem and the Newton—Raphson Optimization Method. Proc. of the Optimum System Synthesis Conference, Dayton, Ohio (September 1962), pp. 119—158.

Scheley C. H.,Optimal Control Computation by the Newton—Raphson Method and the Riccati Transformation. Proc. JACC, Seattle, Washington (1966), pp. 186—192.
Shah B. V., Buehier R. J., Kempthrone O., Some Algorithms for Minimizing a Function of Several Variables. J. Soc. Ind. Appl. Math., 12, 74 (1964).

Применение вычислительной техники к прикладным задачам теории управления

Battin R. H., A Statistical Optimizating Navigation Procedure for Space Flight, ARS J., 1681—1698 (1962).
Bellman R., Dreyfus S., An application of Dynamic Programming to the Determination of Optimal Satellite Trajectories, J. Brit. Interplanet. Soc. № 3—4, 17, 78—83 (May—August 1958).
Kelley H. J. Successive Approximation Techniques for Trajectory Optimization, Proc. of the IAS Symposium on Vehicles System Optimization, Institute of Aerospace Sciences, New York (1961), p. 10.
Landgraf S. K., Some Practical Application of Performance Optimization Techniques to High—Performance Aircraft. J. Aircraft, 2, № 2, 153—154 (1965).
Meditch J., Optimal Thrust Programming for Minimal Fuel Midcourse Guidance, Proc. of Optimum Synthesis Conference, Dayton, Ohio (1962), pp. 55—68.
Melbourne W. G., Sauer C. G. Constant Attitude Thrust Program Optimization, AIAAJ, 3, 8, 1428—1431 (1965).
Melbourne W. G., Sauer C. G., Optimum Thrust Program for Power Limited Propulsion Systems, Astronaut., Acta 8, 1962.
Paiewonsky B. H., The Syntheis of Optimal Controller. Proc. of the Optimum System Synthesis Conference, Dayton, Ohio, (September 1962), pp. 69—88.
Smith F. T., Optimization of Multistage Orbit Transfer Processes by Dynamic Programming. ARS J. 31, pp. 1553—1559 (1961).
Spang H. A., III, Optimum Control of an Unknown Linear Plant Using Bayesian Estimation of the Error. IEEE Trans., Control AC—10, № 1, 80—83 (1965).
Swerling P., A Proposed Stagewise Differential Condition Procedure for Satellite Tracking and Prediction, J. Astro. Sci., 6, 46—52 (1959).
Tsien H. S., Evans R. C., Optimum Thrust Programming for Sounding Rocket. ARS J., 21, 99—107 (1951).

Обзорные статьи, посвященные оптимизации управлений с применением вычислительной техники

Bell D. J., A Review of Flight Path Optimization . . . in the Period 1945—1960, J. Roy. Aeron. Soc. 67, 119 (1963).
Greenley R. R., Comments on the Adjoint Method and its Application to Trajectory Optimization, AIAA J., 1, 1463 (1963).
Paiewonsky B. H., A Study of Time Optimal Control. В книге: J. P. Lasalle, S. Lefshetz (ed.), Proceedings of International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press Inc., New York (1963), pp. 333—365.
Paiewonsky B. H., Optimal Control: A Review of Theory and Practice AIAA J. 3, 11, 1985—2006 (1965).
Spang H. A., III, A Review of Minimization Techniques for Nonlinear Functions, Soc. Ind. Appl. Math. Rev. 4 (1962).

Литература общего характера

Арис Р., Оптимальное проектирование химических реакторов, перев. с англ., ИЛ, 1963.
Бэттин Р., Навигация в космосе, перев. с англ., «Машиностроение», 1966.
Беллман Р., Динамическое программирование, перев. с англ., ИЛ, 1960.
Блисс Г., Лекции по вариационному исчислению, перев. с англ., ИЛ, 1950.
Bryson A. E., Denham W. F., Dreyfus S. E., Optimal Programming Problem with Inequality Constraints I: Necessary Conditions for Extremal Solutions. AIAA J., 1, pp. 2544—2550, (1963).
Chang S. S. L., General Theory of Optimal Processes, J. Soc. Ind. Appl. Math. Ser. A, Control, 4, № 1, pp. 46—55, (1966).
Чанг С. С. Л., Синтез оптимальных систем автоматического управления, перев. с англ., «Машиностроение», 1964.
Cicala P., An Engineering Approach to the Calculus of Variations (in English), Levrotto and Bella, Torino, Italy, 1957.
Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, перев. с англ., ИЛ, 1958.
Курант Р., Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 2, перев. с англ., «Наука», 1969.
Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.
Hestenes M. R., Variational Theory and Optimal Control Theory, in Computing Methods in Optimization Problems. Academic Press, N. Y. (1966).
Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, перев. с англ., ИЛ, 1962.
Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН, № 3, вып. 6, 1948.
Kelly H. J., Guidance Theory and Extremal Fields. IRE Trans. Auto. Control, pp. 76—82 (1962).
Kuhn H., Tucker A. W., Nonlinear Programming, Second Berkley Symposium of Math. Statistics and Probability, University of California Press, Berkley, 1951.
Лейтман Дж. (ред.), Методы оптимизации с приложениями к космическим летательным аппаратам, перев. с англ., «Наука», 1965.
Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
Мерриэм К., Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью, перев. с англ., «Мир», 1967.
Рисс Ф., Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
Saaty T. L., Bram J., Nonlinear Mathematics, McGraw-Hill Book Co., N. Y., 1964.
Taylor A. E., Introduction to Functional Analysis, John Wiley, N.Y. (1958).
Wilde D. J., Optimum Seeking Methods, Prentice Hall, New Jersey (1964).
Zoutendijk G., Nonlinear Programming: A Numerical Survey. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control, 3, № 1 (1966).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

РАБОТЫ ПО ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ СИСТЕМАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этом приложении мы расскажем о новейших исследованиях в области оптимальных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, а также другими более сложными функциональными уравнениями. Мы ограничимся здесь рассмотрением детерминированных систем, не касаясь обширной литературы, посвященной стохастическим управляемым системам. В конце этого приложения дается специальная библиография работ, посвященных рассматриваемым здесь проблемам.

Б1. Управляемые системы, описываемые функционально-дифференциальными уравнениями или уравнениями в частных производных, и применимость функционального анализа

Рассмотрим управление линейным осциллятором с вектором состояния $(x(t), \dot{x}(t))$ и скалярными управлениями $u(t)$, и предположим, что упругая восстанавливающая сила действует с запаздыванием в одну секунду. Тогда уравнения движения системы будут иметь вид

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t-1)=u(t)$$

или

$$\dot{x}(t)=y(t), \quad \dot{y}(t)=x(t-1)+u(t).$$

Это — пример системы *дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, или *дифференциально-разностной системы*. Если состояние $(x(t), y(t))$ системы определено на единичном интервале $-1\leqslant t\leqslant 0$, то оно будет однозначно определено и для всех $t>0$, при условии, что при $t>0$ определено управление $u(t)$. Заметим,

что начальное состояние системы, (а также все последующие ее состояния, если задача сформулирована соответствующим образом), являются функциями, определенными на действительном единичном интервале, а не точками пространства конечной размерности. Это сразу приводит нас к динамическим системам в пространствах бесконечной размерности, и естественно, что основную роль в их исследовании будут играть методы функционального анализа.

Для описания общей системы обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений введем обозначение $x_t(\theta)$ для n-мерной вектор-функции на интервале $-1 \leqslant \theta \leqslant 0$, соответствующей каждому n-мерному вектору $x(t)$. Если $x(t)$ $(-1 \leqslant t \leqslant t_1)$ (где t_1 — любое положительное число) есть функция со значениями в R^n, то $x_t(\theta)$, для каждого t из интервала $0 \leqslant t \leqslant t_1$ представляет собой *единичный отрезок* $x(t)$, *конец которого соответствует моменту* t или

$$x_t(\theta) = x(t+\theta) \quad \text{на} \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 0.$$

Очевидно, что из непрерывности функции $x(t)$ следует непрерывность функции $x_t(\theta)$, т. е. $x_t(\theta)$ принадлежит пространству $C([-1, 0], R^n)$ непрерывных n-мерных вектор-функций на интервале $-1 \leqslant \theta \leqslant 0$. С введением обычной нормы это пространство становится банаховым. Аналогично, если функция $x(t)$ интегрируема на любом конечном интервале, то функция $x_t(\theta)$ принадлежит пространству $L_1[(-1, 0), R^n]$.

Обыкновенная управляемая функционально-дифференциальная система описывается n-мерным векторным управлением:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u_t, u(t)),$$

где f есть непрерывное отображение пространства

$$R^1 \times C([-1, 0], R^n) \times L_1((-1, 0), R^m) \times R^m \text{ в } R^n.$$

Если задано непрерывное начальное состояние

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta), \quad -1 \leqslant \theta \leqslant 0$$

и интегрируемое управление

$$u(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant t_1,$$

то существует однозначно определенное решение $x(t)$, если только функция f удовлетворяет некоторым условиям гладкости, а также ограничениям на скорость возрастания. Обычно в задачах оптимального управления функции $u(t)$ выбираются из некоторого класса допустимых управлений, так, чтобы решение $x(t)$, соответствующее $u(t)$, доставляло минимум заданному функционалу.

В качестве одного из важнейших примеров рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему

$$\dot{x}(t)=\sum_{k=1}^{p} A_k x(t-\tau_k)+Bu(t)$$

с постоянными матрицами A_k и B и постоянными запаздываниями $0 \leqslant \tau_k \leqslant 1$. Это наиболее хорошо изученный вид функционально-дифференциальных систем. Очевидный переход к непрерывным запаздываниям приводит к *уравнению восстановления*

$$\dot{x}(t)=\int_{-1}^{0} A(\theta)\, x(t+\theta)\,d\theta+Bu(t).$$

При других обобщениях запаздывания $\tau_k \geqslant 0$ могут изменяться по времени и быть неограниченными.

Для того чтобы ввести понятие управляемой системы с *распределенными параметрами*, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+u(t, y).$$

Здесь $T(t, y)$ — температура точки бесконечного стержня $-\infty<y<\infty$ в момент времени $t \geqslant 0$. Распределенное управление $u(t, y)$ может рассматриваться как регулирующий источник тепла, распределенный по стержню. Рассмотрим аналогичное уравнение в интегральной форме (которую мы примем за определение подобной управляемой системы):

$$T(t, y)=\int_{-\infty}^{\infty} H(t, y-\xi)\, T(0, \xi)\, d\xi+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau, y-\xi)\, u(t, \xi)\, d\xi\, d\tau,$$

где $H(t, y)$ — ядро теплопроводности

$$H(t, y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-y^2/4t}, \quad t>0.$$

Начальная температура стержня $T(0, y)$ задается с помощью функции из банахова пространства C_0 непрерывных функций, определенных на оси y и стремящихся к нулю при $|y| \to \infty$ (норма выбирается как обычно). Управляющие функции непрерывны по $t \geqslant 0$, $-\infty<y<\infty$, и стремятся к нулю при $|y| \to \infty$, равномерно на каждом компактном интервале $t>0$. Теперь можно определить пространство состояний $\mathscr{X}$ как банахово пространство C_0, так что состояние $x(t)$ системы отождествляется с функцией $T(t, \cdot)$. В качестве пространства управлений выбираем $\mathcal{U}=C_0$; тогда каждое управление $u(t, y)$ определяет непрерывное отображение $t \to u(t)$ пространства R^1 в $\mathcal{U}$, и каждое такое отображение

определяется единственным управлением $u(t, y)$. В этих обозначениях наше уравнение теплопроводности представляет собой полугруппу $\Phi(t)$ линейных преобразований пространства $\mathscr{X}$ в себя,

$$\Phi(t)\,x(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} H(t, y-\xi)\,T(0, \xi)\,d\xi.$$

Полугруппа $\Phi(t)$ будет сильно непрерывна при $t \geqslant 0$, и более того, $\Phi(t)\,x$ непрерывно по (t, x). Таким образом, получаем формулу для управляемого распределения температур

$$x(t) = \Phi(t)\,x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

в которую входит интеграл Римана от непрерывной функции $\Phi(t-\tau)\,u(\tau)$ из $R^1 \to C_0$ при каждом фиксированном $t \geqslant 0$. Эта формула вариации произвольных постоянных согласуется с описанием процесса теплопроводности с помощью обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + u(t),$$

где $x(t) = T(t, \cdot)$ — элемент банахова пространства C_0, а A — неограниченный линейный оператор дифференцирования второго порядка (или лапласиан для большого числа переменных).

Приведенные примеры показывают, что обыкновенные функционально-дифференциальные системы, дифференциальные системы в частных производных и даже системы с запаздыванием могут рассматриваться как динамические системы в пространствах бесконечной размерности. Если первоначальные системы линейны и автономны, то теория полугрупп дает нам единообразный подход к таким задачам; в противном случае необходимо ввести в рассмотрение более общие эволюционные системы.

Методы функционального анализа применимы также к классическим задачам оптимизации, описываемым системами обыкновенных дифференциальных уравнений в R^n:

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

с ограничениями $x \subset \Lambda \subset R^n$ и $u(t) \subset R \subset R^m$. Критерий качества $C(u)$ можно считать функционалом с действительными значениями на пространстве управлений $\mathscr{U}$. Оптимальное управление u^* тогда соответствует критической точке функционала $C(u)$, т. е. точке, в которой обращается в нуль градиент $C(u)$, понимаемый в некотором обобщенном смысле. Все накладываемые условия ограничивают пределы изменения управления u некоторым подмножеством $\mathscr{V}$ (часто подмногообразием) пространства $\mathscr{U}$. Следовательно, необходимым условием оптимальности управления u^* является

равенство нулю некоторой проекции градиента функционала $C(u)$ на подмножество $\mathscr{V}^0$. Это необходимое условие может выражаться через множители Лагранжа как в условии Куна—Таккера (Kuhn—Tucker), которое в классической задаче превращается в принцип максимума Понтрягина.

Б2. Абстрактный принцип максимума

Абстрактная или аксиоматическая трактовка принципа максимума вполне укладывается в общую схему классического функционального анализа. Пусть $\mathscr{F}$ — линейное топологическое пространство, а $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}$ — его *квазивыпуклое подмножество*; это означает, что любое линейное отображение конечномерного симплекса σ в пространство $\mathscr{F}$, с вершинами, отображаемыми в $\mathscr{F}_1$, всегда может быть равномерно аппроксимировано непрерывными отображениями симплекса σ в $\mathscr{F}_1$. Пусть φ: $\mathscr{F}_1 \to R^n : f \to x$ — непрерывное отображение с минимальным значением x^1 в некоторой точке $f^* \in \mathscr{F}_1$. Если отображение φ дифференцируемо (в смысле Гато) в окрестности f^*, то оператор $d\varphi$, представляющий собой линейную часть отображения φ, отображает выпуклую оболочку множества $\mathscr{F}_1$ на выпуклое множество Q в R^n, причем точка $d\varphi(f^*)$ попадает на границу множества Q. Тогда принцип максимума состоит в утверждении, что в R^n существует гиперплоскость π, отделяющая множество Q от луча, параллельного оси x^1, направленного вниз от точки $\varphi(f^*)$.

Покажем теперь, как обычная задача оптимального управления может быть сформулирована в терминах функционального анализа. Рассмотрим управляемую систему в R^n:

$$(\mathscr{S}) \qquad \dot{x} = f(x, t, u),$$

где f — функция класса C^1 в R^{n+1+m}. В качестве управлений $u(t)$ рассмотрим измеримые m-мерные вектор-функции на фиксированном конечном интервале $\mathscr{I}$: $t_0 \leqslant t \leqslant T$; подчеркнем, что функции $u(t)$ принадлежат некоторому множеству функций $\mathscr{U}$. Часто $\mathscr{U}$ есть просто совокупность всех измеримых функций $u(t) \subset \Omega \subset R^m$ на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, где Ω — некоторое фиксированное множество. Однако такое описание множества $\mathscr{U}$ вовсе не обязательно. Рассмотрим некоторое фиксированное начальное состояние $x(t_0) = x_0$ в R^n. Предположим, что каждому допустимому управлению $u(t) \in \mathscr{U}$ соответствует решение $x(t)$, принимающее значения из заданного компактного множества $X \subset R^n$, и что

$$|f(x, t, u(t))| \leqslant m_u(t) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \ t \in \mathscr{I},$$

где $m_u(t)$ — интегрируемая функция на интервале $\mathscr{I}$, зависящая от управления $u(t)$. Тогда каждое решение $x(t)$ определено на

всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и требуется минимизировать функционал $x^1(T)$. Пусть $\mathcal{F}_1$—совокупность всех функций $\{f(x, t, u(t))\}$, $u(t) \in \mathcal{U}$, т. е. функций, зависящих только от (x, t), и полученных путем подстановки в $f(x, t, u)$ управления $u(t)$. Мы будем обозначать такие функции через $f(x, t)$. Каждой функции $f \in \mathcal{F}_1$ соответствует решение $x(t)$, определенное на интервале $\mathcal{I}$, конец которого $x(T) \in R^n$. Рассмотрим отображение

$$\varphi:\ \mathcal{F}_1 \longrightarrow R^n:\ f \longrightarrow x(T).$$

Будем считать $\mathcal{F}_1$ подмножеством линейного топологического пространства $\mathcal{F}$, состоящего из n-мерных вектор-функций $g(x, t)$ на $X \times \mathcal{I}$, где

$$\begin{array}{lll} g(x, t) & \text{непрерывны по } x \text{ при всех} & t \in \mathcal{I}; \\ g(x, t) & \text{измеримы по } t \text{ при всех} & x \in X; \\ |g(x, t)| \leqslant m_g(t) \in L_1(\mathcal{I}) & \text{для} & (x, t) \in X \times \mathcal{I}, \end{array}$$

причем интегрируемая функция $m_g(t)$ зависит от g. Для того чтобы пространство $\mathcal{F}$ стало топологическим, необходимо дать определение окрестности начала координат. Это можно сделать различными способами, однако все они достаточно сложны. Одно из новейших определений дал Л. Нейштадт: окрестностью $N_{\varepsilon, Y}$ начала координат для каждого положительного $\varepsilon > 0$ и для каждого вспомогательного семейства Y равностепенно непрерывных n-мерных вектор-функций $y(t)$ считаем совокупность тех $g(x, t)$, для которых

$$g \in N_{\varepsilon, Y}, \text{ если } \left| \int_{t_0}^{t} g(y(s), s)\, ds \right| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \in \mathcal{I},\ y \in Y.$$

Такое определение окрестности $N_{\varepsilon, Y}$ иногда называют *вибрационной топологией* в $\mathcal{F}$. Для того чтобы вывести принцип максимума для оптимального управления $u^*(t) \in \mathcal{U}$, или для соответствующего элемента $f^* = f^*(x, t, u^*(t)) \in \mathcal{F}$, остается теперь лишь доказать, что множество $\mathcal{F}_1$ квазивыпукло в $\mathcal{F}$, и что отображение φ дифференцируемо (оба утверждения должны быть справедливы хотя бы в некоторой окрестности f^*). Наиболее сложная часть доказательства принципа максимума, как показано в главе 4, состоит в проверке справедливости этих двух утверждений для случая, когда семейство $\mathcal{U}$ включает все управления $u(t) \subset \Omega$.

В рассматриваемом здесь самом общем случае принцип максимума выражается в интегральной форме [через функцию Гамильтона $\tilde{H}(\tilde{\eta}, \tilde{x}, u)$, введенную в теореме 5.2]

$$\int_{\mathcal{I}} \tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t),\ \tilde{x}^*(t),\ u^*(t))\, dt \geqslant \int_{\mathcal{I}} \tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t),\ \tilde{x}^*(t),\ u(t))\, dt,$$

где $u^*(t)$ есть оптимальное управление, а $u(t)$ — произвольное управление из $\mathcal{U}$. В том случае, когда множество $\mathcal{U}$ задается ограничением $u(t) \subset \Omega$, из интегральной формы принципа максимума немедленно следует его обычная форма

$$\tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t),\ \tilde{x}^*(t),\ u^*(t)) = \max_{u \in \Omega} \tilde{H}(\tilde{\eta}^*(t),\ \tilde{x}^*(t),\ u) \text{ почти всюду.}$$

Абстрактная трактовка принципа максимума объединяет многие классические методы оптимизации. Наиболее важен абстрактный подход в том случае, когда он применяется к задачам с ограниченными множествами фазовых состояний, а также в задачах минимаксной оптимизации. В этих случаях классический анализ в R^n становится слишком громоздким, и поэтому особенно удобно описание задачи в функциональных пространствах.

Б3. Краткий указатель к библиографии

Каждый из пунктов нижеследующего списка снабжен номерами, указывающими на относящиеся к нему работы. После списка будут приведены некоторые замечания по поводу этих ссылок.

1. Обыкновенные дифференциально-функциональные системы:
   a) Дифференциально-разностные уравнения [12; 13; 14; 15; 36; 37; 38; 39; 50; 51; 54; 55].
   b) Специальные функциональные уравнения [16; 25; 31; 40; 59].
   c) Примеры и приложения [12; 13; 38].
2. Системы с частными производными:
   a) Линейный случай.
      (α) Существование оптимальных управлений [2; 3; 22; 26; 41; 57].
      (β) Принцип максимума; релейные управления [2; 3; 18; 24; 26; 56; 57].
      (γ) Управляемость и качественная теория [23; 26; 45].
   b) Нелинейный случай.
      (α) Существование оптимальных управлений [42].
      (β) Принцип максимума и дальнейшие исследования [21; 22].
   c) Различные примеры и приложения [7; 8; 9; 10; 18; 19; 22; 24; 59].
3. Минимизируемые функционалы в векторных пространствах бесконечной размерности:
   a) Обобщенные условия Куна — Таккера [17; 27; 29; 34; 35; 48; 49; 58].
   b) Применения теории управления [11; 17; 27; 33; 34; 48; 49; 58].
   c) Метод наискорейшего спуска и численные методы [30; 52; 53].
   d) Используемые понятия функционального анализа [5; 32; 56].
4. Общая теория линейных систем в пространствах бесконечной размерности:

a) Передаточные функции [4; 44];

b) Управляемость, наблюдаемость [4; 23; 44; 45].

c) Приложения и примеры [4; 44; 45].

Одно из наиболее ранних исследований по оптимальному управлению с дифференциально-разностными уравнениями содержится в работе [36, 54], где доказан принцип максимума для нелинейных систем. Систематическое изложение теории оптимального управления для дифференциально-разностных систем дается в работе [13], причем ход изложения близок к нашему. Наиболее важные положения работы [13] получают свое дальнейшее развитие в работе [15]. Одной из главных нерешенных проблем в теории управления дифференциально-разностных систем является синтез оптимального управления в виде цепи обратной связи. Попытки решения этой задачи предприняты в работе [38].

Принцип максимума для нелинейных разностных уравнений доказан в работе [31]. В этой статье подробно изложены топологические понятия, необходимые для доказательства теорем трансверсальности для дифференциальных и разностных систем управления. В работе [26] рассматриваются системы с последействием, изучается принцип максимума для таких систем, а также релейные управления и управляемость.

Отметим, что в литературе имеется очень немного упоминаний о задаче оптимального управления для функционально-дифференциальных систем общего вида.

Теория существования оптимальных управлений для систем с частными производными затрагивается во многих работах. Наиболее общие теоремы существования для линейных систем уравнений в частных производных (параболических и некоторых видов гиперболических) доказаны в работе [41]. Продолжение этого исследования для нелинейных систем проведено в работе [42].

Наиболее подробное изложение принципа максимума (а также связанных с ним вопросов релейного синтеза оптимальных управлений) для линейных систем в частных производных содержится в работе [26]. В статье [22] предложена формулировка принципа максимума для нелинейных систем в частных производных. Однако эта тема нуждается в дальнейшем уточнении, особенно в отношении влияния различных предположений на общие методы решения систем уравнений в частных производных.

В работах [3; 18; 57] рассмотрены некоторые специальные виды линейных систем уравнений в частных производных, принцип максимума для этих систем, а также синтез оптимальных управлений. В этих работах дается ряд весьма интересных примеров и приложений.

Обобщение условий Куна — Таккера для критических точек в пространствах бесконечной размерности сделано в работе [35]. В работе [17] дается первая попытка использования этих идей

для доказательства принципа максимума для задач с ограниченными фазовыми координатами; более подробно эта тема изложена в работах [27; 34; 48; 49; 51]. Дальнейшее обобщение условий Куна—Такера для слабо непрерывных функционалов можно найти в работе [28].

Проблеме минимизации функционалов в банаховом пространстве методом наискорейшего спуска посвящена работа [30]. Здесь изложены основные численные методы решения классических задач оптимизации.

Последний пункт приведенного выше списка относится к теории передаточных функций в общих линейных пространствах. Вопросы управляемости, наблюдаемости и распознавания образов изучались также в работах [4; 44; 45].

БИБЛИОГРАФИЯ К ПРИЛОЖЕНИЮ Б

1. Arrow K. J., Hurwicz L., Uzawa H., Constraint Qualifications in Maximization Problems, Naval Res. Logist. Quart., 8. 175—181 (1961).
2. Balakrishnan A. V., Optimal Control Problems in Banach Spaces. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. Control 3, 1, 152—180 (1965).
3. Balakrishnan A. V., Semigroup Theory and Control Theory. Proc. IFIP Congress, Tokyo (1965).
4. Balakrishnan A. V., A Theory of Linear Systems of Non-Finite Dimension. Proceedings of the Symposium of System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn, April (1965).
5. Berger M., Generalized differentiation and utility functionals for commodity spaces of abritrary dimensions (в печати).
6. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Теория оптимальных процессов, I. Принцип максимума. Изв. АН СССР, Сер. матем., 24, № 1, 1960.
7. Бутковский А. Г., Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 22, № 1, 1961.
8. Бутковский А. Г., Принцип максимума для оптимальных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 22, № 10, 1961.
9. Бутковский А. Г., Лернер А. Я., Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 21, № 6, 1960.
10. Бутковский А. Г., Лернер А. Я., Об оптимальном управлении системами с распределенными параметрами, ДАН СССР, т. 134, № 4, 1960.
11. Chang S. S. L., General Theory of Optimal Processes, J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control, 4, 46—55 (1966).
12. Chosky N. H., Time Lag Systems—A Bibliography, IRE Trans. Autom. Control, AC5, 66—70 (1960).
13. Chyung D. H., Optimal Control Systems with Time Delays, Ph. D. Thesis, University of Minnesota (1965).
14. Chyung D. H., Lee E. Bruce, Linear Optimal Systems with Time Delays, SIAM Journal of Control, 4, № 3 (1966)
15. Chyung D. H., Optimal Systems with Time Delay. Proc. Third IFAC, Conf., London (1966).
16. Corduneanu C., Sur une Equation Integrale de la Theorie du Reglage Automatique. C. R. Acad. Sci., 256, 3564—3567 (1963).
17. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., Задачи на экстремум при наличии ограничений. Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 5, № 3, 1965.

18. Егоров А. И., Об. оптимальном управлении процессами в распределенных объектах. Прикл. матем. механ. 27, № 4, 1963.
19. Егоров А. И., Об одной вариационной задаче в теории уравнений эллиптического типа. Сибирский матем. журнал 5, № 3, 1964.
20. Егоров Ю. В., О некоторых задачах теории оптимального управления. ДАН СССР, т. 145, № 4, 1962.
21. Егоров Ю. В., Оптимальное управление в банаховом пространстве, ДАН СССР, т. 150, № 2, 1963.
22. Егоров Ю. В., Необходимые условия оптимальности управления в банаховом пространстве. Матем. сборн., т. 64, № 1, 1964.
23. Falb Peter L., Infinite Dimensional Control Problems I: On the Closure of the Set of Attainable States for Linear Systems. J. Math. Anal. Appl. 9, № 9, 12—22 (1964).
24. Fattorini H. O., Time—Optimal Control of Solutions of Operational Differential Equations. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A. Control, 2, 54—59 (1964).
25. Friedman A., Optimal Control for Hereditary Processes, Arch. Rat. Mech. Anal., 15, 396—416 (1963).
26. Friedman A., Optimal Control in Banach Spaces (to appear).
27. Gamkrelidze R. V., On Some External Problems in the Theory of Differential Equations with Applications to the Theory of Optimal Control. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 3, № 1, 106—128 (1965).
28. Гапошкин В. Ф., О критических точках функционалов в банаховых пространствах, Матем. сборн., т. 64, № 4, 1964.
29. Гирсанов И. В., Минимаксные задачи в теории диффузионных процессов, ДАН СССР, т. 136, № 2, 1960.
30. Gollwitzer H. E., Applications of the Method of Steepest Descent to Optimal Control Problems. MS Thesis, University of Minnesota (September 1965).
31. Halkin H., A Maximum Principle of the Pontryagin Type for Systems Described by Nonlinear Difference Equations. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 4, № 1, 90—111 (1966).
32. Halkin H., Finite Convexity in Infinite Dimensional Spaces, Proc. Colloqium on Convexity, Copenhagen, 1965.
33. Halkin H., An Abstract Framework for the Theory of Process Optimization" (to appear in Bull. Amer. Math, Soc.)
34. Halkin H., Neustadt L. W., General Necessary Conditions for Optimization Problems. University of Southern California Report, 173 (1966).
35. Hurwicz L., Programming in Linear Spaces, In «Studies in Linear and Nonlinear Programming» by K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa, Stanford University Press, pp. 38—102 (1958).
36. Харатишвили Г. Л., Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием. ДАН СССР, т. 136, № 1, 1961.
37. Крамер Дж., Об управлении линейными системами с запаздыванием. «Механика», сборн. перев., 4, 1963.
38. Красовский Н. Н., Оптимальные процессы в системах с запаздыванием, Труды II Конгресса ИФАК, Базель, 1963, «Наука», 1965.
39. Красовский Н. Н., Аналитическое конструирование оптимального регулятора в системе с запаздыванием. Прикл. матем. механ., 26, № 1, 1962.
40. Lee E. B., Recurrence Equations and the Control of their Evolution. J. Math. Anal. Appl., 7, 1, 118—126 (1963).
41. Lions J. L., Sur quelques problems d'optimisation dans les equations d'evolution lineaires de type parabolique. В книге: E. Caianiello (ed), Applications of Functional Analysis to Optimization. Academic Press Inc., New York (1966).
42. Lions J. L., Optimisation pour certaines classes d'equations non linearies Proc. Symp. on Math. Theory of Control, USC (1967).

43. Лурье К. А., Задача Майера—Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами. Прикл. матем. механ., 27, № 5, 1963.
44. Markus L., Controllability and Observeability, В книге E. Caianiello (ed.), Applications of Functional Analysis to Optimization, Academic Press Inc., New York (1966).
45. Miranker W., Approximate Controllability for Distributed Linear Syst ms, J. Math. Anal. Appl., 10, 378—387 (1965).
46. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Об одной статистической задаче оптимального управления, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 3, 1961.
47. Neustadt L. W., Optimal Control Problems as Extremal Problems in a Banach Space. Proc. of Poly. Inst. of Brooklyn Symposium on System Theory, pp. 215—224 (April 1965).
48. Neustadt L. W., An Abstract Variational Theory with Applications to a Broad Class of Optimization Problems I: General Theory. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 4, (1966). (Available as report of the Electronic Sciences Laboratory, University of Southern California, Los Angeles, California.)
49. Neustadt L. W., An Abstract Variational Theory with Applications to a Broad Class of Optimization Problems II: Applications. (Available as report of the Electronic Sciences Laboratory, University of Southern California.)
50. Oguztoreli M. N., A time Optimal Control Problem for Systems Described by Differential Equations, J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 1, 3, 290—310 (1963).
51. Ожиганова И. А., К теории оптимального управления системами с запаздыванием. Труды семинара по теории дифф. уравн. с отклоняющимся аргументом, Университет Дружбы народов, 2, стр. 136—145, 1963.
52. Пшеничный В. Н., Численный метод решения некоторых задач оптимального управления, Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 4, № 2, 1964.
53. Пшеничный Б. Н., Выпуклое программирование в нормированном пространстве. Кибернетика, 1, № 5, 1965.
54. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
55. Попов В. М., Халанай А., Об одной задаче теории оптимальных систем с запаздыванием. Автоматика и телемеханика, 24, № 2, 1963.
56. Porter W. A., On the Optimal Control of Distributive Systems, Department of Electrical Engineering. The University of Michigan, Ann. Arbor, Michigan (1965).
57. Russel D. L., Optimal Regulation of Linear Symmetric Hyperbolic Systems with Finite Dimensional Controls. J. Soc. Ind. Appl. Math., Ser. A, Control 4, № 2, 276—284 (1966).
58. Russel D. L., The Kuhn—Tucker Conditions in Banach Space with an Application to Control Theory. Math. Research Center, University of Wisconsin.
59. Wang P. K. C., Aymptotic Stability of a Time Delayed Diffusion System. Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., Ser. E., J. Appl. Mech., 30E, 500—504 (1963).
60. Wang P. K. C., Control of Distributive Parameter Systems. Advances in Control Systems, 1, 75—171 (1964).
61. Wang P. K. C., Tung F., Optimum Control of Distributed Parameter Systems. Proc. Joint Automatic Control Conference, pp. 16—31 (1963).

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

Арис Р. (Aris R)
1. Оптимальное проектирование химических реакторов, пер. с англ., ИЛ, 1963.

Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. (Bellman R., Glicksberg I., Gross O.)
1. Некоторые вопросы математической теории процессов управления, пер. с англ., ИЛ, 1962.

Блисс Г. (Bliss G.)
1. Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., ИЛ, 1950.

Бесс Р. (Bass R.)
1. Equivalent Linearization, Nonlinear Circuit Synthesis and the Stabilization and Optimization of Control Systems. Proceedings of the 2nd Nonlinear Circuit Analysis Symposium, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, pp. 163-198 (1956).

Бушоу Д. (Bushaw D.)
1. Optimal Discontinuous Forcing Terms, in Lefschetz S. (ed.), vol. 4. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Princeton University Press, Princeton, N. J., pp. 29—62 (1958).

Гантмахер Ф. Р.
1. Теория матриц, „Наука“, 1967.

Грейвс Л. (Graves L.)
1. Theory of Functions of Real Variables. McGraw-Hill Book Co., New York (1956).

Данфорд Н. и Шварц Дж. (Dunford N., and Schwartz J.)
1. Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ИЛ, 1962.

Коддингтон Э. А. и Левинсон Н. (Goddington E. A., and Levinson N. L.)
1. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., ИЛ, 1958.

Лейтман Дж. (ред.) (Leitmann G.)
1. Методы оптимизации с приложениями к космическим летательным аппаратам, пер. с англ., „Наука“, 1965.

Ли Э. Б. и Маркус Л. (Lee E. B., and Markus L.)
1. Optimal Control of Nonlinear Processes, Arch. Rat. Mech. Anal., 8, 36—58 (1961).

Макшейн Э. (McShane E.)
1. Integration, Princeton University Press, Princeton, N. Y. (1944).

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
1. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

Цянь Сюэ-сень
1. Техническая кибернетика, пер. с англ., ИЛ, 1956.

К главе 2

Антосевич Г. (Antosiewicz H.)
1. Linear Control Systems. Arch, Rat. Mech. Anal., 12, 313—324, 1963.
Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. (Bellman R., Glicksberg J, Gross O.)
1. Некоторые вопросы математической теории процессов управления, пер. с англ., ИЛ, 1962.
Галкин Г. (Halkin H.)
1. Some Further Generalizations of a Theorem of Lyapounov. Arch. Rat. Mech. Anal., 17, № 4, pp. 272—277 (1964).
Гамкрелидзе Р. В.
1. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Изв. АН СССР, серия матем., т. 22, № 4, 1958.
Гильберт Э. (Gilbert E.)
1. Controllability and Observability in Multivariable Control Systems. J. SIAM, Ser. A., Control, 1, № 2, 1963.
Данфорд Н. и Шварц Дж. (Dunford N. and Schwartz J.)
1. Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., ИЛ, 1962.
Заде Л. и Дезоер Ч. (Zadeh L., and Desoer C. A.)
1. Теория линейных систем, пер. с англ., „Наука“, 1970.
Иглстон Х. (Eggleston H.)
1. Convexity, Cambridge University Press, London (1958).
Калман Р. (Kalman R.)
1. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems. J. SIAM, Ser. A, Control 1, № 2 (1963).
Калман Р., Хо Ю., Нарендра К. (Kalman R., Ho Y. C., Narendra K.)
1. Controllability of Linear Dynamical Systems. Contrib. Diff. Equations, 1, № 2, 1963.
Конти Р. (Conti R.)
1. Contributions to Linear Control Theory, J. Diff. Equations, 1, № 4, 1965.
Красовский Н. Н.
1. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, т. 18, № 11, 1957.
Ла-Салль Ж. (La-Salle J. P.)
1. Time Optimal Control Systems. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S., 45, 573—577 (1959).
Ла-Салль Ж., Лефшец С. (La-Salle J. P., Lefschetz S.)
1. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, пер. с англ., „Мир“, 1964.
Лэнинг Дж., Бэттин Р. (Laning J., and Battin R.)
1. Случайные процессы в задачах автоматического управления, пер. с англ., ИЛ, 1958.
Ляпунов А. А.
1. О вполне аддитивных вектор-функциях, Изв. АН СССР, т. 4, № 6, 1940.
Нейштадт Л. (Neustadt L.)
1. The Existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions. J. Math. Anal. Appl., 7, pp. 110—117 (1963).
Полиа Г., и Сеге Г. (Polya G. and Szego G.)
1. Задачи и теоремы из анализа., пер. с нем., Гостехиздат, 1956.
Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
1. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
Филлипов А. Ф.
1. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ. Серия матем., механ., астрон., физики, химии, 2, № 1, 1959.

Харви К., Ли Э. Б. (Harvey C., Lee E. B.)
1. On Nesessary and Sufficient Conditions for Time Optimal Control of Linear Systems. J. Math. Anal. Appl., 5, pp. 258—268 (1962).
Харви К., Ли Э. Б., Маркус Л. (Harvey C., Lee E. B., Markus L.)
1. On Time Optimal Control of Systems with Numerator Dynamics. Presented at ASD Symp. on Optimization, Dayton, Ohio (1962).

К главе 3

Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. (Bellman R., Glickberg I., Gross O.)
1. Некоторые вопросы математической теории процессов управления, пер. с англ., ИЛ, 1962.
Калман Р. (Kalman R.)
1. Contributions to the Theory of Optimal Control. Bul. Soc. Mat. Mexicana., 5, pp. 102—119 (1960).
Летов А. М.
1. Аналитическое конструирование регуляторов, I, II, III. Автоматика и телемеханика, 21, №№ 4, 5, 6, 1960.
Ли Э. Б. (Lee E. B.)
1. Design of Optimum Multivariable Control Systems. Trans. ASME, 83, pp. 85—90 (1961).
2. A Sufficient Condition in the Theory of Optimal Control. J. SIAM, Ser. A, Control 1, № 3, pp. 241—245, 1963.
Нейштадт Л. (Neustadt L.)
1. The Existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions. J. Math Anal. Appl. 7, pp. 110—117 (1963).
2. Time Optimal Control Systems with Position and Integral Limits, J. Math. Anal. Appl., 3, 1961.
Чанг А. (Chang A.)
1. An Optimal Regulator Problem. J. SIAM, Ser. A, Control, 2, № 2, 1964.

К главе 4

Альбрехт Э. Г.
1. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. Прикладная математика и механика, т. 25, вып. 5, 1961.
Важевский Т. (Wazewski T.)
1. Sur les systéms de commande non lineaires dont le contre de maine de commande n'est pas forcément convexe. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astron, Phys. 10, 17—21 (1962).
Варга Дж. (Warga J.)
1. Relaxed Variational Problems. J. Math. Anal. Appl., 4, pp. 111—128, 1962.
Галкин Г. (Halkin H.)
1. On the Necessary Condition for Optimal Control of Nonlinear Systems. J. Anal. Math., 12, pp. 1—82 (1963).
Гамкрелидзе Р. В.
1. О скользящих оптимальных режимах. ДАН СССР, т. 143, № 6, 1962.
Грейвс Л. (Graves L.)
1. Theory of Functions of a Real Variable. McGraw-Hill Book Co., New York (1956).
Джонс Г. (Jones G.)
1. Asymptotic Fixed—Point Theorems and Periodic Systems of Functional—Differential Equations. Contrib. Diff. Eq. II, pp. 385—405 (1963).
Ли Э. Б., Маркус Л. (Lee E. B., Markus L.)
1. Optimal Control of Nonlinear Processes, Arch. Rat. Mech. Anal. 8, pp. 36—58 (1961).

Люкс Д. (Lukes D.)
1. Optimal Control of Nonlinear Systems. Ph. D. Thesis, University of Minnesota (1966).
Нейштадт Л. (Neustadt L.)
1. The Existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions. J. Math. Anal. Appl., 7, pp. 110—117 (1963).
2. A General Theory of Minimal—Fuel Space Trajectories. J. SIAM, Ser. A, Control, 3, № 2, pp. 317—356 (1965).
3. Optimization, a Moment Problem, and Nonlinear Programming J. SIAM, Ser. A, Control, 2, № 1, pp. 33—53 (1964).
Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
1. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
Роксин Э. (Roxin E.)
1. The Existence of Optimal Controls. Mich. Math. J. 9, pp. 109—119 (1962).
Филиппов А. Ф.
1. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ. Серия матем., механ., астрон., физ., хим., 2, № 1, 1959.
Чанг С. (Chang S. S. L.)
1. Optimal Control in Bounded Phase Space, Automatica, vol. 1, pp. 55—67, Pergamon Press, N. Y. (1962).
Чезари Л. (Cesari L.)
1. An Existence Theorem in Problems of Optimal Control, J. SIAM, Ser. A., Control 3, № 1 (1965).
Шмэдеке В. (Schmaedeke W.)
1. Optimal Control Theory for Nonlinear Vector Differential Equations Containing Measures. J. SIAM, Ser. A, Control, 3, № 2, pp. 231—280 (1965).

К главе 5

Берковиц Л. (Berkowitz L.)
1. The Equivalence of Some Necessary Conditions for Optimal Control in Problems with Bounded State Variables. J. Math. Anal. Appl., 10, № 2, pp. 275—283 (1965).
Болтянский В. Г.
1. Достаточные условия оптимальности, ДАН СССР, т. 140, № 5, 1961.
Каллум Дж. (Cullum J.)
1. Private communication on bounded phase problem.
Калман Р. (Kalman R.)
1. When is a Linear Control System Optimal?. Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng., 86, № 1, 1964. Also numerous private discussions on the Hamilton—Jacobi theory.
Каратеодори К. (Caratheodory C.)
1. Variationrechnung und partielle Differential gleichungen erster Ordnung, Teubner Verlagsgesselschaft, Leipzig (1935).
Ли Э. Б. (Lee E. B.)
1. A Sufficient Condition in the Theory of Optimal Control. J. SIAM, Ser. A., Control 1, № 3, pp. 241—245 (1963).
Ли Э. Б. и Маркус Л. (Lee E. B., and Markus L.)
1. О необходимых и достаточных условиях оптимальности по быстродействию для нелинейных систем второго порядка. Труды II конгресса ИФАК, Базель, 1963, «Наука», 1965.
Нейштадт Л. (Neustadt L.)
1. Optimization, a Moment Problem, and Nonlinear Programming. J. SIAM, Ser. A., Control, 2, № 1, pp. 33—53 (1964).

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.
1. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
Рассел Д. (Ruscel D.)
1. Penalty Functions and Bounded Phase Coordinate Control. J. SIAM, Ser. A, Control, 2, № 3 (1965).
Фалб П. (Falb P).
1. A Simple Local—Sufficiency Condition Based on the Second Variation. IEEE Trans. Auto. Control, pp. 348—350 (1965).
Хермес Х. (Hermes H.)
1. The Equivalence and Approximation of Optimal Control Problems. J. Diff. Eq., 1, № 4, pp. 409—426 (1965).
Хестенс М. (Hestenes M.)
1. On Variational Theory and Optimal Control Theory. J. SIAM, ser. A, Control, 3, № 1, pp. 23—48 (1965).
Шмэдеке В., Рассел Д. (Schmaedeke W., Russel D.)
1. Time Optimal Control with Amplitude and Rate Limited Controls. J. SIAM, Ser. A, Control, 2, № 3 (1965).

К главе 6

Альбрехт Э. Г., Красовский Н. Н.
1. О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения. Автоматика и телемеханика, т. 25, № 7, 1964.
Атанс М., Фалб П. (Athans M., Falb P.)
1. Оптимальное управление, пер. с англ., «Машиностроение», 1968.
Галкин Г. (Halkin H.)
1. On a Generalization of a Theorem of Lyapounov. J. Math. Anal. Appl., 10, № 2, 1965.
Гилкрайст Дж. (Gilchrist J.)
1. n-Observability for Linear Systems. IEEE Trans. Auto. Control, 11 № 3 (1966).
Заде Л., Дезоер Ч. (Zadeh L., Desoer C.)
1. Теория линейных систем, пер. с англ., «Наука», 1970.
Калман Р. (Kalman R.)
1. Liapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control. Proc. Nat. Acad. Sci., 49, № 2 (1963).
Кириллова Ф. М.
1. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. вузов, Математика, № 4, 1958.
Ла-Салль Ж., Лефшец С. (La Sall J., Lefschetz S.)
1. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, пер. с англ., «Мир», 1964.
Лефшец С. (Lefschetz S.)
1. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления, «Мир», 1967.
Ли Э. Б. и Маркус Л. (Lee E. B. and Markus L.)
1. Optimal Control of Nonlinear Processes. Arch. Rat. Mech. Anal., 8, pp. 36—58 (1961).
Майер К. (Meyer K.)
1. On a System of Equations in Automatic Control Theory. Contrib. Diff. Eq., 3, pp. 163—173 (1964).
Маркус Л. (Markus L.)
1. Controllability for Nonlinear Processes. J. SIAM, Ser. A. Control 3, pp. 78—90 (1965).
2. Controllability and Observability. Applications of Functional Analysis to Optimization. Academic Press, N. Y., (to appear).
3. Stability of the Optimal Control Problem. Proc. IBM Symp. (to appear.)

4. The Bang—Bang Principle, Lecture Series in Differential Equations, AFOSR Report (1965).

Маркус Л., Ямабе Х. (Markus L., Yamabe H.)

1. Global Stability Criteria for Differential Systems. Osaka Math. J., 12, pp. 305—318 (1960).

К главе 7

Атанс М., Фалб П., Лэкос Р. (Athans M., Falb P., Lacoss R.)

1. On optimal Control of Self-Adjoint Systems. IEEE Trans. Appl. Ind., 83, pp. 161—166 (1964).

Буземан А. (Busemann A.)

1. Minimal problem der Luft—und Raumfahrt. Zeitschr. fur Flugwissenschaften, 13, pp. 401—411 (1965).

Бурмейстер Г. (Burmeister H.)

1. Genaherte Bestimmung der Schaltkurve in Zeitoptimalen Regelkreisen mit nichtlinearen strecke 2 Ordnung. Intern. Colloq, pp. 113—117 (1963).

Ивинг Г., Хэсэлтайн В. (Ewing G., Haseltine W.)

1. Optimal Programs for an Ascending Missile. J. SIAM, Ser. A., Control 2, № 1, pp. 66—88 (1964).

Ли Э. Б. (Lee E. B.)

1. Discussion of Satellite Attitude Control. ARS J. (June 1962).

Ли Э. Б., Маркус Л. (Lee E. B., Markus L.)

1. Синтез оптимального управления для нелинейных систем с одной степенью свободы. Труды I Международн. симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1961, изд. АН УССР, К., 1963.

Лоуден Д. (Lawden D.)

1. Оптимальные траектории для космической навигации, пер. с англ., «Мир», 1966.

Мьюник Г. (Munick H.)

1. On Nonlinear Optimal Control Problems with Control Appearing Linearly. Ph. D. Thesis, Adelphi University (1965).

Смит Ф. (Smith F.)

1. Time Optimal Control of Higher—Order Systems. IRE. Trans. Auto. Control, 6, pp. 16—21 (1961).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Э. Б. Ли, Л. Маркус

Основы теории оптимального управления

М., 1972 г., 576 стр. с илл.
Редактор *В. Я. Лин*

Техн. редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Е. А. Белицкая, Е. Я. Строева*

Сдано в набор 18/II 1972 г. Подписано к печати 20/IX 1972 г.Бумага 60×90 $^1/_{16}$.
Физ. печ. л. 36. Условн. печ. л. 36.
Уч.-изд. л. 35,43. Тираж 12500 экз.
Цена книги 2 р. 79 к.
Заказ № 1211.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета
по печати при Совете Министров СССР.
Москва, М-54, Валовая, 28.

Отпечатано во 2-ой типографии издательства
«Наука» Москва Г-99, Шубинский пер. 10

2 р. 79 к.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ